

И. И. ОЛЬХОВСКИЙ

КУРС
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКИ
ДЛЯ ФИЗИКОВ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ДОПОЛНЕННОЕ И ПЕРЕРАБОТАННОЕ

Допущено Министерством высшего
и среднего специального
образования СССР
в качестве учебника для студентов вузов,
обучающихся по специальности «Физика»

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
1978

Рецензенты:

Кафедра электродинамики и квантовой теории поля
и кафедра теоретической физики
Томского университета.

И. И. Ольховский.

Курс теоретической механики для физиков. М., Изд-во
Моск. ун-та, 1978 г.

575 с., 127 ил. Библиогр. 66 назв.

Книга содержит систематическое изложение теоретической механики и основ механики сплошных сред. Большое внимание уделено фундаментальным понятиям и законам механики Ньютона — Галилея, законам изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии, уравнениям Лагранжа, Гамильтона и Гамильтона — Якоби для класса обобщенно-потенциальных сил, а также законам механики сплошных сред, на единой основе которых рассматриваются идеальная и вязкая жидкости, упругое тело. В книге подробно излагаются: задача двух тел и классическая теория рассеяния, законы изменения импульса, кинетического момента и энергии относительно неинерциальных систем отсчета, теория линейных колебаний систем под действием потенциальных, гироскопических и диссипативных сил, метод Крылова — Боголюбова для слабо нелинейных систем, методы усреднения уравнений движения. Книга содержит большое количество примеров, интересных для физиков, в частности рассматриваются примеры на движения зарядов в заданных электромагнитных полях, задачи на рассеяние частиц, колебания молекул, нелинейные колебания, колебания систем с медленно меняющимися параметрами, примеры из магнитогидродинамики. Книга рассчитана на студентов и аспирантов физических специальностей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию	6
ЧАСТЬ I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА	7
ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ	
§ 1.1. Понятия о материальной точке, о пространстве и времени	8
§ 1.2. Понятия о силе и массе	26
§ 1.3. Понятие об инерциальной системе отсчета и законы Ньютона. Принцип относительности Галилея	35
§ 1.4. Решение уравнений движения и начальные условия	41
ГЛАВА II. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА, КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА И ЭНЕРГИИ	
§ 2.1. Законы изменения и сохранения импульса и момента импульса материальной точки	60
§ 2.2. Законы изменения и сохранения энергии материальной точки	65
§ 2.3. Движение в центрально-симметричном поле	77
§ 2.4. Движение под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра силы. Законы Кеплера	82
§ 2.5. Движение центра масс; законы изменения и сохранения импульса системы	94
§ 2.6. Законы изменения и сохранения кинетического момента системы	102
§ 2.7. Законы изменения и сохранения энергии системы	106
ГЛАВА III. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ И ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ ЧАСТИЦ	
§ 3.1. Задача двух тел	114
§ 3.2. Упругое рассеяние частиц	121
§ 3.3. Поперечные сечения рассеяния	139
ГЛАВА IV. ДВИЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА	
§ 4.1. Положение системы отсчета	150
§ 4.2. Поступательное движение и изменение ориентации системы отсчета	154
§ 4.3. Общий случай движения системы отсчета	162
§ 4.4. Положение, скорость и ускорение материальной точки относительно разных систем отсчета	165
§ 4.5. Уравнение движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета; силы инерции	171
§ 4.6. Законы изменения кинетического момента и кинетической энергии относительно поступательно движущейся системы центра масс	180

§ 4.7. Законы изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии относительно произвольных неинерциальных систем отсчета	186
--	-----

ГЛАВА V. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

§ 5.1. Основная задача динамики несвободной системы и понятие о связях	197
§ 5.2. Действительные, возможные и виртуальные перемещения; идеальные связи	201
§ 5.3. Уравнения Лагранжа с реакциями связей; законы изменения импульса, кинетического момента и энергии для систем со связями	206
§ 5.4. Уравнения Лагранжа в независимых координатах и общее уравнение механики; циклические координаты и симметрия силового поля и связей	214
§ 5.5. Структура уравнений движения в независимых координатах и функция Лагранжа	229
§ 5.6. Законы сохранения обобщенного импульса и обобщенной энергии	237
§ 5.7. Ковариантность уравнений Лагранжа в независимых координатах	248

ГЛАВА VI. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 6.1. Собственные одномерные колебания	253
§ 6.2. Положение устойчивого равновесия	262
§ 6.3. Собственные и главные колебания системы под действием потенциальных сил	270
§ 6.4. Собственные колебания системы под действием потенциальных, гироскопических и диссипативных сил	289
§ 6.5. Вынужденные колебания	300

ГЛАВА VII. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 7.1. Собственные колебания и метод Крылова — Боголюбова	311
§ 7.2. Вынужденные колебания и резонанс	320
§ 7.3. Метод усреднения	331

ГЛАВА VIII. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 8.1. Уравнения движения твердого тела	338
§ 8.2. Тензор инерции	348
§ 8.3. Плоскопараллельное движение твердого тела	357
§ 8.4. Движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Уравнения Эйлера	367
§ 8.5. Линейные неголономные связи	379

ГЛАВА IX. УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА

§ 9.1. Канонические уравнения	384
§ 9.2. Фазовое пространство и теорема Лиувилля	389
§ 9.3. Скобки Пуассона	394
§ 9.4. Уравнение Гамильтона — Якоби	399
§ 9.5. Метод разделения переменных	407
§ 9.6. Движение материальной точки и волновой процесс	415
§ 9.7. Интегральный инвариант Пуанкаре — Картана	419
§ 9.8. Канонические преобразования	427
§ 9.9. Переменные «действие — угол» и адиабатические инварианты	438
§ 9.10. Уравнения движения и интегральные вариационные принципы	449

ГЛАВА X. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ
СПЛОШНЫХ СРЕД

§ 10.1.	Физически бесконечно малая частица	459
§ 10.2.	Деформация малой частицы	461
§ 10.3.	Законы сохранения массы, изменения импульса и кинетического момента	470
§ 10.4.	Уравнение изменения кинетической энергии. Законы термодинамики	475

ГЛАВА XI. ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ

§ 11.1.	Уравнения движения идеальной жидкости	482
§ 11.2.	Основные теоремы динамики идеальной жидкости	487
§ 11.3.	Потоки импульса и энергии	494
§ 11.4.	Несжимаемая жидкость	496
§ 11.5.	Звуковые волны	504
§ 11.6.	Ударные волны	511
§ 11.7.	Магнитогидродинамика идеальной жидкости	515

ГЛАВА XII. ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ

§ 12.1.	Тензор напряжений и уравнения движения	522
§ 12.2.	Уравнение Навье — Стокса	525
§ 12.3.	Малые колебания	537
§ 12.4.	Магнитогидродинамика вязкой жидкости	541

ГЛАВА XIII. ИДЕАЛЬНО УПРУГОЕ ТЕЛО

§ 13.1.	Закон Гука и уравнения изменения импульса	546
§ 13.2.	Равновесие изотропных тел	553
§ 13.3.	Упругие волны	561

Литература	565
Предметный указатель	567

Отличия предлагаемого издания «Курса теоретической механики для физиков» от второго издания этого учебника обусловлены изменением программы курса, принципы совершенствования которой были доложены автором на IV Всесоюзном съезде по теоретической механике. В связи с этим, в частности, опущен материал, посвященный распаду частиц, и в то же время за счет изложения метода усреднения расширена глава, в которой рассматриваются нелинейные колебания.

При работе над третьим изданием «Курса» автор также учитывал появление учебного пособия «Задачи по теоретической механике для физиков» (И. И. Ольховский, Ю. Г. Павленко, Л. С. Кузьменков. М., Изд-во Моск. ун-та, 1977). Этот сборник задач полностью соответствует «Курсу» (ч. I) и дополняет учебник большим числом задач. По мнению автора, «Курс» и «Задачи» следует использовать, по существу, как единое учебное пособие с целью глубокого освоения теоретической механики — одной из фундаментальных естественно-научных дисциплин.

Автор приносит глубокую благодарность В. Г. Багрову за неизменную поддержку в работе по совершенствованию «Курса»; многие ценные советы и полезные замечания. Автор искренне благодарен всем, кто принимал участие в обсуждениях этого учебника на учебных советах, кафедрах и совещаниях. Автор также благодарен В. Л. Экеклеяну и Н. М. Садыкову за помощь в подготовке третьего издания к печати.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую признательность переводчику Е. Богдановичу и коллективу Гос. Научного Издательства ПНР, которые успешно подготовили и издали эту книгу на польском языке

И. И. Ольховский

ЧАСТЬ I

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ

Все известные нам материальные объекты: поля, элементарные частицы, атомы, молекулы, неживые и живые тела — движутся в самом общем смысле этого слова, т. е. изменяются вообще*. Наиболее простой формой движения тел является их перемещение относительно друг друга. Любая другая форма движения, будучи связанной с каким-либо перемещением, не исчерпывается этим перемещением и является более сложной.

«Само собой разумеется, что изучение природы движения должно было исходить от... простейших форм его... И, действительно, мы видим, что в историческом развитии естествознания раньше всего разрабатывается теория простого перемещения, механика небесных тел и земных масс»**. Эта теория называется классической механикой. В ней рассматриваются движения макроскопических тел, т. е. тел, состоящих из большого количества атомов и молекул, причем допускается, что движения совершаются со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. Итак, *классическая механика — это теория достаточно медленных перемещений одних макроскопических тел относительно других****.

Основными понятиями классической механики являются понятия о пространстве и времени, о силе и массе, об инерциальной системе отсчета. Основными законами являются закон инерции Галилея — Ньютона (первый закон Ньютона), уравнение движения относительно инерциальной системы отсчета (второй закон Ньютона), закон равенства действия и противодействия (третий закон Ньютона). Эти понятия и законы были сформулированы И. Ньютоном в его гениальном трактате «Математические начала натуральной философии» (1687).

* О движении как изменении вообще см.: Энгельс Ф. Диалектика природы. М., Политиздат, 1965, с. 50, 214.

