Լ.Գ. ՂՈՒԼՂԱԶԱՐՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ
ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ԵՐԵՎԱՆ
ՃԱՐՏԱՐԱԳԵՏ
2017

ՀՏԴ 517.31(042.4)
ԳՄԴ 22.161.1g7
Ղ 940

Երաշխավորված է տպագրության Խ. Աբովյանի անվան ՀՊՄՀ-ի Մաթեմատիկայի, ֆիզիկայի և ինֆորմատիկայի ֆակուլտետի խորհրդի կողմից

Գրախոսողներ՝ **Արաբաջյան Լ.Գ., ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր**
Սաֆարյան Յու.Ս., ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր

Ղուլղազարյան Լ.Գ.

Ղ 940 ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ: ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ:
Դասախոսություններ / Լ.Գ. Ղուլղազարյան; Եր.: ՀԱՊՀ
Ճարտարագետ 2017. - 60 էջ:

«Մաթեմատիկական անալիզ» դասընթացի «Անորոշ ինտեգրալ» թեմայի դասախոսությունների նյութերը նախատեսված լինելով մանկավարժական բուհերի առկա և հեռակա ուսանողների համար, կարող է օգտագործվել նաև տեխնիկական բուհերում և բնագիտական ֆակուլտետներում, որտեղ դասավանդվում է «Մաթեմատիկական անալիզ»: Ձեռնարկում տեսական նյութի կողքին բերված են բազմաթիվ խնդիրների լուծումներ:

Դասախոսությունների նյութերը կարող են օգտակար լինել նաև ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքերում մաթեմատիկա դասավանդող ուսուցիչներին:

ՀՏԴ 517.31(042.4)
ԳՄԴ 22.161.1g7

ISBN 978-9939-72-544-4

§1. ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ: ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ

1. Նախնական ֆունկցիա և անորոշ ինտեգրալ:

Սահմանում 1: $F(x)$ ֆունկցիան կոչվում է նախնական ֆունկցիա $f(x)$ ֆունկցիայի համար X միջակայքի վրա, եթե $F(x)$–ն այդ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում ունի ածանցյալ[1] և

$$F'(x) = f(x)\ \forall x \in X\ (dF(x) = f(x)dx, \forall\ x \in X):$$

Թեորեմ 1: Եթե $F_1(x)$–ը և $F_2(x)$–ը նախնական ֆունկցիաներ են $f(x)$ ֆունկցիայի համար X միջակայքի վրա, ապա

$$F_1(x) - F_2(x) = c, \forall x \in X,$$

որտեղ՝ c-ն հաստատուն է:

Ապացույց: Նշանակենք $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$: Քանի որ $F_1(x)$ -ը և $F_2(x)$-ը ածանցելի ֆունկցիաներ են X միջակայքի վրա, ապա $\Phi(x)$-ը նույնպես X-ի վրա կլինի ածանցելի ֆունկցիա, ընդ որում՝

$$\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0:$$

Այսինքն՝ $\Phi'(x) \equiv 0, x \in$ X:

Հայտնի թեորեմի ուժով կարող ենք պնդել, որ

$$\Phi(x) = c, \forall x \in \mathrm{X},$$

որտեղ c-ն հաստատուն է [1]:

[1] Ինչպես սովորաբար, միջակայքի ծայրակետերում, եթե այն պատկանում է միջակայքին, խոսքը վերաբերվում է համապատասխան միակողմանի ածանցյալին:

Հետևաբար՝

$$F_1(x) - F_2(x) = c, \forall x \in \mathrm{X}:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք: Եթե $F(x)$–ը հանդիսանում է $f(x)$ ֆունկցիայի համար X միջակայքի վրա որևէ նախնական, ապա X միջակայքի վրա $f(x)$ ֆունկցիայի ցանկացած $\Phi(x)$ նախնական ունի

$$\Phi(x) = F(x) + c$$

տեսքը, որտեղ՝ c-ն հաստատուն է:

Սահմանում 2: X միջակայքի վրա $f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր նախնական ֆունկցիաների համախումբը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալ (X միջակայքի վրա) և նշանակվում է $\int f(x)dx$ պայմանանշանով (կարդում են՝ ինտեգրալ էֆ իքս դե իքս):

Նկատի ունենալով թեորեմ 1-ի հետևանքը, կարող ենք գրել

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c: c \in R\}, \tag{1}$$

որտեղ՝ $F(x)$-ը որևէ նախնական ֆունկցիա է $f(x)$–ի համար: (1) բանաձևն ընդունված է գրել առանց բազմության նշանակման՝

$$\int f(x)dx = F(x) + c: \tag{2}$$

Այստեղ՝ $f(x)$-ը կոչվում է ընդինտեգրալ ֆունկցիա, $f(x)dx$-ը՝ ընդինտեգրալ արտահայտություն, x-ը՝ ինտեգրման փոփոխական, $\int -$ ը՝ անորոշ ինտեգրալի նշան, c-ն՝ ինտեգրման հաստատուն:

Դիտողություն 1: Հանգունորեն սահմանվում է $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական ֆունկցիան, ինչպես նաև անորոշ ինտեգրալը $D(f)$-ի վրա: Եթե տրված ֆունկցիայի որոշման տիրույթը միջակայք է, ապա նրա նախնական ֆունկցիան (եթե այն գոյություն ունի) որոշվում է հաստատուն գումարելիի ճշտությամբ: Եթե ֆունկցիայի որոշման տիրույթը իրենից ներկայացնում է չհատվող միջակայքերի միավորում, ապա այդ տիրույթի վրա նախնական ֆունկցիայի ոչ միակության աստիճանը ավելի է մեծանում:

Օրինակ1.1 $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$,$x \in (-\infty, 0)$ ֆունկցիայի համար գտնել նախնական ֆունկցիա, որի գրաֆիկն անցնի $(-1, 1)$ կետով:

Լուծում: Քանի որ $\left(2\ln|x| + \frac{3}{x}\right)' = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$, ապա $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական ֆունկցիաներից մեկն է՝ $F_1(x) = 2\ln|x| + \frac{3}{x}$ ֆունկցիան: Հետևաբար, որոնելի նախնականն ունի $F(x) = 2\ln|x| + \frac{3}{x} + c$ տեսքը, որտեղ՝ c-ն հաստատուն է:

c հաստատունը գտնենք $F(-1) = 1$ պայմանից, այսինքն՝ $2\ln|-1| + \frac{3}{-1} + c = 1$, որտեղից $c = 4$: Այսպիսով՝

$$F(x) = 2\ln|x| + \frac{3}{x} + 4:$$

Օրինակ 1.2. Դիցուք՝ $f(x) = \frac{1}{x}$: Գտնել $D(f)$- ի վրա $f(x)$ ֆունկցիայի որևէ նախնական և անորոշ ինտեգրալը:

Լուծում: $\ln|x|$ ֆունկցիան հանդիսանում է $f(x)$ ֆունկցիայի համար նախնական ֆունկցիա $(-\infty, 0)$ և $(0, +\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրի վրա: Իրոք, եթե $x > 0$, ապա $\ln|x| = \ln x$, հետևաբար՝ $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$: Եթե $x < 0$, ապա $\ln|x| = \ln(-x)$

և $(\ln|x|)' = \frac{(-x)'}{(-x)} = \frac{1}{x}$ ։ Այսպիսով, $F(x) = \ln|x|, x \in D(f)$ ֆունկ-ցիան նախնական ֆունկցիա է $f(x) = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի համար։ Քանի որ կամայական $x \in D(f)$ պատկանում է նշված միջա-կայքերից որևէ մեկին իր որոշ շրջակայքի հետ միասին, իսկ ֆունկցիայի ածանցյալը կախված է ֆունկցիայի վարքից տվյալ կետի շրջակայքում, ապա $f(x)$ ֆունկցիայի համար $D(f)$-ի վրա նախնական ֆունկցիա կծառայի նաև

$$F(x) = \begin{cases} \ln(-x) + c_1, \text{երբ } x < 0 \\ \ln x + c_2, \text{երբ } x > 0 \end{cases}$$

ֆունկցիան, որտեղ՝ c_1-ը և c_2-ը իրարից անկախ կամայական հաստատուններ են։

Հետևաբար՝

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln(-x) + c_1, \text{երբ } x \in (-\infty, 0), \\ \ln x + c_2, \text{երբ } x \in (0, +\infty)\text{։} \end{cases}$$

Այստեղ c-ի տարբեր ինդեքսները նշանակում են, որ այդ երկու հաստատուններն ընդունում են կամայապես, իրարից անկախ արժեքներ։

2. Անորոշ ինտեգրալի հատկությունները։

ա) Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ունի նախնական, ապա

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \; \left(d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx\right)\text{։} \qquad (3)$$

Իսկապես, $\int f(x)dx = F(x) + c$ հավասարությունից հետևում է, որ

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$$

$$\left(d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + c) = d\big(F(x)\big) = F'(x)dx = f(x)dx\right)\text{։}$$

Այսինքն դիֆերենցիալի և ինտեգրալի նշանները փոխադարձաբար ոչնչանում են, երբ դիֆերենցիալի նշանը կանգնած է ինտեգրալի նշանից առաջ:

բ) Եթե $F(x)$ ֆունկցիան տված միջակայքի յուրաքանչյուր կետում ունի ածանցյալ, ապա

$$\int F'(x)dx = F(x) + c \;\; \left(\int dF(x) = F(x) + c\right): \tag{4}$$

Քանի, որ $F(x)$-ը $F'(x)$-ի նախնականն է տված միջակայքի վրա՝ $F'(x)dx = dF(x)$, հետևաբար՝

$$\int F'(x)dx = F(x) + c$$

կամ

$$\int dF(x) = F(x) + c:$$

Այսպիսով, եթե ինտեգրալի նշանը դիֆերենցիալի նշանից առաջ է, ապա ինտեգրալի և դիֆերենցիալի նշանները փոխադարձաբար ոչնչանում են, բայց $F(x)$-ին ավելանում է հաստատուն գումարելի:

գ) Եթե f(x) ֆունկցիան ունի նախնական և $a \in R$, ապա af(x)-ը նույնպես ունի նախնական, ընդ որում, երբ $a \neq 0$, տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx \tag{5}$$

Այս հատկությունը բառերով արտահայտում են հետևյալ կերպ. հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել ինտեգրալի նշանի տակից:

Իրոք, դիցուք $F(x)$-ը նախնական է $f(x)$-ի համար տված միջակայքի վրա: Այդ դեպքում

$$a\int f(x)dx = a(F(x)+c) = aF(x)+ac:$$

Բայց $aF(x)$-ը նախնական է $af(x)$-ի համար՝

$$\left(aF(x)\right)' = a\cdot F'(x) = a\cdot f(x):$$

ac-ն նույնպես կամայական հաստատուն է (քանի որ c-ն կամայական հաստատուն է և $a\neq 0$): Այսպիսով $aF(x)+ac$–ի տակ հասկացվում է $\int af(x)dx$-ը, որը և ապացուցում է գ) հատկությունը:

դ) Եթե $f_1(x)$ և $f_2(x)$ ֆունկցիաները մի որոշ միջակայքի վրա ունեն նախնականներ, ապա $f_1(x)\pm f_2(x)$ ֆունկցիան նույնպես ունի նույն միջակայքի վրա նախնական և

$$\int(f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)\,dx: \tag{6}$$

Դիցուք $F(x)$-ը և $G(x)$-ը՝ համապատասխանաբար $f_1(x)$-ի և $f_2(x)$-ի նախնական ֆունկցիաներ են տվյալ միջակայքի վրա: Այդ դեպքում՝

$$\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)\,dx = [F(x)+c_1]\pm[G(x)+c_2] =$$
$$= F(x)\pm G(x)+[c_1\pm c_2]:$$