** Там же, с. 50.

*** В некоторых частных случаях классическая механика описывает также движение микрочастиц.

С точки зрения современного состояния науки взаимодействие тел осуществляется посредством полей и передается с конечной скоростью — со скоростью света; совокупность тел и полей представляет собой единую материальную систему. Под влиянием взаимодействия тела могут изменять свое расположение относительно друг друга, т. е. перемещаться в пространстве. Вместе с тем изменение относительного расположения обладает длительностью, т. е. перемещение происходит не только в пространстве, но и во времени. Однако пространство и время не являются объектами, подобными телам, полям и т. д. *Пространство и время представляют собой общие формы существования всех материальных объектов.* Энгельс подчеркивал, что «...обе эти формы существования материи без материи суть ничто, пустые представления, абстракции, существующие только в нашей голове»*. Создание общей теории относительности подтвердило правильность такого представления о пространстве и времени. По мнению Эйнштейна, основателя общей теории относительности, если бы исчезла материя, то исчезли бы и пространство и время.

Классическая механика изучает такие перемещения тел в пространстве и времени, при которых процесс передачи взаимодействия тел можно считать практически мгновенным; тем самым процессы, протекающие в самих полях, мы можем не рассматривать. Несмотря на это ограничение, область применимости классической механики очень велика (скорости тел должны быть малыми по сравнению со скоростью света). Отметим также, что большое количество понятий и аналитических приемов классической механики с успехом используется в других разделах теоретической физики.

§ 1.1. Понятия о материальной точке, о пространстве и времени

Реальные движения тел настолько сложны, что, изучая их, нужно отвлекаться от несущественных (для рассматриваемого движения) деталей. С этой целью используются понятия, применимость которых зависит от того, какое именно движение тел изучается. Среди этих понятий большое значение имеет понятие о материальной точке. *Материальной точкой называется тело исчезающе малых размеров; в задачах механики о движении реальных тел понятие материальной точки применимо к такому телу, размерами которого можно пренебречь по сравнению с размерами, характеризующими движение этого тела.* Например, изучая движение Земли вокруг Солнца, и Землю и Солнце можно считать материальными точками, хотя радиус Земли примерно $6 \cdot 10^6$ м, а радиус Солнца $7 \cdot 10^8$ м. Дело в том, что эти размеры

* Энгельс Ф. Диалектика природы. М., Политиздат, 1965, с. 203.

весьма малы по сравнению с расстоянием между центрами Солнца и Земли, составляющим примерно $1,5 \cdot 10^{11}$ м. В другом случае, при изучении вращения Земли вокруг своей оси, представление о Земле как о материальной точке неприменимо. Действительно, максимальным размером, характеризующим это движение, является длина окружности, по которой движется какая-либо точка поверхности Земли, находящаяся на экваторе. Очевидно, что радиусом Земли нельзя пренебречь по сравнению с указанной длиной.

Совокупность нескольких тел, каждое из которых можно считать материальной точкой, называют системой материальных точек. Например, нашу Галактику можно представлять как систему очень большого числа материальных точек-звезд; в ряде задач газ, состоящий из молекул, также можно представлять себе как систему большого числа материальных точек-молекул. Из приведенных примеров и из определения материальной точки видно, что это понятие не связано с представлением об атомистическом строении вещества.

Важную роль в механике играет понятие абсолютно твердого тела, или, кратко говоря, твердого тела. *Так называется система материальных точек, расстояния между которыми не изменяются при произвольных перемещениях этой системы.* Конечно, размеры реальных тел остаются практически неизменными либо в определенных условиях, либо в течение определенных интервалов времени. Например, годовое угловое смещение большинства звезд составляет примерно $0'',01$. Следовательно, система Солнце — «неподвижные» звезды может быть принята с известной степенью точности за твердое тело, причем для сравнительно длительных интервалов времени.

При изучении взаимного расположения материальных точек первостепенное значение имеет определение расстояний между ними с помощью эталона длины. Расстояние между точками будет определяться при этом тем числом, которое показывает, сколько раз эталон длины «укладывается» на отрезке прямой, соединяющей точки. До 1960 г. за эталон длины принимался метр — длина некоторого сплошного твердого тела, находящегося в стационарных условиях. Согласно единой международной системе СИ, введенной с 1960 г., за эталон длины принят метр — длина, равная $1\,650\,763,73$ длины волны излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86 (в вакууме). Этот эталон обеспечивает большую точность измерений по сравнению со старым эталоном.

Рассмотрим движение некоторой системы A материальных точек относительно системы S . Пусть для данных перемещений системы A систему S можно считать твердым телом. Тогда с телом S можно жестко связать систему отсчета, т. е. три

единичных некопланарных вектора \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z , имеющих общее начало в некоторой точке O этого тела (для определенности будем считать выбранный базис ортогональным и правовинтовым — см. рис. 1.1). Положение любой материальной точки системы A относительно выбранной системы отсчета S зададим радиусом-вектором \mathbf{r} этой точки*. Разложив вектор \mathbf{r} по трем осям Ox , Oy , Oz , которые определяются ортами \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z , получим

$$\mathbf{r} = x\mathbf{n}_x + y\mathbf{n}_y + z\mathbf{n}_z, \quad (1.1)$$

где x , y , z — проекции радиуса-вектора на указанные оси. Таким образом, при определении положения материальной точки ей ста-

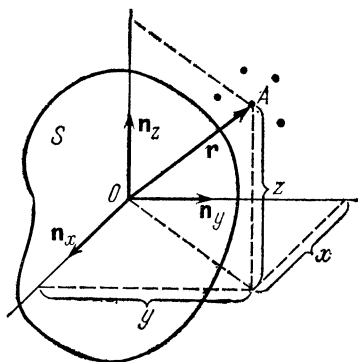


Рис. 1.1

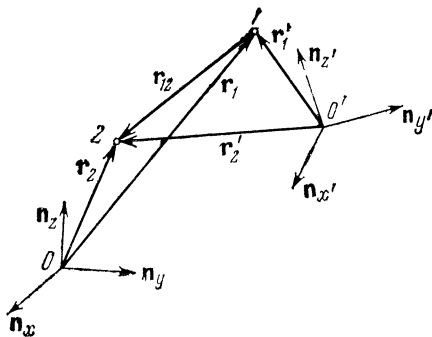


Рис. 1.2

вятся во взаимнооднозначное соответствие три вещественные координаты x , y , z , называемые декартовыми координатами.

Заметим, что в формуле (1.1) неявно пренебрегается влиянием процесса измерения положения точки на само положение. Это допущение оправдывается при рассмотрении движений макроскопических тел; для атомных явлений эта привычная гипотеза неверна.

Чтобы определить положение всех точек системы A относительно системы S , нужно задать радиусы-векторы этих точек. Пусть система A состоит из N материальных точек. Тогда аналогично (1.1)

$$\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{n}_x + y_i\mathbf{n}_y + z_i\mathbf{n}_z \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1.2)$$

* В дальнейшем, вместо того чтобы говорить «точка находится в положении, задаваемом радиусом-вектором \mathbf{r} », мы будем для краткости говорить: «точка находится в положении \mathbf{r} ».

где \mathbf{r}_i — радиус-вектор i -той точки, а x_i, y_i, z_i — декартовы координаты i -той точки.

Приведем пример системы отсчета. Для изучения движения планет солнечной системы относительно системы Солнце — звезды можно в течение сравнительно длительного промежутка времени систему Солнце — звезды считать твердым телом. Совмещая начало системы отсчета с центром Солнца и связывая направления декартовых осей с направлениями на определенные звезды, получим гелиоцентрическую систему отсчета Коперника.

Рассмотрим свойства пространства, для чего возьмем любые две точки 1 и 2. Положения этих точек относительно некоторой системы S зададим радиусами-векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 :

$$\mathbf{r}_1 = x_1 \mathbf{n}_x + y_1 \mathbf{n}_y + z_1 \mathbf{n}_z,$$

$$\mathbf{r}_2 = x_2 \mathbf{n}_x + y_2 \mathbf{n}_y + z_2 \mathbf{n}_z.$$

Вектор, проведенный от точки 1 к точке 2, равен

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

(здесь и в дальнейшем порядок индексов 1 и 2 соответствует направлению вектора от точки 1 к точке 2), а расстояние между этими точками равно модулю вектора r_{12} , т. е.

$$r_{12} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}. \quad (1.3)$$

На основании опыта с макроскопическими телами, скорости которых достаточно малы, можно утверждать, что *величина данного пространственного интервала относительно разных произвольно движущихся систем отсчета — одна и та же в данный момент времени*. Запишем это важнейшее утверждение аналитически, для чего возьмем две системы отсчета: систему S с началом в точке O и осями $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$ и систему S' с началом в O' и осями $\mathbf{n}_{x'}, \mathbf{n}_{y'}, \mathbf{n}_{z'}$ (рис. 1.2). Расстояние между точками 1 и 2 относительно системы S равно r_{12} . Расстояние между этими же точками относительно системы S' равно

$$r'_{12} = |\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1|,$$

где

$$\mathbf{r}'_2 = x'_2 \mathbf{n}_{x'} + y'_2 \mathbf{n}_{y'} + z'_2 \mathbf{n}_{z'},$$

$$\mathbf{r}'_1 = x'_1 \mathbf{n}_{x'} + y'_1 \mathbf{n}_{y'} + z'_1 \mathbf{n}_{z'}.$$

Утверждается, что, как бы ни двигалась «штрихованная» система отсчета относительно «нештрихованной», расстояния r_{12} и r'_{12} , взятые в один и тот же момент времени, равны между собой, т. е.

$$[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^{1/2} = [(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2]^{1/2}; \quad (1.4)$$

здесь $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ и т. д. Из постулата (1.4) следует, что проекции вектора \mathbf{r}'_{12} на оси S' и проекции вектора \mathbf{r}_{12} на оси S связаны между собой ортогональным преобразованием, а именно преобразованием

$$\begin{aligned} \Delta x' &= a_{x'x} \Delta x + a_{x'y} \Delta y + a_{x'z} \Delta z, \\ \Delta y' &= a_{y'x} \Delta x + a_{y'y} \Delta y + a_{y'z} \Delta z, \\ \Delta z' &= a_{z'x} \Delta x + a_{z'y} \Delta y + a_{z'z} \Delta z, \end{aligned} \quad (1.4')$$

где коэффициенты $a_{i'j}$ подчинены условиям ортогональности

$$\begin{aligned} a_{x'x}^2 + a_{y'x}^2 + a_{z'x}^2 &= 1, & a_{x'x}a_{x'y} + a_{y'x}a_{y'y} + a_{z'x}a_{z'y} &= 0, \\ a_{x'y}^2 + a_{y'y}^2 + a_{z'y}^2 &= 1, & a_{x'x}a_{x'z} + a_{y'x}a_{y'z} + a_{z'x}a_{z'z} &= 0, \\ a_{x'z}^2 + a_{y'z}^2 + a_{z'z}^2 &= 1, & a_{x'y}a_{x'z} + a_{y'y}a_{y'z} + a_{z'y}a_{z'z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4'')$$

и равны косинусам углов между оортами S' и S (например, $a_{x'x}$ — это косинус угла между $\mathbf{n}_{x'}$ и \mathbf{n}_x).

Как известно, пространства, в которых расстояния между любыми двумя точками определяются формулой (1.3), называются евклидовыми. Таким образом, из постулата (1.4), основанного на опыте, следует, что *пространства в классической механике — это евклидовы пространства* *.

Преобразование (1.4') нетрудно представить в форме

$$\mathbf{r}'_{12} = \mathbf{r}_{12}, \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_{12} &= \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 = (\Delta x') \mathbf{n}_{x'} + (\Delta y') \mathbf{n}_{y'} + (\Delta z') \mathbf{n}_{z'}, \\ \mathbf{r}_{12} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (\Delta x) \mathbf{n}_x + (\Delta y) \mathbf{n}_y + (\Delta z) \mathbf{n}_z, \end{aligned} \quad (1.5')$$

а орты системы S связаны с оортами S' следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_x &= a_{x'x} \mathbf{n}_{x'} + a_{y'x} \mathbf{n}_{y'} + a_{z'x} \mathbf{n}_{z'}, \\ \mathbf{n}_y &= a_{x'y} \mathbf{n}_{x'} + a_{y'y} \mathbf{n}_{y'} + a_{z'y} \mathbf{n}_{z'}, \\ \mathbf{n}_z &= a_{x'z} \mathbf{n}_{x'} + a_{y'z} \mathbf{n}_{y'} + a_{z'z} \mathbf{n}_{z'}. \end{aligned} \quad (1.5'')$$

* Ньютон подчеркивал: «... самое проведение прямых линий и кругов, служащее основанием геометрии, в сущности относится к механике. Геометрия не учит тому, как проводить эти линии, но предполагает (постулирует) выполнение этих построений». «Итак, геометрия основывается на механической практике» (из предисловия Ньютона к первому изданию «Математических начал», см. [3]).

Из (1.5) вытекает простое, но очень важное *соотношение радиус-векторов одной и той же точки относительно разных систем отсчета*. Пусть \mathbf{r}_0 — радиус-вектор начала системы S' относительно системы S , \mathbf{r} — радиус-вектор точки относительно системы S , а \mathbf{r}' — радиус-вектор той же точки относительно S' . Тогда, полагая $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}'$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}'_1 = 0$, из (1.5) получим

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'. \quad (1.6)$$

Подчеркнем еще раз, что соотношения (1.5) и (1.6) справедливы только в классической механике. Если же скорости тел не пренебрежимо малы по сравнению со скоростью света, то эти «очевидные» постулаты становятся неверными. Движение тел с любыми скоростями (в том числе сравнимыми со скоростью света) рассматриваются в релятивистской механике Эйнштейна.

Важную роль в механике играет понятие *периодического процесса*, т. е. регулярно повторяющегося явления. Например, такими процессами являются колебания маятника, вращение Земли вокруг своей оси, движение Земли по орбите вокруг Солнца. Тело, с помощью которого осуществляется периодический процесс, может служить часами, а длительность периода — эталонным временем. Конечно, длительность периода реального периодического процесса постоянна лишь с определенной степенью точности. До 1960 г. эталоном времени служила определенная часть средних солнечных суток. Но ввиду экспериментально доказанной (с помощью атомных часов) неравномерности вращения Земли, а также изменений среднего тропического года, за эталон времени в системе СИ принята секунда — длительность, равная $1/31\,556\,925,9747$ части тропического года для 1900 г., января 0, в 12 часов эфемеридного времени (см. [41, гл. II]).

В классической механике постулируется *существование таких часов, длительность периода которых не изменяется при произвольных перемещениях этих часов*. Такие часы позволяют измерить длительность различных процессов в любых системах отсчета и установить, что *величина данного временного интервала относительно разных произвольно движущихся систем отсчета одинакова*, т. е.

$$t_{12} = t'_{12}; \quad (1.7)$$

здесь $t_{12} = t_2 - t_1$ — длительность определенного процесса относительно системы S , $t'_{12} = t'_2 - t'_1$ — длительность того же процесса относительно системы S' . Кроме того, предполагается, что измерение длительности некоторого процесса можно провести, не влияя на саму длительность.

Согласно (1.7) в любых системах отсчета можно произвольно выбирать одно и то же начало отсчета времени и тем самым ввес-

ти одну временную «координату» t . Постулат (1.7), как и постулат (1.5), справедлив, пока скорости движения макроскопических тел пренебрежимо малы по сравнению со скоростью света*.

Используя рассмотренные понятия и постулаты, можно экспериментально определить закон движения материаль-

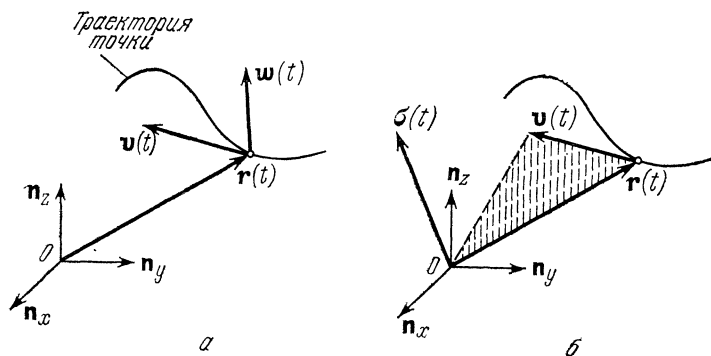


Рис. 1.3

ной точки, т. е. определить положение материальной точки в любой момент времени относительно данной системы отсчета S и задать его с помощью радиуса-вектора точки как функции времени

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (1.8)$$

Конец этого радиуса-вектора описывает в пространстве кривую, называемую траекторией точки.

Заметим, что в классической механике постулируется непрерывность как координат, так и времени; тем самым постулируется непрерывность функции (1.8).

Скоростью точки относительно системы отсчета S называется отношение бесконечно малого приращения $d\mathbf{r}$ радиуса-вектора точки к бесконечно малому интервалу времени dt , за который происходит указанное изменение радиуса-вектора. Приращение $d\mathbf{r}$ есть приращение относительно системы S , орты которой жестко скреплены с телом S . В связи с этим *скорость точки v от-*

* Утверждения (1.5) и (1.7) по существу использовались Ньютоном. Однако Ньютон возвел их в абсолютные постулаты и тем самым пришел к представлениям о времени и пространстве как о «пустых» вместилищах тел и событий. Ньютон писал: «Длительность или продолжительность существования вещей одна и та же, быстры ли движения (по которым измеряется время), медленны ли, или их совсем нет ...» и «Как неизменен порядок частей времени, так неизменен и порядок частей пространства» [3].

носителем системы S равняется производной радиуса-вектора по времени при постоянных ортах $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$ (рис. 1.3,а) *:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}, \quad (1.9)$$

где $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

Ускорение точки \mathbf{w} относительно системы S определяется как первая производная скорости по времени при постоянных ортах $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$. Учитывая (1.9), ускорение можно также записать в виде второй производной от \mathbf{r} по времени. Таким образом,

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}, \quad (1.10)$$

где $\dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, $\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$.

В ряде задач используется понятие секторной скорости точки σ , по определению равной

$$\sigma = \frac{1}{2} [\mathbf{r}\mathbf{v}]. \quad (1.11)$$

Величина $\frac{1}{2} |[\mathbf{r}d\mathbf{r}]|$ равна площади, очерчиваемой радиусом-вектором при элементарном перемещении точки на $d\mathbf{r}$. Следовательно, модуль секторной скорости равен скорости, с которой изменяется площадь, очерчиваемая радиусом-вектором точки (рис. 1.3, б). Иногда также рассматривают секторное ускорение $\dot{\sigma}$.

Радиусы-векторы точек, их скорости и ускорения задают с помощью различных координат.

В декартовых координатах радиус-вектор точки как функция времени задается тремя координатами $x(t), y(t), z(t)$ как функциями времени. Этот вектор определяет положение точки относительно выбранной системы отсчета S в любой момент времени. Дифференцируя радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ по времени при постоянных ортах $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$, найдем скорость и ускорение точки в виде

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{n}_x + \dot{y}\mathbf{n}_y + \dot{z}\mathbf{n}_z, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{w} = \ddot{x}\mathbf{n}_x + \ddot{y}\mathbf{n}_y + \ddot{z}\mathbf{n}_z. \quad (1.13)$$

Следовательно, проекции скорости и ускорения точки на декартовы оси соответственно равны

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}, & v_y &= \dot{y}, & v_z &= \dot{z}; \\ w_x &= \ddot{x}, & w_y &= \ddot{y}, & w_z &= \ddot{z}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

* Скорость точки \mathbf{v} иногда называется линейной скоростью.