Բայց, $F(x)\pm G(x)$ ֆունկցիան նախնական է $f_1(x)\pm f_2(x)$ ֆունկցիայի համար՝

$$\left(F(x)\pm G(x)\right)' = F(x)'\pm G(x)' = f_1(x)\pm f_2(x),$$

իսկ $c_1\pm c_2$-ը կամայական հաստատուն է (որպես երկու կամայական հաստատունների գումար):

Այսպիսով $[F(x)\pm G(x)]+[c_1\pm c_2]$–ի տակ հասկացվում է $\int(f_1(x)\pm f_2(x))dx$ անորոշ ինտեգրալը, որը և ապացուցում է դ) հատկությունը:

գ) և դ) հատկություններից հետևում է, որ

$$\int\big(af_1(x) \pm bf_2(x)\big)dx = a\int f_1(x)dx \pm b\int f_2(x)dx,$$

որը կոչվում է ինտեգրալի գծայնության հատկություն:

Դիտողություն 2: (3) բանաձևը պետք է հասկանալ այն իմաստով, որ բոլոր ֆունկցիաները, որոնք կազմում են $\int f(x)dx$ անորոշ ինտեգրալն, ունեն միևնույն ածանցյալը (դիֆերենցիալը):

Դիտողություն 3: (4), (5), (6) հավասարությունները պետք է հասկանալ, որպես բազմությունների հավասարություն:

3. Հիմնական ինտեգրալների աղյուսակ:

Ներքոհիշյալ բանաձևերը ճիշտ են, համապատասխանաբար, ընդինտեգրալ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի ցանկացած միջակայքի վրա:

I. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1,$

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c,$

III. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1,$

III´. $\int e^x\, dx = e^x + c,$

IV. $\int \sin x dx = -cosx + c,$

V. $\int cosxdx = sinx + c,$

VI. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + c,$

VII. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + c,$

VIII. $\int shxdx = chx + c,$

IX. $\int chxdx = shx + c,$

X. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + c,$

XI. $\int \frac{dx}{sh^2x} = -cthx + c,$

XII. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c \ \left(= -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + c\right), a \neq 0,$

XIII. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{|a|} + c \ \left(= -arccos \frac{x}{|a|} + c\right), a \neq 0,$

XIV. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, a \neq 0,$

XV. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c, a \neq 0,$

XVI. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} arcsin \frac{x}{|a|} + c \ , a \neq 0,$

XVII. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| +$

$+c \ , a \neq 0$:

Դիտողություն 4: Հետագա շարադրանքում հանդիպող ինտեգրալների համար արտածված բանաձևերը իրավացի են, համապատասխանաբար, ընդինտեգրալ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի ցանկացած միջակայքի վրա:

Օրինակ 1.3. Օգտվելով հիմնական ինտեգրալների աղյուսակից, գտնել հետևյալ ինտեգրալները՝

ա) $\int (x^2 + sinx + 3cosx + e^x) dx,$ բ) $\int \frac{\left(2x - \sqrt[3]{3x}\right)^2}{x} dx$:

Լուծում: ա) Անորոշ ինտեգրալի գծայնության հատկությունից և հիմնական ինտեգրալների աղյուսակի I. ($\alpha = 2$), IV, V և III՛ բանաձևերից, կստանանք՝

$$ա) \int (x^2 + sinx + 3cosx + e^x) dx = \int x^2 dx + \int sinxdx +$$

$$+3 \int cosxdx + \int e^x dx = \frac{x^3}{3} - cosx + 3sinx + e^x + c:$$

բ) $\int \frac{\left(2x-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}dx = \int \frac{4x^2-4\sqrt[3]{3}x^{\frac{4}{3}}+\sqrt[3]{9}x^{\frac{2}{3}}}{x}dx =$

$$= \int \left(4x - 4\sqrt[3]{3}x^{\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{9}x^{-\frac{1}{3}}\right)dx =$$

$$= 4\int xdx - 4\sqrt[3]{3}\int x^{\frac{1}{3}}dx + \sqrt[3]{9}\int x^{-\frac{1}{3}}dx =$$

$$= 4\frac{x^2}{2} - 4\sqrt[3]{3}\frac{x^{4/3}}{4/3} + \sqrt[3]{9}\frac{x^{2/3}}{2/3} + c = 2x^2 - 3\sqrt[3]{3}x^{4/3} + \frac{3\sqrt[3]{9}}{2}x^{\frac{2}{3}} + c:$$

4. Ինտեգրման հիմնական մեթոդները:

Սահմանում 3: Տրված ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալի որոնման ընթացքը կոչվում է այդ ֆունկցիայի ինտեգրում:

ա) Վերլուծման մեթոդ: Վերլուծման մեթոդի էությունն այն է, որ ընդինտեգրալ ֆունկցիան ներկայացվում է ավելի պարզ ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով ու կիրառվում ինտեգրալի գծայնության հատկությունը՝

$$\int \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)dx = \sum_{i=1}^{n} a_i \int f_i(x)dx \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| > 0\right): \qquad (7)$$

Օրինակ1.4. Վերլուծման մեթոդի օգնությամբ գտնել հետևյալ ինտեգրալները.

ա) $\int \frac{dx}{sin^2xcos^2x}$, բ) $\int x^2(2-3x^2)^2dx$:

Լուծում: ա) Ընդինտեգրալ ֆունկցիան ձևափոխենք հետևյալ կերպ՝

$$\frac{1}{sin^2xcos^2x} = \frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2xcos^2x} = \frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{sin^2x}:$$

հետևաբար՝

$$\int \frac{dx}{sin^2xcos^2x} = \int \frac{dx}{cos^2x} + \int \frac{dx}{sin^2x} = tgx - ctgx + c:$$

բ) $\int x^2(2-3x^2)^2\,dx = \int x^2(4-12x^2+9x^4)dx =$

$=\int(4x^2-12x^4+9x^6)dx = 4\frac{x^3}{3} - 12\frac{x^5}{5} + 9\frac{x^7}{7} + c$:

բ) Տեղադրման կամ փոփոխականի փոխարինման մեթոդ:

Փոփոխականի փոխարինումը ինտեգրման առավել շատ կիրառվող մեթոդներից մեկն է:

Դիցուք՝ $f(\varphi(x))$ բարդ ֆունկցիան որոշված է մի որոշ միջակայքի վրա և $t=\varphi(x)$ ֆունկցիան այդ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում ունի ածանցյալ:

Այդ դեպքում, եթե $\int f(t)dt$ ինտեգրալը գոյություն ունի, ապա գոյություն ունի նաև $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ ինտեգրալը և

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt\ (t=\varphi(x)): \qquad (8)$$

(8) բանաձևը կոչվում է տեղադրումով ինտեգրման բանաձև: Եթե $t=\varphi(x)$ ֆունկցիայի համար նշված միջակայքի վրա գոյություն ունի հակադարձ ֆունկցիա, ապա (8) բանաձևը կարելի է գրել՝

$$\int f(t)dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx\ \ (x=\varphi^{-1}(t))$$

տեսքով կամ, եթե ինտեգրման փոփոխականը սովորականի նման նշանակենք x –ով, ապա կստանանք՝

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\ (t=\varphi^{-1}(x)):$$

Պնդումը ապացուցելու համար ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X միջակայքի վրա և այդ ֆունկցիայի համար՝ X միջակայքի վրա գոյություն ունի նախնական ֆունկցիա՝ $\mathrm{F}(x)$, այսինքն՝

$$\int f(x)dx = F(x) + c:$$

Այդ դեպքում $\{t\}$ միջակայքի վրա՝ $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի նախնական ֆունկցիա, նույնաբար հավասար՝ $F(\varphi(t))$ ֆունկցիային, այսինքն՝

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx = F\big(\varphi(x)\big) + c, \tag{9}$$

որը համարժեք է (8) բանաձևին (այստեղ t փոփոխականը փոխարինվեց x-ով):

Իրոք, օգտվելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնից՝ կստանանք՝

$$\frac{d}{dx}(F(\varphi(x))) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x):$$

(9) բանաձևը կոչվում է փոփոխականի փոխարինումով ինտեգրման բանաձև:

Դիտողություն 5: Օգտվելով վերը նշված բանաձևերից, լուծման գրության մեջ, համապատասխանաբար $t=\varphi(x)$, $t=\varphi^{-1}(x)$ տեղադրման նշանները սովորաբար բաց են թողնվում:

Օրինակ, գտնենք $\int(4x+5)^5dx$–ը: Տեղադրենք՝ $t=4x+5$: Կունենանք՝

$$\int(4x+5)^5dx = \frac{1}{4}\int(4x+5)^5d(4x+5) =$$
$$= \frac{1}{4}\int t^5dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^6}{6} + c = \frac{1}{24}(4x+5)^6 + c:$$

գ) Ինտեգրման նոր փոփոխականի ներմուծման մեթոդ: Հաշվի առնելով, որ (9) բանաձևում $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$, կարելի է ձևակերպել նաև ինտեգրման հետևյալ մեթոդը՝

եթե

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

ապա

$$\int f(u)du = F(u) + c,$$

որտեղ՝ $u = \varphi(x)$:

Օրինակ 1.5. Օգտվելով ինտեգրման նոր փոփոխականի ներմուծման մեթոդից, գտնել հետևյալ ինտեգրալները.

ա)$\int \frac{d(1+\ln x)}{cos^2(1+\ln x)}$, բ) $\int \frac{sinx}{cos^2x}dx$,

գ)$\int \frac{dx}{1+25x^2}$, դ) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a > 0)$:

Լուծում: ա) Քանի որ ըստ հիմնական ինտեգրալների աղյուսակի VI բանաձևի $\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + c$, հետևաբար, համաձայն ինտեգրման նոր փոփոխականի ներմուծման մեթոդի, կունենանք՝

ա)$\int \frac{d(1+\ln x)}{cos^2(1+\ln x)} = tg(1 + \ln x) + c, (u = 1 + \ln x)$,

բ)$\int \frac{sinx}{cos^2x}dx = -\int \frac{dcosx}{cos^2x} = \frac{1}{cosx} + c, (u = cosx)$,

գ) $\int \frac{dx}{1+25x^2} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5x)}{1+(5x)^2} = \frac{1}{5}\mathrm{arctg}(5x) + c, (u = 5x)$,

դ) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = arcsin\frac{x}{a} + c\ \left(u = \frac{x}{a}\right)$:

Դիտողություն 6: Պարզագույն դեպքերում, երբ տեղադրումը կարելի է կատարել մտքում, ավելորդ է ինտեգրման նոր փոփոխականի ներմուծումը: Այսպես առանց կատարելու $\varphi(x) = t$ տեղադրումը, կունենանք՝

$$\int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + c:$$

Մասնավորաբար՝

ա)$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\int \frac{d(a+bx)}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln|a+bx| + c, b \neq 0:$

բ)$\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q} = \ln|x^2+px+q| + c:$

Օրինակ 1.6. Օգտվելով փոփոխականի փոխարինման մեթոդից, գտնել հետևյալ ինտեգրալները՝

ա)$\int \frac{dx}{1+e^x}$,   բ)$\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx$,   գ)$\int \sqrt{a^2-x^2}dx, a \neq 0:$

Լուծում:

ա) Կատարենք $e^x + 1 = t$ տեղադրում: Այդ դեպքում՝

$$e^x = t - 1, \Rightarrow\ x = \ln(t-1), \Rightarrow\ dx = \frac{dt}{t-1}:$$

Հետևաբար՝

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t| + c = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + c = \ln\frac{e^x}{e^x+1} + c:$$