В цилиндрических координатах $\mathbf{r}(t)$ задается скалярными функциями $\rho(t)$, $\varphi(t)$, $z(t)$ (рис. 1.4):

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{n}_\rho + z \mathbf{n}_z, \quad (1.15)$$

где орты цилиндрических координат связаны с ортами декартовых координат соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\rho &= \mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi, \\ \mathbf{n}_\varphi &= -\mathbf{n}_x \sin \varphi + \mathbf{n}_y \cos \varphi, \\ \mathbf{n}_z &= \mathbf{n}_z. \end{aligned} \quad (1.16)$$

При перемещениях точки относительно системы S положение ортов \mathbf{n}_ρ и \mathbf{n}_φ изменяется, а положение ортов \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y и \mathbf{n}_z фикси-

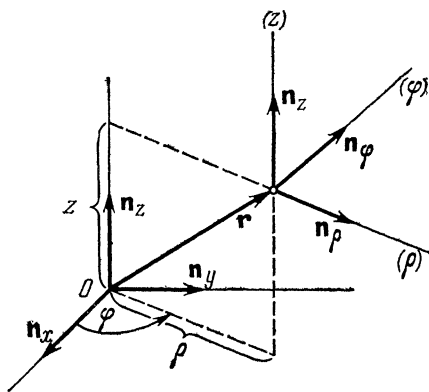


Рис. 1.4

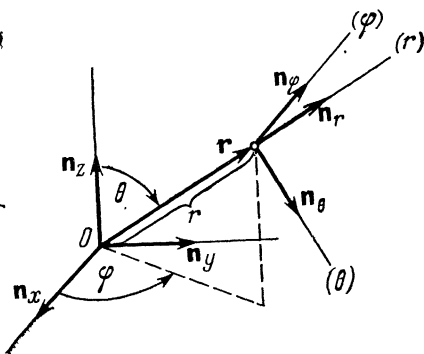


Рис. 1.5

ровано. Учитывая это, в результате дифференцирования \mathbf{r} по времени найдем

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{n}_\rho + \rho \dot{\mathbf{n}}_\rho + \dot{z} \mathbf{n}_z.$$

Замечая далее, что согласно (1.16) $\dot{\mathbf{n}}_\rho = \dot{\varphi} \mathbf{n}_\varphi$, для скорости точки относительно системы S получаем выражение

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \mathbf{n}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{n}_\varphi + \dot{z} \mathbf{n}_z. \quad (1.17)$$

Таким образом, проекции скорости на координатные оси (ρ) , (φ) , (z) оказываются соответственно равными

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}. \quad (1.18)$$

Аналогично, дифференцируя по времени \mathbf{v} и учитывая зависимость \mathbf{n}_ρ и \mathbf{n}_φ от $\varphi(t)$, получим ускорение точки относительно S в виде разложения по ортам цилиндрических координат:

$$\mathbf{w} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\mathbf{n}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})\mathbf{n}_\varphi + \ddot{z}\mathbf{n}_z. \quad (1.19)$$

Следовательно, проекции ускорения на оси (ρ) , (φ) , (z) соответственно равны

$$\omega_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad \omega_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}), \quad \omega_z = \ddot{z}. \quad (1.20)$$

Отметим, что проекция ускорения ω_φ связана с проекцией секторной скорости σ_z соотношением

$$\omega_\varphi = \frac{2}{\rho} \frac{d\sigma_z}{dt}, \quad (1.21)$$

поскольку согласно (1.11), (1.15) и (1.17)

$$\sigma_z = \frac{1}{2} \rho^2\dot{\varphi}. \quad (1.22)$$

В *сферических координатах* радиус-вектор точки задается функциями $r(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ (рис. 1.5). Разложение радиуса-вектора по ортам сферических координат и сами орты определяются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\mathbf{n}_r, \\ \mathbf{n}_r &= (\mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi) \sin \theta + \mathbf{n}_z \cos \theta, \\ \mathbf{n}_\theta &= (\mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi) \cos \theta - \mathbf{n}_z \sin \theta, \\ \mathbf{n}_\varphi &= -\mathbf{n}_x \sin \varphi + \mathbf{n}_y \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Учитывая, что направления ортов \mathbf{n}_r , \mathbf{n}_θ , \mathbf{n}_φ зависят от положения точки, для ее скорости получим выражение*

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{n}_r + r\dot{\theta}\mathbf{n}_\theta + r \sin \theta \cdot \dot{\varphi}\mathbf{n}_\varphi. \quad (1.24)$$

Следовательно, проекции скорости точки на координатные оси (r) , (θ) , (φ) соответственно равны

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r \sin \theta \cdot \dot{\varphi}. \quad (1.25)$$

Иногда используется *естественное задание* движения точки, при котором в качестве аргумента радиуса-вектора точки берется

* Проекция ускорения в сферических координатах будут получены более простым способом на с. 228.

длина s дуги траектории, а сама длина дуги задается как функция времени:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad s = s(t) \quad (1.26)$$

(длина дуги отсчитывается от начального положения точки в направлении ее движения).

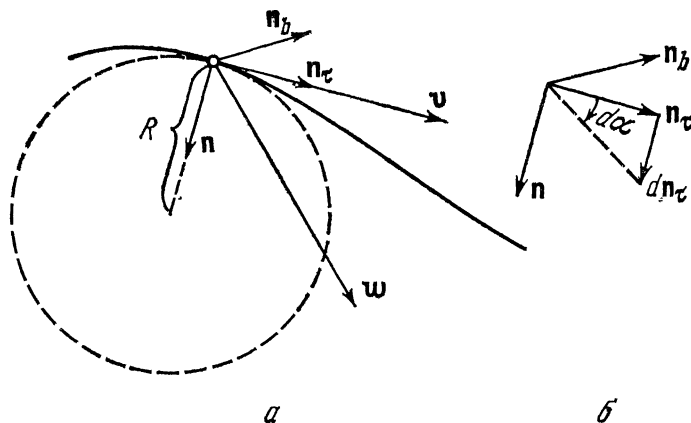


Рис. 1.6

С помощью векторной функции $\mathbf{r}(s)$ в каждой точке траектории можно определить орты, совокупность которых называется естественным трехгранником (рис. 1.6,а). Один из этих ортов \mathbf{n}_τ направляют по приращению $d\mathbf{r}$, определяющему касательную к траектории. Поскольку $|d\mathbf{r}|$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка равен элементу дуги ds , орт

$$\mathbf{n}_\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (1.27)$$

Второй орт \mathbf{n} направляют по приращению $d\mathbf{n}_\tau$, т. е. по главной нормали к траектории*. Используя (1.27), находим

$$\frac{d\mathbf{n}_\tau}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right| \mathbf{n}, \quad (1.28).$$

*Приращение любого вектора \mathbf{a} постоянной длины перпендикулярно самому вектору. В самом деле, дифференцируя обе части равенства $\mathbf{a}^2 = \text{const}$, получим $d\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$, чем и доказывается утверждение.

$$\text{т. е.} \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}. \quad (1.29)$$

Орт \mathbf{n} можно записать с помощью радиуса кривизны траектории R , который определяется как отношение приращения длины дуги ds к $d\alpha$ — углу между \mathbf{n}_τ и $\mathbf{n}_\tau + d\mathbf{n}_\tau$:

$$R = \frac{ds}{d\alpha}. \quad (1.30)$$

Так как \mathbf{n}_τ — единичный вектор, то модуль его приращения $|d\mathbf{n}_\tau|$ с точностью до величины высшего порядка малости равен углу $d\alpha$ (рис. 1.6, б). Поэтому согласно (1.30) и (1.28)

$$R = \frac{1}{\left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|}, \quad (1.31)$$

а орт \mathbf{n} определится выражением

$$\mathbf{n} = R \frac{d\mathbf{n}_\tau}{ds}. \quad (1.32)$$

Третий орт \mathbf{n}_b естественного трехгранника задается с помощью векторного произведения $[\mathbf{n}_\tau, \mathbf{n}]$ и определяет бинормаль к траектории.

Разложение скорости точки по «естественным» ортам получим, используя (1.9), (1.26) и (1.27):

$$\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{n}_\tau, \quad (1.33)$$

где $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$.

Дифференцируя обе части (1.33) по времени, найдем ускорение точки

$$\mathbf{w} = \ddot{s}\mathbf{n}_\tau + \dot{s} \frac{d\mathbf{n}_\tau}{dt}.$$

Замечая, что согласно (1.28) и (1.31)

$$\frac{d\mathbf{n}_\tau}{dt} = \frac{\mathbf{n}}{R} \dot{s},$$

окончательно получим

$$\mathbf{w} = \ddot{s}\mathbf{n}_\tau + \frac{(\dot{s})^2}{R} \mathbf{n}.$$

Учитывая, что $\dot{s} = v$, ускорение точки в естественных координатах можно также представить в виде

$$\mathbf{w} = \dot{v} \mathbf{n}_\tau + \frac{v^2}{R} \mathbf{n}. \quad (1.34)$$

Введенные в этом параграфе понятия и соотношения дают возможность решать кинематические задачи, т. е. задачи, в которых движение описывается вне связи с причинами, вызывающими это движение.

Пример 1.1. Траектория, скорость и ускорение материальной точки в декартовых координатах.

Закон движения точки относительно системы отсчета S имеет вид

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t, \quad z = 0,$$

где a , b и ω — постоянные величины. Найти траекторию, линейную и секторную скорости, а также ускорение точки относительно системы S .

Дифференцируя по времени заданные функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, получим проекции скорости и ускорения точки на декартовы оси

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a\omega \sin \omega t, & \dot{y} &= +b\omega \cos \omega t, & \dot{z} &= 0; \\ \ddot{x} &= -a\omega^2 \cos \omega t, & \ddot{y} &= -b\omega^2 \sin \omega t, & \ddot{z} &= 0. \end{aligned}$$

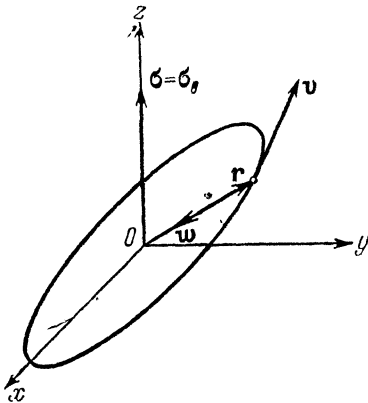


Рис. 1.7

Выражая проекции ускорения через проекции радиуса-вектора, убедимся в том, что ускорение в любой момент времени направлено к началу координат (рис. 1.7):

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y, \quad \ddot{z} = 0,$$

т. е. $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r}$.

Для секторной скорости, используя функции $x(t)$, $y(t)$, $x(t)$, $y(t)$, найдем выражение

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} ab\omega n_z = \\ &= \sigma_0, \end{aligned}$$

где σ_0 — значение секторной скорости в начальный момент времени* ($t=0$). Наконец, исключая t из функций $x(t)$, $y(t)$, получим уравнение траектории

* Здесь и в дальнейшем все величины с индексом «0» являются постоянными.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0.$$

Таким образом, в рассмотренном случае точка движется с постоянной секторной скоростью по эллипсу, лежащему в плоскости $z=0$, причем ускорение все время направлено к центру эллипса.

Пример 1.2. *Траектория, скорость и ускорение материальной точки в цилиндрических координатах.*

Цилиндрические координаты точки при ее движении относительно некоторой системы отсчета S изменяются по закону

$$\rho = \dot{\rho}_0 t + \rho_0, \quad \varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0, \quad z = \dot{z}_0 t + z_0.$$

Найти траекторию, линейную и секторную скорости, а также ускорение точки.

Для простоты рассмотрим три частных случая.

1. Полагая в заданных функциях $\dot{\rho}_0=0$ и исключая из них время, найдем уравнение траектории

$$\rho = \rho_0, \quad \frac{\varphi - \varphi_0}{\dot{\varphi}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0},$$

а используя выражения (1.15), (1.17) и (1.19), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \rho_0 \mathbf{n}_\rho + (\dot{z}_0 t + z_0) \mathbf{n}_z, \\ \mathbf{v} &= \rho_0 \dot{\varphi}_0 \mathbf{n}_\varphi + \dot{z}_0 \mathbf{n}_z, \quad \mathbf{w} = -\rho_0 \dot{\varphi}_0^2 \mathbf{n}_\rho. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что точка движется по винтовой линии (ее шаг равен $2\pi \dot{z}_0 / \dot{\varphi}_0$) с постоянными по абсолютной величине скоростью $v = (\rho_0^2 \dot{\varphi}_0^2 + \dot{z}_0^2)^{1/2}$ и ускорением $w = \rho_0 \dot{\varphi}_0^2$; направлено же ускорение все время к оси цилиндра перпендикулярно к ней (рис. 1.8). Нетрудно убедиться, что модуль и направление секторной скорости в этом случае не сохраняются.

2. Полагая $\dot{\rho}_0=0$ и поступая аналогично предыдущему, найдем

$$\frac{\rho - \rho_0}{\dot{\rho}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0}, \quad \varphi = \varphi_0,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (\dot{\rho}_0 t + \rho_0) \mathbf{n}_\rho + (\dot{z}_0 t + z_0) \mathbf{n}_z, \\ \mathbf{v} &= \dot{\rho}_0 \mathbf{n}_\rho + \dot{z}_0 \mathbf{n}_z, \quad \mathbf{w} = 0, \\ \boldsymbol{\sigma} &= (z_0 \dot{\rho}_0 - \rho_0 \dot{z}_0) \mathbf{n}_\varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, точка движется по прямой с постоянной линейной и секторной скоростями (рис. 1.9).

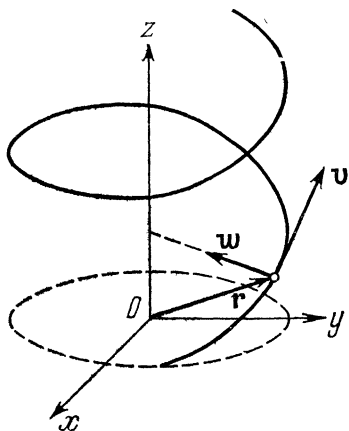


Рис. 1.8

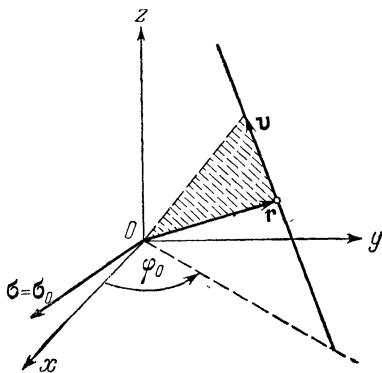


Рис. 1.9

3. Если задать $\dot{z}_0=0$ и, кроме того, положить $\rho_0=0$, $\varphi_0=0$, $z_0=0$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \dot{\rho}_0 t \mathbf{n}_\rho, & \mathbf{v} &= \dot{\rho}_0 \mathbf{n}_\rho + \dot{\rho}_0 \dot{\varphi}_0 t \mathbf{n}_\varphi, \\ \mathbf{w} &= -\dot{\rho}_0 \dot{\varphi}_0^2 t \mathbf{n}_\rho + 2\dot{\rho}_0 \dot{\varphi}_0 \mathbf{n}_\varphi, & \sigma &= \frac{1}{2} \dot{\rho}_0 \dot{\varphi}_0^2 t^2 \mathbf{n}_z. \end{aligned}$$

В этом случае секторная скорость изменяется по величине, но сохраняет свое направление, что обусловлено движением по плоской траектории. Исключая время из функций $\rho = \dot{\rho}_0 t$ и $\varphi = \dot{\varphi}_0 t$, получим уравнение траектории — архимедову спираль

$$\rho = \frac{\dot{\rho}_0}{\dot{\varphi}_0} \varphi$$

(рис. 1.10). Такую кривую описывает точка, движущаяся с постоянной скоростью $\dot{\rho}_0$ вдоль прямой, которая сама вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}_0$.

Пример 1.3. Ускорение точки, движущейся по эллипсу с постоянной относительно фокуса эллипса секторной скоростью.

Из эмпирически установленных двух законов Кеплера известно, что в гелиоцентрической системе отсчета любая планета описывает эллипс с фокусом в центре Солнца, а секторная скорость планеты относительно фокуса постоянна (рис. 1.11)*. Основываясь на этих законах, найти \mathbf{w} — ускорение любой планеты как функцию ее расстояния от Солнца.

Выберем систему координат с учетом характера исследуемого движения. Начало координат поместим в центр Солнца, относи-

* Более подробное обсуждение законов Кеплера см. на с. 87 и 120.

тельно которого секторная скорость постоянна, а одну из осей, например ось Oz , направим перпендикулярно плоскости траектории. На этой плоскости введем полярные координаты; тогда условия задачи можно записать в виде (см. (1.22))

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \sigma = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} = \sigma_0$$

(здесь p — параметр эллипса, ε — его эксцентриситет). Найдем прежде всего проекции скорости v_ρ и v_φ как функции от ρ или φ .

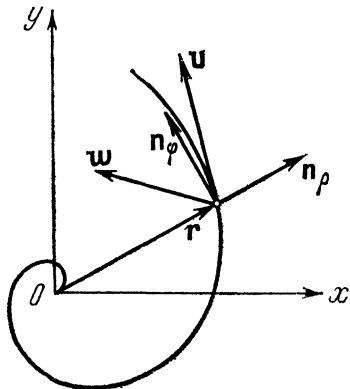


Рис. 1.10

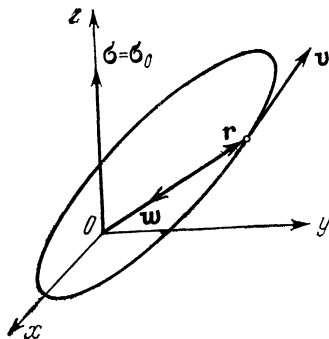


Рис. 1.11

Используя выражение секторной скорости, получим

$$v_\rho = \dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi} \dot{\varphi} = -2\sigma_0 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi} = \frac{2\sigma_0}{\rho};$$

тогда скорость точки как функцию ее положения можно записать в виде

$$\mathbf{v} = 2\sigma_0 \left[-\mathbf{n}_\rho \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \mathbf{n}_\varphi \frac{1}{\rho} \right]. \quad (1)$$

Проекция ускорения ω_φ в силу сохранения σ_z будет равна нулю (см. (1.21)), а значение ω_ρ вследствие того, что

$$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\frac{4\sigma_0^2}{\rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad \rho \dot{\varphi}^2 = \frac{4\sigma_0^2}{\rho^3},$$

будет определяться формулой Бине

$$\omega_\rho = -\frac{4\sigma_0^2}{\rho^2} \left[\frac{1}{\rho} + \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]. \quad (2)$$

Отсюда, используя уравнение эллипса, окончательно получим

$$\omega_p = - \left(\frac{4\sigma_0^2}{\rho} \right) \frac{1}{\rho^2}, \quad \omega_\varphi = 0.$$

Таким образом, исходя из законов Кеплера, приходим к выводу, что ускорение любой планеты обратно пропорционально квадрату расстояния от планеты до Солнца и направлено к центру Солнца (сравните этот результат с законом всемирного тяготения Ньютона (1.49)).

Отметим, что формулы (1) и (2) справедливы для любой плоской траектории, заданной в полярных координатах функцией $\rho(\varphi)$, причем формула (2) верна лишь при условии постоянства секторной скорости.

Пример 1.4. Ускорение точки, движущейся по эллипсу с постоянной относительно центра эллипса секторной скоростью.

Точка движется по эллипсу с полуосями a и b . Ее секторная скорость относительно центра эллипса постоянна. Определить ускорение точки как функцию ее положения.

Совместим начало декартовых координат с центром эллипса, а ось Oz направим перпендикулярно к плоскости траектории (см. рис. 1.7). Тогда оси Ox и Oy можно выбрать так, что траектория точки будет описываться уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Условие постоянства секторной скорости в декартовых координатах имеет вид

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}) = \sigma_0.$$

Дифференцируя левую и правую части уравнения эллипса по времени, вместо исходных уравнений получим систему

$$\begin{aligned} -y\dot{x} + x\dot{y} &= 2\sigma_0, \\ \frac{x}{a^2}\dot{x} + \frac{y}{b^2}\dot{y} &= 0, \end{aligned}$$

из которой находим проекции скорости точки как функции x , y :

$$\dot{x} = -\frac{2\sigma_0}{b^2}y, \quad \dot{y} = +\frac{2\sigma_0}{a^2}x.$$

Отсюда имеем

$$\ddot{x} = -\frac{2\sigma_0}{b^2}\dot{y} = -\frac{4\sigma_0^2}{a^2b^2}x,$$

$$\ddot{y} = + \frac{2\sigma_0}{a^2} \dot{x} = - \frac{4\sigma_0^2}{a^2 b^2} y,$$

т. е.

$$\mathbf{w} = - \frac{4\sigma_0^2}{a^2 b^2} \mathbf{r}.$$

Таким образом, в отличие от предыдущего примера ускорение точки направлено к центру эллипса и пропорционально расстоянию от точки до этого центра.