բ)Կատարենք $\sqrt[3]{1-x} = t$ տեղադրում: Այդ դեպքում՝

$$1 - x = t^3, \Rightarrow\ x = 1 - t^3, \Rightarrow\ dx = -3t^2dt:$$

Հետևաբար`

$$\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx = -\int (1-t^3)^2\cdot t\cdot 3t^2\,dt = -3\int t^3(1-t^3)^2\,dt =$$
$$= -3\int (t^3-2t^6+t^9)\,dt = -\frac{3}{4}t^4+\frac{6}{7}t^7-\frac{3}{10}t^{10}+c =$$
$$= -\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-x)^4}+\frac{6}{7}\sqrt[3]{(1-x)^7}-\frac{3}{10}\sqrt[3]{(1-x)^{10}}+c:$$

գ) Կատարենք $x=|a|sint$ փոփոխականի փոխարինում: Այդ դեպքում`

$$dx=|a|costdt, \sqrt{a^2-x^2}=|a|cost:$$

Հետևաբար`

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dt = \int |a|\,cost\cdot|a|costdt = a^2\int cos^2tdt =$$
$$= a^2\int\frac{1+cos2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}\int dt+\frac{a^2}{2}\int cos2tdt =$$
$$= \frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\int cos2td(2t) = \frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}sin2t+c =$$
$$= \frac{a^2}{2}arcsin\frac{x}{|a|}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+c:$$

(Տեղին է նշել, որ ընդինտեգրալ ֆունկցիան իմաստ ունի, երբ $|x|\le|a|$, հետևաբար, բավական է վերցնել $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$: Այդ պատճառով` $t=arcsin\frac{x}{|a|}, sin2t=\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$):

դ) Մասերով ինտեգրման մեթոդ:

Դիցուք` $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները մի որոշ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում ածանցելի են, եթե այդ միջակայքի վրա գոյություն ունի $\int v(x)u'(x)dx$ ինտեգրալը, ապա գոյություն ունի նաև $\int u(x)v'(x)dx$ ինտեգրալը և

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

կամ

$$\int udv = uv - \int vdu: \tag{10}$$

(10) բանաձևը կոչվում է մասերով ինտեգրման բանաձև:

Բանաձևը ապացուցելու համար դիտարկենք հետևյալ բանաձևը՝

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v':$$

Որտեղից, կունենանք՝

$$u \cdot v' = (u \cdot v)' - u' \cdot v:$$

Հաշվի առնելով, որ

$$\int (u \cdot v)' dx = u \cdot v + c,$$

կունենանք՝

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v + c - \int v \cdot u' dx:$$

c հաստատունը տալով $\int v \cdot u' dx$ ինտեգրալին՝ կունենանք (10) բանաձևը:

(10) բանաձևի կիրառումը նպատակահարմար է այն ժամանակ, երբ ընդինտեգրալ՝ $f(x)dx$ արտահայտությունը հնարավոր է ներկայացնել երկու u և dv արտադրիչների արտադրյալի տեսքով, այնպես որ dv և vdu արտահայտությունների ինտեգրումը լինի ավելի հեշտ, քան տրված արտահայտության ինտեգրումը:

Տրված dv դիֆերենցիալով v ֆունկցիան միարժեքորեն չի որոշվում, բայց (10) բանաձևում որպես v կարելի է վերցնել ցանկացած ֆունկցիա, որի դիֆերենցիալը հավասար է dv – ի :

Հաճախ ինտեգրալը հաշվելու համար կարիք է լինում կիրառել մասերով ինտեգրման բանաձևը մի քանի անգամ:

Փորձը ցույց է տալիս, որ մասերով ինտեգրվող ինտեգրալների մեծ մասը կարելի է բաժանել երեք խմբի:

Առաջին խմբին են պատկանում այնպիսի ինտեգրալները, որոնց ընդինտեգրալ ֆունկցիան որպես արտադրիչ պարունակում է հետևյալ ֆունկցիաներից որևէ մեկը՝

$$\ln x\,, arcsinx, arccosx, arctgx, (arctgx)^2,\ (arccosx)^2, \ln\varphi(x),$$

իսկ մնացած մասն իրենից ներկայացնում է մի հայտնի ֆունկցիայի ածանցյալ: Առաջին խմբին պատկանող ինտեգրալը գտնելու համար (10) բանաձևում, որպես $u(x)$, նպատակահարմար է վերցնել նշված ֆունկցիաներից որևէ մեկը:

Երկրորդ խմբին պատկանում են հետևյալ տեսքի ինտեգրալները՝

$$\int(ax+b)^n\, coscxdx, \int(ax+b)^n\, sincxdx,$$

$$\int(ax+b)^n\, e^{cx}dx, \text{որտեղ } a,b,c\in R, n\in N\text{:}$$

Երկրորդ խմբին պատկանող ինտեգրալը գտնելու համար կիրառվում է (10) բանաձևը n-անգամ, ընդ որում, ամեն անգամ նպատակահարմար է որպես $u(x)$ վերցնել $(ax+b)$ –ի համապատասխան աստիճանը:

Երրորդ խմբին պատկանում են հետևյալ տեսքի ինտեգրալները՝

$$\int e^{ax}\, cosbxdx, \int e^{ax}\, sinbxdx, \int sin(\ln x)\, dx, \int cos(\ln x)\, dx\text{:}$$

Նշանակելով նշված ինտեգրալներից յուրաքանչյուրը $\mathcal{J}$–ով և երկու անգամ մասերով ինտեգրելով, կստանանք $\mathcal{J}$–ի նկատմամբ գծային հավասարում:

Հետաքրքիր է նկատել, որ առաջին երկու ինտեգրալները կարելի է հաշվել նաև հետևյալ եղանակով՝

$$(e^{ax}cosbx)' = e^{ax}(acosbx - bsinbx),$$

$$(e^{ax}sinbx)' = e^{ax}(asinbx + bcosbx),$$

որտեղից՝

$$(a^2 + b^2)e^{ax}cosbx = b(e^{ax}sinbx)' + a(e^{ax}cosbx)',$$

$$(a^2 + b^2)e^{ax}sinbx = b(e^{ax}sinbx)' - a(e^{ax}cosbx)':$$

Բաժանելով երկու մասերը $a^2 + b^2$ արտահայտության վրա և կատարելով ինտեգրում, կստանանք՝

$$\int e^{ax}\,cosbxdx = \frac{e^{ax}(bsinbx + acosbx)}{a^2 + b^2} + c,$$

$$\int e^{ax}\,sinbxdx = \frac{e^{ax}(asinbx - bcosbx)}{a^2 + b^2} + c:$$

Իհարկե, գոյություն ունեն շատ ինտեգրալներ, որոնք ինտեգրվում են մասերով ինտեգրման մեթոդով, բայց չեն պատկանում նշված երեք խմբերից ոչ մեկին:

Օրինակ 1.7. Օգտվելով մասերով ինտեգրման մեթոդից գտնել հետևյալ ինտեգրալները՝

ա) $\int (arcsinx)^2\,dx,$ բ) $\int x^2e^x dx,$

գ) $\int \sin(lnx)\,dx,$ դ) $\int \frac{xdx}{sin^2x}$:

Լուծում:

ա) Ընդունենք $u = (arcsinx)^2, dv = dx$, այդ դեպքում՝

$$du = \frac{2arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx, v = x:$$

Հետևաբար՝

$$\int (arcsinx)^2\,dx = x(arcsinx)^2 - 2\int \frac{xarcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx:$$

Վերջին ինտեգրալը գտնելու համար նորից կիրառենք (10) բանաձևը:

Ընդունենք $u = arcsinx, dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$, այդ դեպքում՝

$$v = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int d\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} + c:$$

Վերցնենք $v = -\sqrt{1-x^2}$: Կիրառելով (10) բանաձևը, կստանանք՝

$$\int \frac{xarcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}arcsinx + \int dx =$$

$$= -\sqrt{1-x^2}arcsinx + x + c_2:$$

Այսպիսով՝

$$\int (arcsinx)^2\,dx = x(arcsinx)^2 + 2\sqrt{1-x^2}arcsinx - 2x + c:$$

բ) Ընդունենք $u = x^2, dv = e^x dx$, այդ դեպքում $du = 2xdx$, $v = \int e^x dx = e^x + c_1$: Վերցնենք՝ $v = e^x$: Կիրառելով (10) բանաձևը, կստանանք՝

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2xdx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx:$$

$\int xe^x dx$ ինտեգրալը գտնելու համար նորից օգտվենք մասերով ինտեգրման (10) բանաձևից: Ընդունենք՝ $u = x$, $dv = e^x dx$, այդ դեպքում՝ $du = dx, v = e^x$:

Կիրառելով (10) բանաձևը, կստանանք՝

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c_2:$$

Այսպիսով՝

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c:$$

գ) Դիցուք՝ $\mathcal{I} = \int sin(lnx)dx$: Ընդունենք $u = \sin(lnx)$, $dv = dx$, այդ դեպքում՝

$$du = \cos(lnx) \cdot \frac{1}{x} dx, v = x:$$

Կիրառելով (10) բանաձևը, կստանանք՝

$$\int sin(lnx)dx \ = xsin(lnx) -$$

$$-\int xcos(lnx) \cdot \frac{1}{x} dx = xsin(lnx) - \int \cos(lnx)\, dx:$$

$\int \cos(lnx)\, dx$ –ը գտնելու համար նորից օգտվենք մասերով ինտեգրման (10) բանաձևից: Ընդունենք $u = \cos(lnx)\,, dv = dx$, այդ դեպքում $du = -\sin(lnx) \cdot \frac{1}{x} dx, v = x$:

Կիրառելով (10) բանաձևը կստանանք՝

$$\int \cos(lnx)\, dx = x\cos(lnx) + \int sin(lnx)dx:$$

Այսպիսով՝

$$\mathcal{I} = sin(lnx) - xcos(lnx) - \mathcal{I}:$$

Որտեղից՝

$$\mathcal{J} = \int sin(lnx)dx \ = \frac{x}{2}[\sin(lnx) - \cos(lnx)] + c։$$

դ) $\int \frac{xdx}{sin^2x}$ ինտեգրալը չի պատկանում վերևում նշված երեք խմբերից ոչ մեկին, սակայն այն ինտեգրվում է մասերով ինտեգրման մեթոդով։ Ընդունենք $u = x, dv = \frac{dx}{sin^2x}$, այդ դեպքում $du = dx, v = -ctgx$, հետևաբար՝

$$\int \frac{xdx}{sin^2x} = -xctgx + \int ctgxdx = -xctgx + \int \frac{cosx}{sinx}dx =$$

$$= -xctgx + \int \frac{d(sinx)}{sinx} = -xctgx + \ln|sinx| + c։$$

§2. ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ

Դիցուք $R(x)$–ը իրական գործակիցներով ռացիոնալ ֆունկցիա է, այսինքն՝ այնպիսի ֆունկցիա, որը կարելի է ներկայացնել երկու՝ իրական գործակիցներով բազմանդամների հարաբերության տեսքով՝

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}:$$

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ ռացիոնալ ֆունկցիան (որն անվանում են նաև կոտորակ) համարենք անկրճատելի: Այն կանվանենք կանոնավոր կոտորակ, եթե $P(x)$–ի աստիճանը փոքր է, քան $Q(x)$–ի աստիճանը, հակառակ դեպքում՝ անկանոն:

Դիցուք պետք է գտնել՝

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

ինտեգրալը: Տարբերենք երկու դեպք՝

1) $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *կոտորակը կանոնավոր է:*

Իրավացի է հետևյալ թեորեմը, որի ապացույցը կարելի է կարդալ [1-3], [5], [6] գրքերում:

Թեորեմ 2: Դիցուք $\frac{P(x)}{Q(x)}$–ը իրական գործակիցներով կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակ է: Եթե

$$Q(x) = (x - b_1)^{\beta_1}(x - b_2)^{\beta_2} \dots (x - b_m)^{\beta_m}(x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1} \dots$$
$$\dots (x^2 + p_nx + q_n)^{\lambda_n}$$

$$(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m + 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) = \delta),$$