Пример 1.5. *Определение положения точки по ее скорости.*

Точка движется по плоскости траектории с постоянной секторной скоростью σ_0 . Величина ее линейной скорости обратно пропорциональна расстоянию ρ от точки до некоторого центра, лежащего в плоскости движения $z=0$ и выбранного за начало координат. Найти закон движения точки, ее траекторию и ускорение, если при $t=0$ заданы $\rho=\rho_0$, $v=v_0$ и угол α между радиусом-вектором точки и ее скоростью ($0 < \alpha_0 < \pi/2$).

Выберем полярную ось так, чтобы в начальный момент времени точка была расположена на этой оси. Тогда условия задачи можно записать в виде

$$\rho^2 \dot{\varphi} = 2\sigma_0, \quad v = c/\rho,$$

где $2\sigma_0 = \rho_0 v_0 \sin \alpha_0$, $c = \rho_0 v_0$. Пользуясь тем, что, с одной стороны,

$$v = (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2)^{1/2} = \left(\dot{\rho}^2 + \frac{\rho_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{\rho^2} \right)^{1/2},$$

а с другой стороны, согласно условию $v = \rho_0 v_0 / \rho$, найдем радиальную составляющую скорости как функцию ρ :

$$\dot{\rho} = \pm \frac{\rho_0 v_0 \cos \alpha_0}{\rho}.$$

Так как $0 < \alpha_0 < \pi/2$, то $\dot{\rho}_0 > 0$ и, следовательно, в последнем выражении нужно выбрать знак «плюс». Разделяя в этом выражении переменные ρ и t , в результате интегрирования получим

$$\rho^2 = (2\rho_0 v_0 \cos \alpha_0) t + \text{const},$$

откуда, учитывая начальные условия ($t=0$, $\rho=\rho_0$), окончательно находим

$$\rho^2 = (2\rho_0 v_0 \cos \alpha_0) t + \rho_0^2.$$

Определяя далее $\dot{\varphi}$ из выражения секторной скорости, получим

$$\dot{\varphi} = \frac{\rho_0 v_0 \sin \alpha_0}{\rho_0^2 + (2\rho_0 v_0 \cos \alpha_0) t}.$$

Отсюда интегрированием найдем $\varphi(t)$:

$$\varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{2} \ln \left(1 + \frac{2v_0 \cos \alpha_0}{\rho_0} t \right)$$

(здесь для определения постоянной интегрирования использовано условие: при $t=0$, $\varphi_0=0$). Из функций $\rho(t)$, $\varphi(t)$ исключим t и получим уравнение траектории — логарифмическую спираль

$$\rho = \rho_0 \exp(\operatorname{ctg} \alpha_0 \cdot \varphi).$$

Наконец, зная уравнения орбиты $\rho(\varphi)$ и используя постоянство секторной скорости, находим ускорение точки как функцию ρ (см. формулу Бине на с. 23)

$$\omega_\rho = -\frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho^3}, \quad \omega_\varphi = 0.$$

§ 1.2. Понятия о силе и массе

Рассмотрим движение материальной точки относительно произвольной системы отсчета, предполагая, что начальные условия, т. е. радиус-вектор точки \mathbf{r}_0 и ее скорость \mathbf{v}_0 в начальный момент времени t_0 , могут быть заданы произвольно (такую точку будем называть свободной)*. Пользуясь эталонами длины и времени, можно определить положение, скорость и ускорение точки в любой момент времени. Затем, помещая вблизи точки некоторое тело, можно заметить, что точка приобретает добавочное ускорение, исчезающее по мере удаления тела на бесконечно большое расстояние от точки.

Например, рассмотрим движение материальной точки I вблизи поверхности Земли (рис. 1.12, *a*, на котором плоскость Oxy совпадает с земной поверхностью). Предполагая, что эта точка обладает электрическим зарядом, сравним ее движение в двух случаях: а) в отсутствие каких-либо других тел, б) при наличии заряженного тела.

Пусть в первом случае точка I в начальный момент времени находится в положении \mathbf{r}_{10} и имеет скорость \mathbf{v}_{10} . Определим положение точки, ее скорость и ускорение \mathbf{w}_1 в любой момент времени. Затем исследуем движение той же точки при тех же начальных условиях, поместив вблизи начального положения точки достаточно малое заряженное тело 2 (рис. 1.12, *б*). Измерения покажут, что по сравнению с предыдущим случаем точка приобрела дополнительное ускорение $\mathbf{w}_1^{(2)}$. Результирующее ускорение точки отно-

* Произвольность начальных условий исключает рассмотрение таких случаев движения точки, как, например, движение по поверхностям абсолютно твердых тел и т. п. Теория движения несвободных точек будет изложена в гл. V.

сительно Земли во втором случае будет равно $w_1 + w_1^{(2)}$. Следовательно, другими станут и закон движения точки и ее траектория. Удаляя тело 2 на бесконечно большое расстояние от точки 1, мы убедимся, что $w_1^{(2)}$ исчезает.

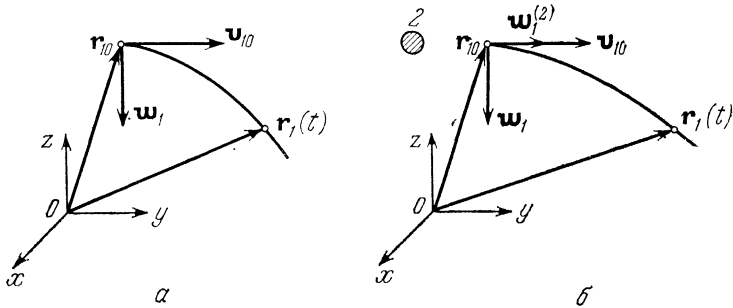


Рис 1.12

Вообще опыт показывает, что в любой системе отсчета любое тело 2 вызывает некоторое ускорение $w_1^{(2)}$ свободной материальной точки 1, причем это ускорение становится исчезающе малым по мере удаления тела на бесконечно большое расстояние от точки, т. е.

$$w_1^{(2)} \rightarrow 0, \text{ если } r_{12} \rightarrow \infty. \quad (1.35)$$

Экспериментальное изучение ускорений, вызываемых у данного тела различными другими телами, приводит к утверждению о независимости этих ускорений друг от друга. Иначе говоря, опыт показывает, что ускорение $w_1^{(2,3)}$, сообщаемое данному телу 1 одновременно двумя любыми телами 2 и 3, равно векторной сумме ускорений $w_1^{(2)}$ и $w_1^{(3)}$, сообщаемых телу 1 телами 2 и 3 каждым в отдельности, т. е.

$$w_1^{(2,3)} = w_1^{(2)} + w_1^{(3)}. \quad (1.36)$$

Убедиться в этом можно, в частности, продолжая только что рассмотренный эксперимент. Как мы видели, под действием заряженного тела 2 заряд 1 приобретает ускорение $w_1^{(2)}$ (рис. 1.12, б). Если же вместо тела 2 вблизи начального положения r_{10} точки поместить достаточно малое заряженное тело 3 (рис. 1.13, а), то оно вызовет другое ускорение точки $w_1^{(3)}$. Наконец, вернув точку 1 в ее начальное положение r_{10} и поместив оба тела одновременно в прежние их положения, указанные на рис. 1.12, б и рис. 1.13, а, обнаружим, что точка приобрела ускорение $w_1^{(2,3)}$ по

сравнению с тем случаем, когда оба тела отсутствуют (рис. 1.13,б). Измерив $w_1^{(2)}$, $w_1^{(3)}$ и $w_1^{(2,3)}$, можно убедиться в справедливости (1.36). Заметим, что утверждение о независимости ускорений имеет место при любом числе воздействующих тел.

Итак, на основании опытов можно сделать вывод о том, что, во-первых, одни тела воздействуют на другие, причем это воздей-

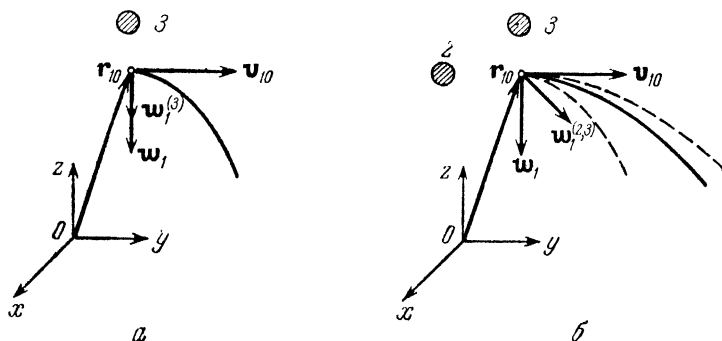


Рис. 1.13

ствие проявляется в приобретении телами ускорений, и, во-вторых, ускорения, сообщаемые разными телами данному телу, независимы. Этот вывод лежит в основе важнейшего понятия механики о силе. Под силой, с которой произвольное тело 2 действует на данную материальную точку 1, понимают такое влияние тела 2 на точку 1, в результате которого точка 1 приобретает ускорение, исчезающее при удалении тела 2 на бесконечно большое расстояние от точки 1. Заметим, что если воздействия одних тел на другие существуют объективно, то введенное в механике понятие о силах отражает эти воздействия лишь с некоторой точностью.