որտեղ՝ b_i-երը իրենցից ներկայացնում են $Q(x)$ բազմանդամի β_i պատիկ իրական արմատները $(i = 1, \dots, m)$, $x^2 + p_jx + q_j$,

$(j=1,2,\dots,n)$ եռանդամներն իրարից տարբեր են և իրական արմատներ չունեն, $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in N, \delta$–ն $Q(x)$ բազմանդամի աստիճանն է, ապա իրավացի է հետևյալ վերլուծությունը՝

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{B_1^{(1)}}{x-b_1}+\frac{B_2^{(1)}}{(x-b_1)^2}+\dots+\frac{B_{\beta_1}^{(1)}}{(x-b_1)^{\beta_1}}+\dots+\frac{B_1^{(m)}}{x-b_m}+\frac{B_2^{(m)}}{(x-b_m)^2}+$$

$$\dots+\frac{B_{\beta m}^{(m)}}{(x-b_m)^{\beta m}}+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots \qquad (11)$$

$$+\frac{M_{\lambda_1}^{(1)}x+N_{\lambda_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}}+\dots+\frac{M_1^{(n)}x+N_1^{(n)}}{x^2+p_nx+q_n}+$$

$$+\frac{M_2^{(n)}x+N_2^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^2}+\dots+\frac{M_{\lambda_n}^{(n)}x+N_{\lambda_n}^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}}:$$

Այս վերլուծության մեջ $B_1^{(1)},B_2^{(1)},\dots,B_{\beta_m}^{(m)},M_1^{(1)},N_1^{(1)},\dots,M_{\lambda_n}^{(n)},N_{\lambda_n}^{(n)}$ – որոշակի իրական թվեր են:

Գործնական խնդիրներում $B_j^{(k)},M_j^{(k)},N_j^{(k)}$ գործակիցները հաշվելու համար դիմում ենք անորոշ գործակիցների մեթոդին, որի էությունը հետևյալն է:

(11)–ի աջ մասը գրում ենք տառային գործակիցներով և բոլոր կոտորակները բերում ենք ընդհանուր հայտարարի, որը կլինի հենց $Q(x)$–ը, իսկ համարիչում ստանում ենք $\delta-1$ աստիճանի բազմանդամ: Ընդհանուր հայտարարը դեն նետելով, ստանում ենք մի հավասարություն, որի ձախ մասում տրված $P(x)$ բազմանդամն է, իսկ աջ մասում՝ $\delta-1$ աստիճանի մի անորոշ գործակիցներով բազմանդամ: Այդ հավասարությունը դիտում ենք որպես նույնություն և գործակիցները որոշում ենք հետևյալ երկու եղանակներից մեկի օգնությամբ (գործակիցների որոշման պրոցեսը կարելի է հեշտացնել, եթե ներկայացվող երկու մեթոդները հարմար ձևով կիրառվում են միաժամանակ):

ա) Միմյանց հավասարեցնում ենք հավասարության տարբեր մասերի x–ի միևնույն աստիճանների գործակիցները:

բ) x–ին տալիս ենք δ տարբեր, կամայական թվային արժեքներ, նպատակահարմար է տալ այնպիսի արժեքներ, որոնք աջ մասում հնարավորին չափ շատ անդամներ զրո դարձնեն: Այդպիսի արժեքներ են $Q(x)$-ի իրական կամ կոմպլեքս արմատները:

Երկու եղանակով էլ ստանում ենք անորոշ գործակիցների նկատմամբ δ– անհայտով δ գծային հավասարումների համակարգ: Ստացված համակարգը միշտ ունի միակ լուծում: Վերջինս հետևում է թեորեմ 2 –ից:

Այսպիսով՝ կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակը ինտեգրելու համար պետք է այն վերլուծել (11) բանաձևով, օգտվել ինտեգրալի գծայնության հատկությունից և կարողանալ ինտեգրել հետևյալ չորս տիպի <u>պարզագույն ռացիոնալ կոտորակները</u>՝

I. $\frac{B}{x-b}$ II. $\frac{B}{(x-b)^n}$ III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$

Այստեղ $n = 2, 3 \ldots, B, M, N, b, p, q \in R$, ընդ որում $q - \frac{p^2}{4} > 0$:

Պարզագույն ռացիոնալ կոտորակները ինտեգրվում են հետևյալ կերպ՝

I. $\int \frac{B}{x-b} dx = B \int \frac{dx}{x-b} = B \ln|x-b| + c$:

II. $\int \frac{B}{(x-b)^n} dx = B \int (x-b)^{-n} dx = B \frac{(x-b)^{-n+1}}{-n+1} + c =$

$= -\frac{B}{(n-1)(x-b)^{n-1}} + c$:

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} = \frac{M}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} =$

$= \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$

$= \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} arctg \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + c$:

Իհարկե այստեղ ոչ թե պետք է հիշել արտածված բանաձևը, այլ նրան բերող ձևափոխությունները, որոնք են՝ ընդինտեգրալ կոտորակի համարիչում պետք է առանձնացնել հայտարարի ածանցյալին համեմատական մեծություն, ինտեգրալը ներկայացնել երկու ինտեգրալների գումարի տեսքով, այնուհետև, երկրորդ ինտեգրալի հայտարարում առանձնացնել լրիվ քառակուսի:

IV. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} =$

$$= \frac{M}{2}\frac{\left(x^2+px+q\right)^{1-n}}{1-n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n}\ ,\ n > 1 \qquad (12)$$

Վերջին ինտեգրալը $t = x + \frac{p}{2}$ տեղադրումից հետո բերվում է $\mathcal{I}_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$, $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ ինտեգրալի, որի համար, իրավացի է հետևյալ անդրադարձ բանաձևը՝

$$\mathcal{I}_n = \frac{t}{2(n-1)a^2(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\mathcal{I}_{n-1}: \qquad (13)$$

Ապացուցենք (13) անդրադարձ բանաձևը:

Այդ նպատակի համար դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\mathcal{I}_{n-1} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}$$

և կատարենք մասերով ինտեգրում, նշանակելով

$$u = \frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}, dv = dt,$$

որտեղից

$$du = \frac{-(n-1)2tdt}{(t^2+a^2)^n}, v = t:$$

Կիրառելով մասերով ինտեգրման (10) բանաձևը, կստանանք՝

$$\mathcal{J}_{n-1} = \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^n}dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^n}dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\mathcal{J}_{n-1} - 2(n-1)a^2\mathcal{J}_n:$$

Ձևափոխությունից հետո, կստանանք՝

$$2(n-1)a^2\mathcal{J}_n = \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\mathcal{J}_{n-1}:$$

Որտեղից ստացվում է (13) անդրադարձ բանաձևը:

Երբ $n = 2$ կունենանք՝

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2} = \frac{t}{2a^2(t^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \tag{14}$$

$$= \frac{t}{2a^2(t^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}arctg\frac{t}{a} + c$$

Երբ $n > 2$, ապա (13) բանաձևը կարելի է կիրառել $\mathcal{J}_{n-1}$– ի նկատմամբ և այսպես շարունակ մինչև հասնենք հիմնական ինտեգրալների աղյուսակի XII ինտեգրալին:

$\mathcal{J}_n$-ը կարելի է գտնել նաև անորոշ գործակիցների մեթոդով: Իրոք, նախորդ դատողություններից հետևում է, որ $\mathcal{J}_n$–ը ունի հետևյալ վերջնական տեսքը՝

$$\mathcal{J}_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{C_1t + C_2t^3 + \cdots + C_{n-1}t^{2n-3}}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{C_n}{a}arctg\frac{t}{a} + c: \tag{15}$$

որտեղ՝ $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ և c_n- ը հաստատուն գործակիցներ են:

Անցնելով (15) բանաձևի երկու մասերը, բերելով ընդհանուր հայտարարի և հավասարեցնելով համարիչների t-ի միևնույն աստիճանների գործակիցները, կստանանք $c_1, c_2, \dots, c_n$ գործակիցների նկատմամբ n գծային հավասարումների համակարգ, որտեղից էլ կորոշենք այդ գործակիցները:

Օրինակ 2.1. Գտնել $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ ինտեգրալը:

Ունենք՝

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{c_1x + c_2x^3}{(x^2+1)^2} + c_3 arctgx + c:$$

Որտեղից՝

$$\frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{(1+x^2)(c_1 + 3c_2x^2) - (c_1x + c_2x^3)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2+1)^3} + \frac{c_3}{x^2+1}:$$

Բերելով ընդհանուր հայտարարի և հավասարեցնելով համարիչները կստանանք՝

$$1 = (c_1 + c_3) + (-3c_1 + 3c_2 + 2c_3)x^2 + (-c_2 + c_3)x^4:$$

Հավասարեցնելով x–ի համապատասխան աստիճանների գործակիցները, կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 1 \\ -3c_1 + 3c_2 + 2c_3 = 0 \\ -c_2 + c_3 = 0 \end{cases}:$$

Որտեղից՝ $c_1 = \frac{5}{8}, c_2 = c_3 = \frac{3}{8}$:

Այսպիսով՝

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3x^3 + 5x}{8(x^2+1)^2} + \frac{3}{8} arctgx + c:$$

Նկատի ունենալով (12) և (15) բանաձևերը, մենք հանգում ենք այն բանին, որ IV տիպի պարզագույն ռացիոնալ կոտորակի ինտեգրալն ունի հետևյալ վերջնական տեսքը՝

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{P_{2n-3}(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{2A}{\sqrt{4q-p^2}} arctg\, \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c, \quad (16)$$

որտեղ՝ $P_{2n-3}(x)$ -ը $(2n-3)$ աստիճանի մի որոշ բազմանդամ է, իսկ A–ն հաստատուն գործակից: Հետևաբար, նշված ինտեգրալը, հանգունորեն նախորդ դեպքի, նույնպես կարելի է գտնել անորոշ գործակիցների մեթոդով:

Եթե $\frac{P(x)}{Q(x)}$ կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակի հայտարարն ունի բազմապատիկ արմատներ, հատկապես կոմպլեքս արմատներ, ապա հաճախ այդպիսի կոտորակների ինտեգրումը պահանջում է մեծ հաշվարկներ: Այդ դեպքում նպատակահարմար է օգտվել Օստրոգրադսկու հետևյալ բանաձևից՝

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx \quad (17)$$

(17) բանաձևում $Q_2(x)$–ը բազմանդամ է և ունի նույն արմատները ինչ որ $Q(x)$–ը, միայն $Q_2(x)$–ի արմատները պարզ են (միապատիկ են): $Q_1(x) = Q(x)/Q_2(x)$, իսկ $P_1(x)$–ը և $P_2(x)$-ը որոշ բազմանդամներ են որոնց աստիճաններն ավելի ցածր են, քան $Q_1(x)$ և $Q_2(x)$ բազմանդամներինը, համապատասխանաբար: Եթե բազմանդամի արմատները հայտնի են, ապա հեշտությամբ կորոշենք $Q_1(x)$ և $Q_2(x)$ բազմանդամները: Նկատենք, որ $Q_1(x)$-ը իրենից ներկայացնում է $Q(x)$ և $Q'(x)$ ($Q(x)-$ ի ածանցյալը) բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը, որը կարելի է որոշել Էվկլիդեսի ալգորիթմի օգնությամբ: $P_1(x)$ և $P_2(x)$ բազմանդամները որոնում են անորոշ գործակիցների մեթոդով:

Քանի որ $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ և $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ կոտորակները կանոնավոր են, ապա բնական կլինի $P_1(x)$–ը և $P_2(x)$-ը որոնել, համապատասխանաբար $Q_1(x)$ -ի և $Q_2(x)$–ի աստիճաններից մեկով պակաս աստիճանի անորոշ գործակիցներով բազմանդամների տեսքով: Որպեսզի գտնենք նշված անորոշ գործակիցները, բավական է ածանցել Օստրոգրադսկու բանաձևի երկու մասերը, ածանցումից ստացված արդյունքը բերել ընդհանուր հայտարարի, հավասարեցնել համարիչները, այնուհետև, անորոշ գործակիցները որոշել վերոհիշյալ ա) կամ բ) եղանակներից որևէ մեկով կամ նրանց միացյալ կիրառմամբ (էջ 25):

Եթե $P_2(x) \neq 0$, ապա, քանի որ $Q_2(x)$ բազմանդամի արմատները պարզ են, ինտեգրալը տրանսցենդենտ ֆունկցիաներ են: Այդ կապակցությամբ Օստրոգրադսկու բանաձևի երկրորդ գումարելին կոչվում է $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ ինտեգրալի տրանսցենդենտ մաս, իսկ առաջին գումարելին՝ ռացիոնալ մաս:

2) $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *<u>կոտորակը անկանոն է</u>:* Այս դեպքում այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}, \tag{18}$$

որտեղ $P_0(x)$–ը բազմանդամ է, իսկ $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$–ը կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակ: (18) բանաձևում $P_0(x)$–ը և $P_1(x)$-ը համապատասխանաբար հանդիսանում են $P(x)$–ը $Q(x)$–ի վրա բաժանելուց ստացված (ոչ լրիվ) քանորդը և մնացորդը:

Այսպիսով՝

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int P_0(x) dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx: \tag{19}$$

$\int P_0(x)dx$ լինելով բազմանդամից ինտեգրալ, հեշտությամբ կգտնենք, իսկ $\int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx$–ը լինելով կանոնավոր կոտորակից ինտեգրալ, կգտնենք նախորդ մեթոդներից որևէ մեկով:

Օրինակ 2.2. Գտնել հետևյալ ինտեգրալները՝

ա)$\int \frac{2x^2+5x+5}{(x^2-1)(x+2)}dx$,   բ)$\int \frac{x^4+2x^2+x+1}{(x^2+1)^3}dx$,

գ) $\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx,$ դ) $\int \frac{6-7x-x^2}{(x^2-x+1)^2}dx$:

Լուծում: ա) Քանի որ ընդինտեգրալ ֆունկցիան կանոնավոր կոտորակ է, իսկ հայտարարը բերվում է $(x-1)(x+1)(x+2)$ տեսքի, հետևաբար կարող ենք գրել՝

$$\frac{2x^2+5x+5}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}: \tag{20}$$

(20) հավասարության աջ մասը բերելով ընդհանուր հայտարարի, կստանանք՝

$$\frac{2x^2+5x+5}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B+C)x^2+(3A+B)x+(2A-2B-C)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

հավասարեցնելով համարիչների համապատասխան գործակիցները, կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ 3A+B=5: \\ 2A-2B-C=5 \end{cases}$$

Որտեղից կստանանք՝ $A=2, B=-1, C=1$:

Նկատենք, որ այս դեպքում A, B, C գործակիցները կարելի էր հաշվել նաև հետևյալ կերպ: Օրինակ, (20) հավասարության երկու մասը բազմապատկենք $(x-1)$ –ով և ստացված հավասարության մեջ տեղադրենք $x=1$, կստանանք՝

$$A = \frac{2x^2+5x+5}{(x+1)(x+2)}\bigg|_{x=1} = \frac{2+5+5}{2\cdot 3} = 2:$$

Հանգունորեն կորոշենք նաև B-ն և C-ն: Այսպիսով՝

$$\int \frac{2x^2+5x+5}{(x+1)(x+2)}dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right)dx = 2\int \frac{dx}{x-1} -$$

$$-\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x+2} = 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + \ln|x+2| + c:$$

բ) Ընդհինտեգրալ ֆունկցիան ներկայացնենք պարզագույն կոտորակների գումարի տեսքով՝

$$\frac{x^4+2x^2+x+1}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^3} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}:$$

Բերելով ընդհանուր հայտարարի և հավասարեցնելով համարիչները կունենանք՝

$$x^4+2x^2+x+1 = Ax+B+(Cx+D)(x^2+1)+(Ex+F)(x^2+1)^2 =$$

$$= Ax+B+(Cx+D)(x^2+1)+(Ex+F)(x^4+2x^2+1) = Ex^5 +$$

$$+Fx^4+(C+2E)x^3 + (D+2F)x^2 + (A+C+E)x + (B+D+F),$$

որտեղից կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} E = 0 \\ F = 1 \\ C+2E = 0 \\ D+2F = 2 \\ A+C+E = 1 \\ B+D+F = 1 \end{cases}:$$

Լուծելով այս համակարգը, կստանանք՝ $A = F = 1$, $B = C = D = E = 0$:

Հետևաբար՝

$$\frac{x^4+2x^2+x+1}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{(x^2+1)^3}+\frac{1}{x^2+1}:$$

Այսպիսով՝

$$\int\frac{x^4+2x^2+x+1}{(x^2+1)^3}dx=\int\left(\frac{x}{(x^2+1)^3}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^3}+\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+1)^2}+arctgx+c:$$

գ) Ընդինտեգրալ ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է անկանոն կոտորակ: Բաժանելով $P(x)=2x^4+5x^2-2$ բազմանդամը $Q(x)=2x^3-x-1$ բազմանդամի վրա, կստանանք $P_0(x)=x$ քանորդը և $P_1(x)=6x^2+x-2$ մնացորդը: Հետևապես, նշված ընդինտեգրալ ֆունկցիան կներկայացվի հետևյալ կերպ՝

$$\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}=x+\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}:$$

Հեշտ է համոզվել որ $Q(x)=2x^3-x-1=(x-1)(2x^2+$ $+2x+1)$ և $2x^2+2x+1$ եռանդամը իրական արմատներ չունի:

Հետևաբար՝

$$\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}=\frac{6x^2+x-2}{(x-1)(2x^2+2x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{2x^2+2x+1},$$

որտեղից՝

$$6x^2+x-2=A(2x^2+2x+1)+(Mx+N)(x-1):$$

Տեղադրելով այստեղ $x=1$, կստանանք՝ $5=5A$, այսինքն՝ $A=1$: Հավասարեցնելով x^2 գործակիցները և ազատ անդամները, կստանանք՝

$$\begin{cases} 2A + M = 6 \\ A - N = -2\,, \\ A = 1 \end{cases}$$

որտեղից՝ $A = 1, M = 4, N = 3$: Հետևաբար, ընդինտեգրալ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$\frac{6x^2 + x - 2}{2x^3 - x - 1} = x + \frac{1}{x-1} + \frac{4x+3}{2x^2 + 2x + 1}:$$

Այսպիսով՝

$$\int \frac{6x^2 + x - 2}{2x^3 - x - 1}dx = \int \left(x + \frac{1}{x-1} + \frac{4x+3}{2x^2 + 2x + 1}\right)dx =$$

$$= \int xdx + \int \frac{dx}{x-1}dx + \int \frac{4x+3}{2x^2 + 2x + 1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \int \frac{4x+2}{2x^2 + 2x + 1}dx + \int \frac{dx}{2x^2 + 2x + 1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \ln(2x^2 + 2x + 1) + arctg(2x+1) + c:$$

դ) Ինտեգրալը գտնենք, օգտվելով Օստրոգրադսկու բանաձևից: Նկատենք, որ

$$Q_1(x) = Q_2(x) = x^2 - x + 1:$$

Հետևաբար՝

$$\int \frac{6 - 7x - x^2}{(x^2 - x + 1)^2}dx = \frac{Ax + B}{x^2 - x + 1} + \int \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1}dx:$$

Ածանցելով այս հավասարության երկու մասը, կստանանք՝

$$\frac{6 - 7x - x^2}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{A(x^2 - x + 1) - (Ax + B)(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1}:$$

Բերելով ընդհանուր հայտարարի և հավասարեցնելով համարիչները, կստանանք՝

$$6-7x-x^2 = A(x^2-x+1)-(Ax+B)(2x-1)+(Cx+D)(x^2-x+1):$$

Հավասարեցնելով x–ի համապատասխան աստիճանների գործակիցները, կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} C=0 \\ -A+D-C=-1 \\ -2B-D+C=-7 \\ A+B+D=6 \end{cases}:$$

Լուծելով այս հավասարումների համակարգը կստանանք՝ $A=2, B=3, C=0, D=1$:

Այսպիսով՝

$$\int \frac{6-7x-x^2}{(x^2-x+1)^2}dx = \frac{2x+3}{x^2-x+1} + \int \frac{dx}{x^2-x+1}:$$

Գտնելով վերջին ինտեգրալը, կստանանք հետևյալ վերջնական տեսքը՝

$$\int \frac{6-7x-x^2}{(x^2-x+1)^2}dx = \frac{2x+3}{x^2-x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c:$$

Դիտողություն 7. Ցանկացած ռացիոնալ կոտորակ կարելի է ինտեգրել վերոհիշյալ մեթոդներով, սակայն շատ ռացինալ կոտորակներ կարելի է ինտեգրել ոչ թե օգտվելով ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրման ընդհանուր մեթոդներից, այլ ուրիշ մեթոդներից (փոփոխականի փոխարինման, մասերով ինտեգրման և այլն), որոնք կարող են նպատակին հասցնել ավելի արագ:

§ 3. ԻՌԱՑԻՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ

Հետագայում, $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ նշանակման տակ կհասկանանք $x_1, x_2, \dots, x_n$ փոփոխականներից յուրաքանչյուրի նկատմամբ ռացիոնալ ֆունկցիա: Օրինակ՝

$$\frac{x+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x}} = R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{x+1}, \sqrt[3]{x}\right)$$

քանի որ $\frac{x+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x}}$ իռացիոնալ արտահայտությունը $x_1 = x$, $x_2 = \sqrt{x}$, $x_3 = \sqrt{x+1}$, $x_4 = \sqrt[3]{x}$ փոփոխականների նկատմամբ ռացիոնալ ֆունկցիա է:

1. Կոտորակագծային իռացիոնալությունների ինտեգրումը:

Այս պարագրաֆում մենք ցույց կտանք, որ հետևյալ տեսքի ցանկացած ֆունկցիա՝

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), \tag{22}$$

որտեղ a, b, c և d –ն հաստատուններ են, n-ը ամբողջ դրական թիվ է, ինտեգրելի ֆունկցիա է և ինտեգրալը արտահայտվում է տարրական ֆունկցիաներով:

Այսպիսի ֆունկցիաներին անվանում են կոտորակագծային իռացիոնալություններ:

(22)-ը՝ նշանակում է ռացիոնալ ֆունկցիա $x_1 = x, x_2 = = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ երկու փոփոխականից:

Երբ $ad - bc \neq 0$, ապա այդ դեպքում ցույց տանք, որ

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

տեղադրման միջոցով, կարելի է (22) ֆունկցիայի ինտեգրալի որոնումը բերել սովորական ռացիոնալ կոտորակի ինտեգրման (ասում ենք այս տեղադրումով ինտեգրալը ռացիոնալացնում ենք)։ Իրոք, կարող ենք գրել

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}\ , x = \frac{d \cdot t^n - b}{a - c \cdot t^n}, dx = \frac{(ad-bc)n\ t^{n-1}}{(a-c \cdot t^n)^2}dt:$$

Հետևաբար

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{d \cdot t^n - b}{a - c \cdot t^n}, t\right) \cdot \frac{(ad-bc)n\ t^{n-1}}{(a-c \cdot t^n)^2}dt:$$

Նկատենք, որ ռացիոնալ ֆունկցիաներից ռացիոնալ ֆունկցիան իրենից ներկայացնում է ռացիոնալ ֆունկցիա, հետևաբար այս հավասարության աջ մասում գրված ինտեգրալը իրենից կներկայացնի ռացիոնալ կոտորակից ինտեգրալ։ Իսկ դա նշանակում է, որ $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ նշանակումով՝ $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ ինտեգրալը ռացիոնալացվեց։

Ընդհանուր տեսքով կոտորակագծային իռացիոնալությունների ինտեգրումը:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{P_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{P_n}\right)dx \qquad (23)$$

տեսքի ինտեգրալը, որտեղ՝ $n \in N, P_1, P_2, \dots, P_n \in Q, a, b, c, d \in R$, $ad - bc \neq 0$,

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$$

տեղադրումով, որտեղ՝ $m -$ը, $P_1, P_2, \dots, P_n$ ռացիոնալ թվերի ընդհանուր հայտարարն է, բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիայից ինտեգրալի: (23) ինտեգրալի ընդինտեգրալ ֆունկցիան նս ան-վանում են կոտորակագծային իռացիոնալություն:

Օրինակ3.1. Գտնել հետևյալ ինտեգրալները.

ա) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$, բ) $\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$, գ) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[6]{x^7}}dx$:

Լուծում: ա) Արմատատակ արտահայտությունը բազմա-պատկելով և բաժանելով $(x+1)$–ի, կստանանք՝

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}}:$$

Տեղադրենք՝

$$\frac{x-1}{x+1} = t^3:$$

Այդ դեպքում՝

$$x+1 = \frac{2}{1-t^3},\ dx = \frac{6t^2dt}{(1-t^3)^2}:$$

Հետևաբար, կստանանք՝

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}} = \int \frac{1-t^3}{2t} \cdot \frac{6t^2}{(1-t^3)^2}dt = \int \frac{3t}{1-t^3}dt,$$

որը կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակից ինտեգրալ է:

$\frac{3t}{1-t^3}$ կոտորակը վերլուծենք պարզագույն ռացիոնալ կո-տորակների՝

$$\frac{3t}{1-t^3} = \frac{3t}{(1-t)(1+t+t^2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{Bt+C}{1+t+t^2}:$$

Այս հավասարության երկու մասում տեղադրենք $t = 0$, կստանանք՝ $A + C = 0$, այնուհետև երկու մասը բազմապատկենք t –ով և անցնենք սահմանի, երբ $t \to \infty$, կստանանք՝ $-A + B = 0$ և քանի որ

$$A = \frac{3t}{1 + t + t^2}\bigg|_{t=1} = 1,$$

հետևաբար կստանանք՝ $A = 1, B = 1, C = -1$:

Այսպիսով՝

$$\frac{3t}{1 - t^3} = \frac{1}{1 - t} + \frac{t - 1}{1 + t + t^2} = \frac{1}{1 - t} + \frac{1}{2}\frac{1 + 2t}{1 + t + t^2} - \frac{3}{2\left(\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)}:$$

Որտեղից՝

$$\int \frac{3t}{1 - t^3}dt = -\ln|1 - t| + \frac{1}{2}\ln(1 + t + t^2) - \sqrt{3}arctg\,\frac{2t + 1}{\sqrt{3}} + c:$$

Հետևաբար՝

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x - 1)(x + 1)^2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{2}{\left(\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1}\right)^3} -$$

$$-\sqrt{3}arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{x - 1}{x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c:$$

բ) Տեղադրենք $\sqrt[6]{x} = z$, այդ դեպքում՝ $x = x^6$, $\sqrt[3]{x} = z^2$, $dx = 6z^5dz$: Հետևաբար՝

$$\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = 6\int \frac{z^5(1+z)}{1+z^2}dz =$$

$$= 6\int \left(z^4 + z^3 - z^2 - z + 1 + \frac{z-1}{1+z^2}\right)dz =$$

$$= 6\left(\frac{z^5}{5} + \frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z + \frac{1}{2}\ln(1+z^2) - arctgz\right) + c =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} - \frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + \frac{1}{2}\ln\left|1+\sqrt[3]{x}\right| - arctg\sqrt[6]{x}\right) + c:$$

գ) Քանի որ 2, 3, 4, 6 թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հավասար է 12-ի, ուստի տեղադրենք՝ $x = t^{12}$, այդ դեպքում՝

$$\sqrt{x} = t^6, \sqrt[3]{x} = t^4, \sqrt[4]{x^5} = t^{15},$$

$$\sqrt[6]{x^7} = t^{14}, dx = 12t^{11}dt:$$

Այսպիսով՝

$$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx = 12\int \frac{(t^6+t^4)t^{11}}{t^{15}-t^{14}}dt = 12\int \frac{t^3+t}{t-1}dt =$$

$$= 12\int \left(t + 2 + t^2 + \frac{2}{t-1}\right)dt =$$

$$=12\left(\frac{(t+2)^2}{2} + 2\ln|t-1| + \frac{t^3}{3}\right) + c =$$

$$= 6\left(\sqrt[12]{x}+2\right)^2 + 24\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right| + 4\sqrt[4]{x} + c:$$

2. Քառակուսային իռացիոնալությունների ինտեգրումը:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, a \neq 0,\ b^2-4ac \neq 0 \qquad (24)$$

տեսքի ինտեգրալը կարելի է բերել ռացիոնալ ֆունկցիայից ինտեգրալի Էյլերի տեղադրությունների միջոցով՝

ա) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t,$ եթե $a > 0,$

բ) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c},$ եթե $c > 0,$

գ) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x-x_1)t,$

դ) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x-x_2)t,$

որտեղ x_1–ը և x_2-ը ax^2+bx+c քառակուսի եռանդամի իրարից տարբեր, իրական արմատներ են (աջ մասի նշանները կարելի է վերցնել կամայական հաջորդականությամբ):

(24) ինտեգրալի ընդինտեգրալ ֆունկցիան անվանում են քառակուսային իռացիոնալություն:

(24) տիպի ինտեգրալները գտնելիս սովորաբար Էյլերի տեղադրությունները հանգեցնում են բարդ հաշվարկների: Որոշ մասնավոր տիպի ինտեգրալներ կարելի է գտնել ավելի պարզ եղանակով:

1) $\int \frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ տեսքի ինտեգրալը կարելի է գտնել հետևյալ կերպ՝

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx +$$

$$+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} +$$

$$+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}:$$

Վերջին ինտեգրալը բերվում է աղյուսակային ինտեգրալի (կիրառվում է XV բանաձևը, եթե $a > 0$ կամ XVII բանաձևը, եթե $a < 0$ և $4ac - b^2 < 0$):

2) $\int \frac{P_m(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ տեսքի ինտեգրալը, որտեղ $P_m(x)$–ը m աստիճանի բազմանդամ է, կարելի է գտնել հետևյալ բանաձևով՝

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = P_{m-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + k \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} : \quad (25)$$

(25) բանաձևում $P_{m-1}(x)$–ը $m - 1$ աստիճանի որոշ բազմանդամ է, իսկ k–ն հաստատուն գործակից: $P_{m-1}(x)$ բազմանդամի և k գործակցի որոշման համար օգտվում ենք անորոշ գործակիցների եղանակից:

$P_{m-1}(x)$ բազմանդամը փնտրում ենք տառային գործակիցներով բազմանդամի տեսքով՝ $P_{m-1}(x) = A_0 + A_1 x + \cdots +$ $+A_{m-1}x^{m-1}$:

Ածանցելով (25) հավասարության երկու մասերը, այնուհետև բազմապատկելով $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ արտահայտությամբ, կստանանք՝

$$P(x) = P'_{m-1}(x)(ax^2 + bx + c) + \frac{1}{2} P_{m-1}(x)\,(2ax + b) + k: \quad (26)$$

(26) հավասարության երկու մասերը m աստիճանի բազմանդամներ են: Հավասարեցնելով x–ի համապատասխան աստիճանի գործակիցները՝ կստանանք՝ $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}$ և k-ի նկատմամբ գծային հավասարումների համակարգ, որտեղից էլ կորոշենք այդ գործակիցները:

3) $\int \frac{dx}{(x-a_1)^2\sqrt{ax^2+bx+c}}$ տեսքի ինտեգրալը բերվում է նախորդ դեպքին $x - a_1 = \frac{1}{t}$ տեղադրումով:

4) $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ տեսքի ինտեգրալը գտնելու եղանակին կարելի է ծանոթանալ [1-3] գրքերում:

5) (24) տեսքի ինտեգրալները $t = x + \frac{b}{2a}$ տեղադրման միջոցով կարելի է բերել հետևյալ երեք տիպի ինտեգրալներից որևէ մեկին՝

$1'.\ \int R\left(t, \sqrt{p^2t^2 + q^2}\right)dt,$

$2'.\ \int R\left(t, \sqrt{p^2t^2 - q^2}\right)dt,$

$3'.\ \int R\left(t, \sqrt{q^2 - p^2t^2}\right)dt$:

$1'.-3'.$ տեսքի ինտեգրալները կարելի է բերել՝

$$\int R(sinz, cosz)dz \text{ կամ } \int R(shz, chz)dz \qquad (27)$$

տեսքի ինտեգրալների, համապատասխանաբար, հետևյալ տեղադրումների օգնությամբ՝

$1'.\ t = \frac{q}{p}tgz$ կամ $t = \frac{q}{p}shz$:

$2'.\ t = \frac{q}{p}secz$ կամ $t = \frac{q}{p}chz$:

$3'.\ t = \frac{q}{p}sinz$ կամ $t = \frac{q}{p}thz$:

(27) տեսքի ինտեգրալները գտնելու մեթոդների մասին տե՛ս §4 էջ 52:

Օրինակ 3.2. Գտնել հետևյալ ինտեգրալները.

ա) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$, բ) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$,

գ) $\int \frac{xdx}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}$, դ) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$,

ե) $\int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$, զ) $\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}$:

Լուծում: ա) Այստեղ $a = 1 > 0$, հետևաբար, կատարենք՝

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = t - x$$

տեղադրում: Այդ հավասարության երկու մասը բարձրացնելով քառակուսի և կատարելով նման անդամների միացում, կստանանք՝

$$x + 1 = t^2 - 2xt,$$

որտեղից՝

$$x = \frac{t^2-1}{1+2t}\,,\ dx = 2\,\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}\,dt:$$

Հետևաբար՝

$$\int \frac{dt}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = 2\int \frac{t^2 + t + 1}{t(1 + 2t)^2}\,dt:$$

Վերջին ինտեգրալի ընդինտեգրալ ռացիոնալ կոտորակը վերլուծենք պարզագույն կոտորակների՝

$$\frac{2(t^2 + t + 1)}{t(1 + 2t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1 + 2t} + \frac{C}{(1 + 2t)^2}:$$

Հեշտ է համոզվել, որ A, B և C անորոշ գործակիցները, համապատասխանաբար հավասար են $2, -3, -3$:

Այսպիսով՝

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1 + 2t| + \frac{3}{2(1 + 2t)} + c =$$

$$= 2\ln\left|x + \sqrt{x^2 + x + 1}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}\right| +$$

$$+ \frac{3}{2\left(1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}\right)} + c:$$

բ) Քանի որ այստեղ $c = 1 > 0$, ապա կարելի է կատարել

$$\sqrt{1 + x - x^2} = xt - 1$$

տեղադրում, որտեղից՝

$$(1 + 2t)x = (1 + t^2)x^2, \qquad x = \frac{1 + 2t}{1 + t^2}, \qquad dx = 2\frac{1 - t - t^2}{(1 + t^2)^2}dt,$$

$$\sqrt{1 + x - x^2} = \frac{t^2 + t - 1}{1 + t^2}, \qquad 1 + x = \frac{t^2 + 2t + 2}{1 + t^2}:$$