Поскольку сила является причиной ускорения, а ускорение обладает свойствами вектора, то постулируется, что и сила есть вектор, причем направленный так же, как и ускорение, вызываемое этой силой, т. е. постулируется, что

$$\mathbf{F}_{21} \uparrow\uparrow \mathbf{w}_1^{(2)}, \quad (1.37)$$

где \mathbf{F}_{21} — сила, действующая со стороны тела 2 на точку 1, а $\mathbf{w}_1^{(2)}$ — ускорение точки 1, обусловленное действием этой силы.

«Одна из важнейших характеристик силы — ее материальное происхождение», «...говоря о силе, мы всегда неявно предполагаем, что когда нет физических тел, то сила равна нулю» [26, вып. I, с. 210—211]. Это значит, что как ускорение $\mathbf{w}_1^{(2)}$,

так и сила F_{21} стремятся к нулю по мере удаления тела 2 на бесконечно большое расстояние от точки F , т. е.

$$F_{21} \rightarrow 0, \text{ если } r_{21} \rightarrow \infty. \quad (1.38)$$

Так как ускорения, сообщаемые точке различными телами, независимы друг от друга, то в отношении сил, действующих на точку со стороны этих тел, постулируется аналогичное свойство. А именно, полагают, что *сила $F_1^{(2,3)}$, с которой тела 2 и 3 действуют на данную точку 1 одновременно, равна векторной сумме сил F_{21} и F_{31} , действующих на точку 1 со стороны этих тел порознь*, т. е.

$$F_1^{(2,3)} = F_{21} + F_{31}. \quad (1.39)$$

Может случиться, что одновременное действие нескольких тел на материальную точку не изменяет того ускорения точки, которое она имела в отсутствие этих сил. В таком случае сумма сил, действующих на точку со стороны этих тел, и сумма соответствующих ускорений равны нулю:

$$F_1^{(2,3)} = 0, \quad w_1^{(2,3)} = 0. \quad (1.40)$$

Основываясь на (1.36), (1.39) и (1.40), можно производить измерение сил, т. е. их сравнение с силой-эталоном. В качестве силы-эталоны можно взять, в частности, силу, с которой действует на тело прикрепленная к нему одним из концов определенная пружина, растянутая до определенной длины l_{et} . Пусть в результате действия на точку силы-эталоны и некоторого тела 2 (например, произвольной пружины 2) ускорение точки останется таким же, как и в отсутствие эталонной пружины и тела 2 (например, точка остается в покое относительно Земли). Это значит, что

$$w_1^{(\text{et},2)} = w_1^{(\text{et})} + w_1^{(2)} = 0, \quad (1.41)$$

$$F_1^{(\text{et},2)} = F_{\text{et}} + F_{21} = 0,$$

где F_{et} — сила-эталон, а $w_1^{(\text{et})}$ — ускорение точки 1, вызываемое эталонной пружиной. Из (1.41) видно, что $F_{21} = -F_{\text{et}}$, т. е. сила F_{21} оказывается измеренной. Имея несколько одинаковых эталонных пружин и располагая их параллельно или под различными углами, в принципе можно измерить любую силу.

Пользуясь указанным способом измерения сил, эталонами длины и времени, экспериментально устанавливают зависимость сил от различных величин. Приведем ряд исследованных таким образом сил.

Упругая сила, действующая со стороны пружины 2 на тело 1, прикрепленное к ее концу, при достаточно малых удли-

нениях пружины пропорциональна этому удлинению и направлена по прямой, совпадающей с осью пружины (предполагается, что второй конец пружины прикреплен к другому телу):

$$\mathbf{F}_{21} = -\kappa(r_{21} - l) \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}}. \quad (1.42)$$

Здесь $r_{21} = r_1 - r_2$, r_1 — радиус-вектор точки 1 и скрепленного с ней конца пружины, r_2 — радиус-вектор другого конца пружины, l — длина ненапряженной пружины, κ — характеризующая данную пружину положительная константа, называемая жесткостью. Из (1.42) следует, что действующая на точку 1 сила \mathbf{F}_{21} сжатой пружины направлена от конца 2 пружины в сторону точки 1 (в этом случае $r_{21} < l$, т. е. удлинение $r_{21} - l$ отрицательно). Если же пружина растянута ($r_{21} > l$, удлинение положительно), то эта сила направлена от точки 1 в сторону точки 2. Итак, опыт показывает, что абсолютная величина и направление рассмотренной упругой силы зависят лишь от положения точек 1 и 2.

Согласно закону Кулона сила электростатического воздействия заряженной точки 2 на заряженную точку 1 обратно пропорциональна квадрату расстояния между точками и направлена по прямой, соединяющей эти заряды:

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{e_1 e_2}{r_{21}^2} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}}; \quad (1.43)$$

здесь e_1 и e_2 — электрические заряды первой и второй точек соответственно*.

Сила Лоренца \mathbf{F} , действующая на точечный заряд e со стороны электрического и магнитного полей, зависит как от положения заряда, так и от его скорости:

$$\mathbf{F} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathcal{H}]. \quad (1.44)$$

Здесь c — скорость света; $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$ — напряженности соответственно электрического и магнитного полей в точке \mathbf{r} пространства, где находится заряд; \mathbf{v} — скорость заряда. Напомним, что напряженность электрического поля определяется силой, действующей со стороны этого поля на единицу положительного заряда; направление напряженности \mathcal{H} магнитного поля можно определить как такое направление скорости заряда, при котором сила, действующая на заряд в магнитном поле, равна нулю; величину напряженности магнитного поля можно определить как отношение модуля силы, действующей на заряд e со стороны

* Единицу электрического заряда можно выбрать, имея эталоны силы и длины. См., например, [40, с. 20].

магнитного поля, к величине $(e/c)v_{\perp}$, где v_{\perp} — составляющая скорости заряда, перпендикулярная направлению напряженности \mathcal{H} в данной точке пространства (конечно, радиус-вектор \mathbf{r} , скорость \mathbf{v} заряда и напряженности полей должны измеряться в одной и той же системе отсчета) [40, с. 212, 553—554].

Поскольку в классической механике не рассматриваются процессы, происходящие в полях, постольку напряженности полей \mathcal{E} и \mathcal{H} в наших задачах будут считаться заданными функциями радиуса-вектора точки и времени. Например, напряженность электрического поля плоского конденсатора постоянной емкости, к пластинам которого подводится переменное напряжение, изменяющееся со временем по гармоническому закону, вдали от краев пластин с большой степенью точности можно считать равной $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$, где \mathcal{E}_0 — напряженность электрического поля при $t=0$, а ω — частота, с которой изменяется подводимое напряжение. Таким образом, сила, действующая на заряд e со стороны этого поля, будет равна

$$\mathbf{F} = e \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (1.45)$$

Сила сопротивления среды, действующая на осесимметричное твердое тело при его движении в жидкости или газе, зависит от скорости тела относительно среды и направлена противоположно этой скорости (если ось симметрии тела коллинеарна скорости). При достаточно малой скорости эта сила имеет вид

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{v}, \quad (1.46)$$

где k — положительная константа, характерная для данного тела и данной среды, а \mathbf{v} — скорость тела относительно покоящейся на бесконечности среды.

Итак, опыт показывает, что *существует широкий класс сил, явно зависящих от положений и скоростей тела*, а также от некоторых постоянных величин и времени*.

Рассмотрим детальнее соотношение между силой и вызываемым ею ускорением. Исследуем, например, движение материальной точки 1 по горизонтальному идеально гладкому стержню (рис. 1.14,а) под действием прикрепленной к точке пружины 2, навитой на стержень и закрепленной другим концом в точке O стержня (сила, с которой идеально гладкий стержень действует на точку, перпендикулярна к стержню). Если пружина 2 действует на точку с силой (1.42), а стержень неподвижен относительно Земли, то, выбирая систему отсчета S с началом в точке O и осью

* Известна также сила, зависящая от третьей производной координаты по времени. Таковой является сила лучистого трения, с которой электромагнитное излучение заряда тормозит этот заряд.

Ox , направленной по стержню, в результате измерений получим значения ускорений точки 1 , которые аналитически можно представить формулой

$$\mathbf{w}_1^{(2)} = -\omega_1^2(x_1 - l)\mathbf{n}_x,$$

где x_1 — координата точки 1 , а ω_1 — величина, постоянная для данной точки и пружины. Поскольку сила \mathbf{F}_{21} , действующая на точку 1 со стороны пружины, равна $-\kappa(x_1 - l)\mathbf{n}_x$, отношение $F_{21}/w_1^{(2)}$ будет постоянной величиной для данной точки и данной пружины, а именно

$$\frac{F_{21}}{w_1^{(2)}} = \frac{\kappa}{\omega_1^2}.$$

Аналогичные эксперименты, поставленные с другими пружинами 2 , но с тем же телом 1 , показывают, что отношение $F_{21}/w_1^{(2)}$ не зависит от свойств используемой пружины и является постоянным для данного тела.

Если эти эксперименты поставить в условиях, когда стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости Oxy , т. е. вращается относительно системы S (рис. 1.14, б), то измерения покажут, что ускорение \mathbf{w}' точки относительно системы S' , связанной со стержнем, в случае воздействия на точку пружины будет определяться формулой*

$$\mathbf{w}' = \omega^2 x_1' \mathbf{n}_{x'} - \omega_1^2 (x_1' - l) \mathbf{n}_{x'}.$$

Здесь первый член справа равен ускорению точки в отсутствие пружины (рис. 1.14, в), x_1' — координата точки в системе S' , ось Ox' которой направлена по стержню, а начало совпадает с началом системы S , причем величина ω — та же постоянная, что и в экспериментах с неподвижным стержнем.

Сравнивая ускорения точки на вращающемся стержне при наличии пружины и в ее отсутствие, найдем $\mathbf{w}_1^{(2)}$ — ускорение точки, вызываемое пружиной:

* Подробное решение задачи о движении точки на вращающемся стержне приведено на с. 268 в примере 6.5.