Հետևաբար՝

$$\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{1 + x - x^2}} = -2\int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} =$$

$$= -2\int \frac{d(t + 1)}{(t + 1)^2 + 1} = -2arctg(t + 1) + c =$$

$$= -2arctg\frac{1 + x + \sqrt{1 + x - x^2}}{x} + c:$$

գ) Քանի որ $7x - 10 - x^2$ եռանդամն ունի երկու իրական արմատներ՝ $x_1 = 2, x_2 = 5$, ապա կարելի է կատարել

$$\sqrt{7x - 10 - x^2} = (x - 2)t$$

տեղադրում, որտեղից՝

$$5 - x = (x - 2)t^2, x = \frac{5 + 2t^2}{1 + t^2}:$$

Հետևաբար՝

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(7x - 10 - x^2)^3}} = -\frac{6}{27}\int \frac{5 + 2t^2}{t^2}dt = -\frac{2}{9}\int \left(\frac{5}{t^2} + 2\right)dt =$$

$$= -\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t} + 2t\right) + c = \frac{10(x + 2)}{9\sqrt{7x - 10 - x^2}} - \frac{4\sqrt{7x - 10 - x^2}}{9(x - 2)} + c:$$

դ) Կատարելով $2x+1=t$ տեղադրում, կստանանք՝

$$x=\frac{t-1}{2}, dx=\frac{1}{2}dt:$$

Հետևաբար՝

$$\int\frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}=\frac{1}{4}\int\frac{(t+5)dt}{\sqrt{t^2-4}}=\frac{1}{4}\sqrt{t^2-4}+$$

$$+\frac{5}{4}\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right|+c=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3}+\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}\right|+c:$$

ե) Այս ինտեգրալը գտնենք, օգտվելով (25) բանաձևից: Այստեղ՝ $m=3$, $P_3(x)=x^3-x-1$: Հետևաբար՝

$$P_2(x)=A_0+A_1x+A_2x^2:$$

Համաձայն (25) բանաձևի, կունենանք՝

$$\int\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=$$

$$=(A_0+A_1x+A_2x^2)\sqrt{x^2+2x+2}+k\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}:$$

Ածանցելով վերջին հավասարության երկու մասերը, կստանանք՝

$$\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=(2A_2x+A_1)\sqrt{x^2+2x+2}+$$

$$+(A_2x^2+A_1x+A_0)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\frac{k}{\sqrt{x^2+2x+2}}:$$

Բերելով ընդհանուր հայտարարի և հավասարեցնելով համարիչները, կստանանք՝

$$x^3 - x - 1 = (2A_2x + A_1)(x^2 + 2x + 2) +$$
$$+(A_2x^2 + A_1x + A_0)(x + 1) + k:$$

Հավասարեցնելով x-ի համապատասխան աստիճանի գործակիցները, կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} 3A_2 = 1 \\ 2A_1 + 5A_2 = 0 \\ 3A_1 + 4A_2 + A_0 = -1 \\ 2A_1 + A_0 + k = -1 \end{cases}:$$

Լուծելով այս հավասարումների համակարգը, կստանանք՝

$$A_2 = \frac{1}{3}, A_1 = -\frac{5}{6}, A_0 = \frac{1}{6}, k = \frac{1}{2}:$$

Այսպիսով՝

$$\int \frac{x^3 - x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx =$$
$$= \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}:$$

Քանի որ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 1)^2 + 1}} = \ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right) + c,$$

ապա

$$\int \frac{x^3 - x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2 + 2x + 2} +$$
$$+\frac{1}{2}\ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right) + c:$$

գ) Ինտեգրալը գտնենք փոփոխականի փոխարինման մեթոդով:

Քանի որ $x^2-2x+5=(x-1)^2+4$, ապա կատարենք $x-1=t$ տեղադրում: Այդ դեպքում՝

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}=\int \frac{dt}{(t^2+4)^{\frac{3}{2}}}:$$

Վերջին ինտեգրալում կատարելով $t=2tgz$ (քանի որ որոնելի ինտեգրալի ընդհինտեգրալ ֆունկցիան որոշված է $(-\infty,\infty)$ միջակայքում, ապա բավական է վերցնել $-\frac{\pi}{2}<z<\frac{\pi}{2}$) փոփոխականի փոխարինում, կունենանք՝ $dt=2sec^2zdz, (t^2+4)^{\frac{3}{2}}=8sec^3z$:

Հետևաբար՝

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}=\int \frac{2sec^2zdz}{8sec^3z}=\frac{1}{4}\int coszdz=\frac{1}{4}sinz+c=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{tgz}{\sqrt{1+tg^2z}}+c=\frac{1}{4}\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}+c=\frac{1}{4}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}+c:$$

3. Բինոմական դիֆերենցիալների ինտեգրումը:

Պայմանավորվենք հետևյալ տեսքի արտահայտությունն անվանել բինոմական դիֆերենցիալ

$$x^m(a+bx^n)^p dx,$$

որտեղ՝ $a,b\in R, m,n,p\in Q$:

$\int x^m(a+bx^n)^p dx$ տեսքի ինտեգրալը բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիայից ինտեգրալի միայն հետևյալ 3 դեպքերում՝

1) p-ն ամբողջ է: Եթե $p>0$, ապա օգտվելով Նյուտոնի երկանդամի բանաձևից ընդհինտեգրալ ֆունկցիան ներկայաց-

նում ենք աստիճանային ֆունկցիաների գծային կոմբինացիայի տեսքով: Եթե $p < 0$, ապա կատարում ենք $x = t^k$ տեղադրում, որտեղ k–ն, m և n ռացիոնալ թվերի ընդհանուր հայտարարն է: Այս դեպքում դիտարկվող ինտեգրալը պատկանում է §3-ի 1. կետում դիտարկված տեսքի ինտեգրալների դասին:

2) $\frac{m+1}{n}$–ը ամբողջ է: Կատարում ենք $a + bx^n = t^s$ տեղադրում, որտեղ s-ը p կոտորակի հայտարարն է:

3) $\frac{m+1}{n} + p$ –ն ամբողջ է: Կատարում ենք $a + bx^n = t^s x^n$ տեղադրում, որտեղ s–ը p կոտորակի հայտարարն է:

Ռուս մաթեմատիկոս Պ.Լ. Չեբիշևը (1821-1894թթ) ցույց է տվել, որ բինոմական դիֆերենցիալների համար վերջավոր տեսքի ինտեգրման ուրիշ դեպքեր գոյություն չունեն:

Կասենք $f(x)$ տարրական ֆունկցիան X միջակայքի վրա ինտեգրվում է վերջավոր տեսքով, եթե այդ միջակայքի վրա $\int f(x)dx$-ը (եթե այն գոյություն ունի) հանդիսանում է տարրական ֆունկցիաների դասի ենթաբազմություն:

Օրինակ 3.3 Գտնել հետևյալ ինտեգրալները.

ա) $\int \frac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$, բ) $\int \frac{x^4}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$:

Լուծում: ա) Ունենք բինոմական դիֆերենցիալից ինտեգրալ:

Այստեղ՝ $m = 3, n = 2, p = -\frac{3}{2}$:

Քանի որ $\frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} = 2$ ամբողջ է, հետևապես կարելի է կատարել տեղադրում՝

$$1 - x^2 = t^2:$$

Այդ դեպքում՝

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=t^3,\ x^3=(1-t^2)^{\frac{3}{2}}, x=(1-t^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$dx=-t(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}dt:$$

Հետևաբար՝

$$\int\frac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=-\int\frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}t(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}}{t^3}dt=-\int\frac{1-t^2}{t^2}dt=$$

$$=-\int\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt=\frac{1}{t}+t+c=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+c:$$

բ) Այստեղ՝ $m=4, n=2, p=-\frac{3}{2}$: Քանի որ $\frac{m+1}{n}+p=$ $=\frac{4+1}{2}-\frac{3}{2}=1$ ամբողջ է, հետևաբար կարելի է կատարել $1-x^2=t^2x^2$ տեղադրում: Այդ դեպքում՝

$$x^4=(1+t^2)^{-2}, (1-x^2)^{\frac{3}{2}}=t^3(1+t^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$dx=-t(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}dt:$$

Հետևաբար՝

$$\int\frac{x^4}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=-\int\frac{(1+t^2)^{-2}t(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}}{t^3(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}}dt=-\int\frac{dt}{t^2(1+t^2)^2}:$$

$\frac{1}{t^2(1+t^2)^2}$ ռացիոնալ ֆունկցիան, որը t^2–ի նկատմամբ նույնպես ռացիոնալ ֆունկցիա է: Վերլուծենք այն պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների՝

$$\frac{1}{t^2(1+t^2)^2}=\frac{A}{t^2}+\frac{B}{1+t^2}+\frac{C}{(1+t^2)^2}:$$

Հեշտ է համոզվել, որ $A = 1, B = -1, C = -1$:

Որտեղից՝

$$\int \frac{x^4}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = -\int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{t} + arctgt + \int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt:$$

Վերջին ինտեգրալը գտնենք, օգտվելով §2 (14) բանաձից՝

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}arctgt + c:$$

Այսպիսով՝

$$\int \frac{x^4}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{1}{t} + \frac{3}{2}arctgt + \frac{t}{2(t^2+1)} + c =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{2}arctg\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c:$$

§ 4. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ԵՎ ՀԻՊԵՐԲՈԼԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ

1. $\int R(sinx, cosx)dx$ տեսքի ինտեգրալը միշտ կարելի է բերել

$$t = tg\frac{x}{2}, x \in (-\pi, \pi)$$

տեղադրման միջոցով, ռացիոնալ ֆունկցիայից ինտեգրալի: Այս տեղադրումը կոչվում է ընդհանրական (ունիվերսալ) տեղադրում: Ընդհանրական տեղադրումը հաճախ հանգեցնում է բարդ հաշվարկների: Ստորև նշված դեպքերում, համապատասխան ինտեգրալները կարելի է գտնել ավելի պարզ տեղադրումների օգնությամբ՝

1) $R(-sinx;\ cosx) = -R(sinx; cosx)$ => տեղադրել $t = cosx$,

2) $R(sinx;\ -cosx) = -R(sinx; cosx)$ => տեղադրել $t = sinx$,

3) $R(-sinx;\ -cosx) = R(sinx; cosx)$ => տեղադրել $t = tgx$:

2. $\int R(shx, chx)dx$ տեսքի ինտեգրալը միշտ կարելի է բերել, $t = th\frac{x}{2}$ տեղադրման միջոցով, ռացիոնալ ֆունկցիայից ինտեգրալի: Հաճախ, հանգունորեն եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ինտեգրմանը, հարմար է կիրառել $t = shx, t = chx$, $t = thx$ տեղադրումները կամ ինտեգրման այլ մեթոդներ:

3. $\int sin^p x cos^q x dx$, $\int sh^p x ch^q x dx$, $p, q \in Q$ տեսքի ինտեգրալները, միշտ կարելի է բերել համապատասխանաբար $t = cosx$ կամ $t = sinx$ և $t = chx$ կամ $t = shx$ տեղադրումների միջոցով բինոմական դիֆերենցիալից ինտեգրալի:

Եթե p–ն և q-ն ոչ բացասական զույգ թվեր են, ապա հարմար է կիրառել աստիճանի իջեցման մեթոդը, օգտվելով համապատասխանաբար հետևյալ ձևափոխություններից՝

$$sin^2x + cos^2x = 1, \qquad ch^2x - sh^2x = 1$$

$$2cos^2x = 1 + cos2x, \qquad 2ch^2x = 1 + ch2x$$

$$2sin^2x = 1 - cos2x, \qquad 2sh^2x = ch2x - 1$$

$$sin2x = 2sinxcosx, \qquad sh2x = 2shxchx$$

Օրինակ 4.1. Գտնել հետևյալ ինտեգրալները՝

ա) $\int \frac{dx}{2sinx+3cosx+4}$, բ) $\int sin^3xcos^2xdx$,

գ) $\int \frac{cos^3x}{sin^7x}dx$, դ) $\int \frac{sin^2x+1}{cos^4x}dx$,

ե) $\int \sqrt[3]{\frac{sin^{11}x}{cos^5x}}dx$, զ) $\int sin^2x\,cos^4xdx$:

__**Լուծում:**__ ա) Այստեղ կատարենք $t = tg\frac{x}{2}$ ընդհանրական տեղադրում: Այդ դեպքում՝

$$sinx = \frac{2t}{1+t^2}, cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}:$$

Հետևաբար՝

$$\int \frac{dx}{2sinx + 3cosx + 4} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 4t + 7} = 2\int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2 + 3} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t+2}{\sqrt{3}} + c = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\frac{x}{2} + 2}{\sqrt{3}} + c:$$

բ) Ենթաինտեգրալ արտահայտությունն իր նշանը փոխում է $sinx$–ը $(-sinx)$–ով փոխարինելիս: Տեղադրումն է՝ $t = cosx$, հետևաբար՝

$$\int sin^3xcos^2xdx = -\int (1 - cos^2x)cos^2xdcosx = -\int (1 - t^2)t^2dt =$$

$$= \int (t^4 - t^2)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + c = \frac{cos^5x}{5} - \frac{cos^3x}{3} + c:$$

գ) Ընդինտեգրալ արտահայտությունն իր նշանը փոխում է $cosx$–ը $(-cosx)$–ով փոխարինելիս: Տեղադրումն է $t = sinx$ (հեշտ է համոզվել, որ կարելի է կատարել նաև $t = cosx$ կամ $t = tgx$ տեղադրումները): Հետևաբար՝

$$\int \frac{cos^3x}{sin^7x}dx = \int \frac{(1-sin^2x)d(sinx)}{sin^7x} = \int \frac{(1-t^2)}{t^7}dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t^7} - \int \frac{dt}{t^5} = -\frac{1}{6}\frac{1}{t^6} + \frac{1}{4}\frac{1}{t^4} + c = -\frac{1}{6}\frac{1}{sin^6x} + \frac{1}{4}\frac{1}{sin^4x} + c:$$

դ) Ընդինտեգրալ արտահայտությունն իր արժեքը չի փոխում $sinx$–ը $(-sinx)$–ով և $cosx$-ը $(-cosx)$–ով փոխարինելիս: Տեղադրումն է $t = tgx$: Այդ դեպքում՝

$$d(tgx) = \frac{dx}{cos^2x}, \quad sin^2x = \frac{tg^2x}{1+tg^2x}, \quad cos^2x = \frac{1}{1+tg^2x}:$$

Հետևաբար՝

$$\int \frac{sin^2x+1}{cos^4x}dx = \int (2t^2+1)\,dt = \frac{2}{3}t^3 + t + c = \frac{2}{3}tg^3x + tgx + c:$$

ե) Այստեղ, կատարելով $t = cosx$ տեղադրում, կստանանք բինոմական դիֆերենցիալից ինտեգրալ՝

$$\int \sqrt[3]{\frac{sin^{11}x}{cos^5x}}dx = -\int t^{-\frac{5}{3}}(1-t^2)^{\frac{4}{3}}dt:$$

Քանի որ $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-\frac{5}{3}+1}{2} + \frac{4}{3} = 1$, ապա վերջին ինտեգրալում կատարելով $1 - t^2 = z^3t^2$ տեղադրում, կստանանք՝

$$\int t^{-\frac{5}{3}}(1-t^2)^{\frac{4}{3}}dt = -\frac{3}{2}\int \frac{z^6}{(1+z^3)^2}dz = -\frac{3}{2}\int \left(1 - \frac{2z^3+1}{(1+z^3)^2}\right)dz =$$

$$= -\frac{3}{2}z + \frac{3}{2}\int \frac{2z^3+1}{(1+z^3)^2}dz:$$

Ստացված (կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակից) ինտեգ-րալը գտնենք Օստրոգրադսկու բանաձևով՝

$$\int \frac{2z^3+1}{(1+z^3)^2}dz = \frac{az^2+bz+c}{1+z^3} + \int \left(\frac{d}{1+z} + \frac{ez+f}{z^2-z+1}\right)dz$$

(հարմարության համար ընդինտեգրալ ֆունկցիան վերլուծե-ցինք պարզագույն կոտորակների գումարի տեսքով): Հեշտ է համոզվել, որ $a=c=0, b=-\frac{1}{3}, d=\frac{4}{9}, e=\frac{-4}{9}, f=\frac{8}{9}$:

Հետևաբար՝

$$\int \frac{2z^3+1}{(1+z^3)^2}dz = -\frac{z}{3(1+z^3)} + \frac{4}{9}\ln|1+z| - \frac{2}{9}\ln(z^2-z+1) +$$

$$+\frac{4}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + c:$$

Այսպիսով՝

$$\int \sqrt[3]{\frac{sin^{11}x}{cos^5x}}dx = -\int (1-t^2)^{\frac{4}{3}}t^{-\frac{5}{3}}dt = \frac{3}{2}\int \frac{z^6}{(1+z^3)^2}dz = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\int \frac{2z^3+1}{(1+z^3)^2}dx$$

$$= \frac{3}{2}z + \frac{z}{2(1+z^3)} - \frac{2}{3}\ln|1+z| + \frac{1}{3}\ln(z^2-z+1) - -\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + c =$$

$$= \frac{3}{2}tg^{\frac{2}{3}}x + \frac{tg^{\frac{2}{3}}x}{2(1+tg^2x)} - \frac{2}{3}\ln\left(1+tg^{\frac{2}{3}}x\right) +$$

$$+\frac{1}{3}\ln\left(tg^{\frac{4}{3}}x - tg^{\frac{2}{3}}x + 1\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tg^{\frac{2}{3}}x - 1}{\sqrt{3}} + c:$$

զ) Այստեղ պիտանի է $t = tgx$ տեղադրումը, բայց ավելի դյուրին է օգտվել աստիճանի իջեցման մեթոդից:

$$sin^2xcos^4x = \frac{1}{8}sin^2 2x(1+cos2x) = \frac{1}{8}sin^2 2xcos2x + \frac{1}{16}(1-cos4x):$$

Հետևաբար՝

$$\int sin^2x\,cos^4xdx = \frac{1}{48}sin^3 2x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}sin4x + c:$$

Օրինակ 4.2. Գտնել հետևյալ ինտեգրալները՝

ա) $\int \frac{dx}{3chx+5shx+3}$, բ) $\int \frac{sh^5x}{\sqrt[3]{ch^2x}}dx$, գ) $\int sh^4xch^6xdx$:

Լուծում: ա) Այստեղ կատարենք $t = th\frac{x}{2}$ ընդհանրական տեղադրում: Այդ դեպքում՝

$$shx = \frac{2t}{1-t^2}, chx = \frac{1+t^2}{1-t^2}, dx = \frac{2dt}{1-t^2}:$$

Հետևաբար՝

$$\int \frac{dx}{3chx+5shx+3} = \int \frac{dt}{3+5t} = \frac{1}{5}\ln|3+5t| + c = \frac{1}{5}\ln\left|3+5th\frac{x}{2}\right| + c:$$

դ) Կատարելով $t = chx$ տեղադրում, կստանանք բինոմական դիֆերենցիալից ինտեգրալ՝

$$\int \frac{sh^5x}{\sqrt[3]{ch^2x}}dx = \int t^{-\frac{2}{3}}(t^2-1)^2dx:$$

Քանի որ $p = 2$ ամբողջ է, ապա կստանանք՝

$$\int \frac{sh^5x}{\sqrt[3]{ch^2x}}dx = \int \left(t^{\frac{10}{3}} - 2t^{\frac{4}{3}} + t^{-\frac{2}{3}}\right)dt = \frac{3}{13}t^{\frac{13}{3}} - \frac{6}{7}t^{\frac{7}{3}} - 3t^{\frac{1}{3}} + c =$$

$$= \frac{3}{13}ch^{\frac{13}{3}}x - \frac{6}{7}ch^{\frac{7}{3}}x - 3ch^{\frac{1}{3}}x + c:$$

գ) Այստեղ պիտանի է $t = thx$ տեղադրումը, բայց ավելի դյուրին է օգտվել աստիճանի իջեցման մեթոդից՝

$$sh^4xch^6x = \frac{1}{32}sh^4 2x(1 + ch2x) =$$

$$= \frac{1}{32}sh^4 2xch2x + \frac{1}{128}(ch4x - 1)^2 =$$

$$= \frac{1}{32}sh^4 2xch2x - \frac{1}{64}ch4x + \frac{1}{256}ch8x + \frac{3}{256}:$$

Հետևաբար՝

$$\int sh^4xch^6xdx = \frac{1}{320}sh^5 2x - \frac{1}{256}sh4x + \frac{1}{2048}sh8x + \frac{3}{256}x + c:$$

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. В.А.Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х.Сендов, Математический анализ .М: ТК Велби, .Изд-во Проспект.Ч. 1, 2004, 672с.
2. Г.М.Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, 2001. Т.2. 810с.
3. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, Основы математического анализа, ч.1, Учеб. для вузов, 7-е изд. М.: Физматлит, 2005. 648 с.
4. В.А. Зорич, Математический анализ. М.: ФАЗИС; Наука; Ч.1. 1997, 568с.
5. Л.Д. Кудрявцев, Математический анализ, М.: Дрофа, Т.2. 2004, 720с.
6. С.М. Никольский, Курс математического анализа, Т.1. М: Наука. 1983. 461с.
7. Д.А.Райков, Одномерный математический анализ, М: Высшая школа. 1982. 415с.
8. Б.П.Демидович, Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Учеб. пособие. 13-е изд., М.: Изд-во Моск. ун-та, ЧеРо, 1997. 624 с.
9. И.А.Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий, Задачи и упражнения по математическому анализу. Книга 1. М: Высшая школа, 2002. 725с.
10. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехов, М.И. Шабунин, Сборник задач по математическому анализу, Интегралы. Ряды: Учеб. пособие. 2-е изд., перераб. М.: Физматлит, 2003. 504 с.
11. И.А. Марон, Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. М.: Наука, 1970. 400 с.
12. Я.И. Ривкинд, Дифференциальное и интегральное исчисление в задачах. Высшая школа. Минск.1971. 192с.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Լուսինե Գուրգենի Ղուլղազարյան

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Гулгазарян Лусине Гургеновна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекции по теме "Неопределенный интеграл" курса "Математический анализ" предусмотренные для студентов очного и заочного отделений педагогических университетов, могут использоваться также в технических вузах и на факультетах естественных наук, где преподают "Математический анализ". В пособии после каждого теоретического материала рассмотрено множество решеных примеров.

Лекции также могут быть полезны для учителей преподающих математику в старшей школе с естественно-математическим уклоном.

Lusine Gurgen Ghulghazaryan

MATHEMATICAL ANALYSIS

INDEFINITE INTEGRAL

Lecture notes on "Indefinite Integral" of the course "Mathematical Analysis" for full-time and extramural departments' students of pedagogical universities. They can also be used at technical universities and faculties of natural sciences for teaching "Mathematical Analysis". A number of resolved problems are given for every theoretical material in the guide.

Lectures can also be used by teachers for teaching mathematics at high schools with natural-mathematical grades.

Ստորագրված է տպագրության՝ 19.05.2017
Թուղթը՝ «օֆսեթ»: Տպագրությունը՝ ռիզո, Ֆորմատ՝ (60x84) 1/16:
Շարվածքը՝ համակարգչային:
Տառատեսակը՝ Sylfaen: 3.75 տպ. մամ.:
Պատվեր՝227: Տպաքանակ՝ 100

Հայաստանի Ազգային Պոլիտեխնիկական Համալսարանի տպարան
Երևան, Տերյան 105 Հեռ.՝ 52-03-56

Типография Национального Политехнического Университета Армении
Ереван, ул. Теряна 105 Тел.: 52-03-56