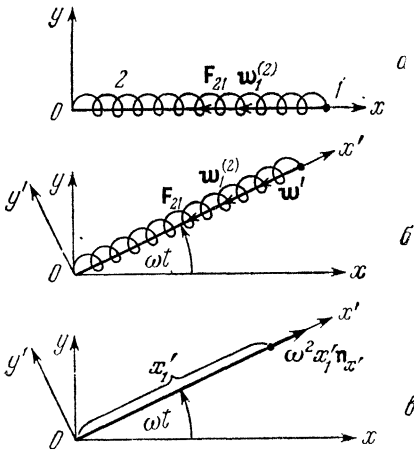


Рис. 1.14

$$\mathbf{w}_1^{(2)} = -\omega_1^2 (x_1' - l) \mathbf{n}_{x'}.$$

Сопоставляя это выражение с силой, действующей со стороны пружины и равной $-\kappa(x_1' - l)\mathbf{n}_{x'}$, убедимся в том, что для *данной* точки отношение силы к вызываемому ускорению в обеих системах отсчета S и S' одинаково.

На основании этих опытов, а также опытов с использованием других сил, приходим к фундаментальному утверждению классической механики: *в любой системе отсчета отношение силы, действующей на некоторую материальную точку, к ускорению точки, вызываемому этой силой, является величиной постоянной для данной материальной точки.* Эту постоянную называют инертной массой или просто массой. Таким образом,

$$\frac{F_{21}}{\omega_1^{(2)}} = m_1, \quad (1.47)$$

где m_1 — *положительная* постоянная — масса точки 1 . Утверждение (1.47) означает независимость массы от того, как движется тело. Это справедливо, однако, для скоростей, малых по сравнению со скоростью света. Если же скорость тела сравнима со скоростью света, то утверждение (1.47) оказывается неверным.

Основываясь на (1.47), можно измерять массы различных тел*. Действительно, выберем за эталон массы массу m_{et} некоторого тела и определим ее как отношение $F_{2,\text{et}}/\omega_{\text{et}}^{(2)}$, где $F_{2,\text{et}}$ — абсолютная величина силы, действующей на тело-эталон со стороны тела 2 , а $\omega_{\text{et}}^{(2)}$ — величина вызываемого этой силой ускорения тела-эталона. Массу тела 1 можно определить, используя воздействие произвольного тела 3 . Тогда отношение массы m_1 к массе-эталону будет равно

$$\frac{m_1}{m_{\text{et}}} = \left(\frac{F_{31}}{\omega_1^{(3)}} \right) / \left(\frac{F_{2,\text{et}}}{\omega_{\text{et}}^{(2)}} \right). \quad (1.48)$$

Пользуясь способом измерения масс, сил и расстояний, можно экспериментально установить закон всемирного тяготения Ньютона, согласно которому *сила гравитационного притяжения двух материальных точек пропорциональна произведению масс этих точек, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по прямой, соединяющей точки.* Из эксперимента находится и коэффициент пропорциональности — гравитационная постоянная γ . Таким образом, сила гравитационного воздействия одной точки на другую равна

$$\mathbf{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \left(\frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}} \right). \quad (1.49)$$

* Об измерении масс см. также с. 34 и 176.

Подчеркнем, что *только гравитационные силы обладают замечательным свойством одинаково ускорять любые тела, помещаемые в данную точку пространства*. Действительно, из (1.49), (1.47) и постулата о том, что $\mathbf{F}_{21} \uparrow \mathbf{w}_1^{(2)}$, видно: ускорение, которое приобретает тело 1 в гравитационном поле тела 2, равно

$$\mathbf{w}_1^{(2)} = -\gamma \frac{m_2}{r_{21}^2} \left(\frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}} \right) \quad (1.50)$$

и *не зависит* от массы m_1 . Следовательно, ускорения двух любых тел 1 и et, находящихся на одинаковых расстояниях от тела 2, равны между собой, т. е.

$$\mathbf{w}_1^{(2)} = \mathbf{w}_{\text{et}}^{(2)}. \quad (1.51)$$

Из (1.49) и (1.51) вытекает, что *отношение сил гравитационного притяжения двух данных тел 1 и et к любому третьему телу 2 (при условии равенства расстояний $r_{21} = r_{2,\text{et}}$) равно отношению масс*:

$$\frac{F_{21}}{F_{2,\text{et}}} = \frac{m_1}{m_{\text{et}}}. \quad (1.52)$$

Это свойство гравитационных сил удобно использовать для измерения масс.

Наряду с определением инертной массы в классической механике имеется определение гравитационной (или тяжелой) массы*. При этом исходят из экспериментально установленного постоянства отношения $F_{21}/F_{2,\text{et}}$ для данной пары тел 1 и et, поочередно помещаемых в одну и ту же точку гравитационного поля любого тела 2. Это отношение определяют как отношение гравитационных масс $m_1^{\text{gr}}/m_{\text{et}}^{\text{gr}}$. Иначе говоря, исходят из закона всемирного тяготения в виде

$$\mathbf{F}_{21} \sim -\frac{m_1^{\text{gr}} m_2^{\text{gr}}}{r_{21}^2} \left(\frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}} \right). \quad (1.53)$$

Далее, опираясь на экспериментально установленное свойство гравитационных сил (1.51) и исходя из отношения инертных масс (1.48), убеждаются в том, что *гравитационная и инертная массы тела пропорциональны*, т. е.

$$m_1 = \left(\frac{m_{\text{et}}}{m_{\text{et}}^{\text{gr}}} \right) m_1^{\text{gr}}, \quad (1.54)$$

причем коэффициент пропорциональности $m_{\text{et}}/m_{\text{et}}^{\text{gr}}$ зависит от

* Оно аналогично определению электрических зарядов, см. [40, с. 20].

выбора системы единиц измерения (обычно полагают, что $m_{\text{et}} = m_{\text{et}}^{\text{gr}}$ и тем самым фиксируют размерность $[\gamma]$ гравитационной постоянной; в системе единиц LMT в этом случае $[\gamma] = = L^3 M^{-1} T^{-2}$). Заключение о пропорциональности гравитационной и инертной масс тела неоднократно и с большой степенью точности подтверждалось на опыте.

§ 1.3. Понятие об инерциальной системе отсчета и законы Ньютона. Принцип относительности Галилея

Понятие об инерциальной системе отсчета связано с понятием об изолированной материальной точке, т. е. точке, которая находится на весьма больших расстояниях от всех прочих тел. Согласно опыту ускорения изолированной точки, вызываемые телами, будут исчезающе малыми. Вместе с тем экспериментальные исследования показывают, что относительно одних систем отсчета ускорение такой точки равно нулю, а относительно других систем изолированные точки движутся ускоренно. Например, возьмем изолированную точку, покоящуюся относительно системы S и занимающую положение $x=x_0$, $y=z=0$ (рис. 1.15, а). Тогда ускорение точки относительно S равно нулю. Теперь рассмотрим ту же точку в системе S' , вращающейся относительно S с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz (для простоты совместим начала систем O, O' и оси $Oz, O'z'$). Ясно, что относительно S' точка будет двигаться по окружности радиуса x_0 , и поэтому ее ускорение относительно S' отлично от нуля (рис. 1.15, б).

Система отсчета, относительно которой изолированная материальная точка покоится, либо движется равномерно и прямолинейно из любого начального положения при любом направлении скорости, называется инерциальной системой отсчета. В инерциальной системе отсчета радиус-вектор изолированной точки есть линейная функция времени

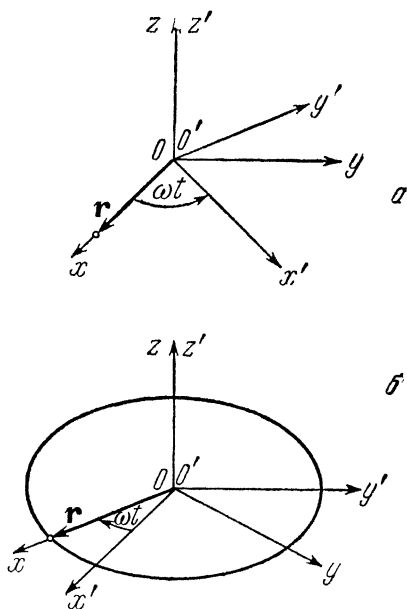


Рис. 1.15

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \quad (1.55)$$

при любых постоянных \mathbf{r}_0 и \mathbf{v}_0 . Система отсчета, в которой условие (1.55) для изолированной точки не выполняется, называется неинерциальной системой.

Существование инерциальных систем отсчета подтверждается экспериментом (как всегда, с известной степенью точности). Простейший опыт Галилея заключался в наблюдении над отполированным металлическим шариком, скатывающимся по наклонной гладкой доске. Наблюдением было установлено, что если угол наклона доски к горизонту стремится к нулю, то ускорение шарика также стремится к нулю. Отсюда был сделан вывод о том, что «когда тело движется по горизонтальной плоскости, не встречая никакого сопротивления, то... движение его является равномерным и продолжалось бы бесконечно, если бы плоскость простиралась в пространстве без конца» [2, с. 417, 418]. В последующих более точных опытах была установлена неинерциальность геоцентрической системы, которая фактически использовалась в эксперименте Галилея. В то же время наблюдения над ускорениями небесных тел показали инерциальность гелиоцентрической системы Коперника. Конечно, участие солнечной системы во вращении вокруг центра нашей Галактики должно приводить к весьма малой неинерциальности гелиоцентрической системы (по сравнению с неинерциальностью геоцентрической системы). Однако тогда за инерциальную систему можно принять систему, связанную с несколькими галактиками.

Первый закон классической механики, или закон инерции Галилея—Ньютона, сводится к утверждению, что *инерциальные системы отсчета существуют*, т. е. существуют системы, удовлетворяющие требованию (1.55)*. Конечно, возникает вопрос: с чем связано существование такой привилегированной системы отсчета, как инерциальная система? Однако этот вопрос до сих пор не может считаться решенным.

В основе второго закона Ньютона лежат утверждения о независимости массы от движения тела, о независимости сил и независимости ускорений, сообщаемых данному телу различными другими телами, и утверждение о существовании инерциальной системы отсчета.

* Приведем обычную формулировку закона: «Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние» [3, с. 39]. Мы видели, однако, что существуют и такие системы отсчета, относительно которых изолированное тело (т. е. тело, «не понуждаемое приложенными силами») движется ускоренно. Следовательно, объективным содержанием приведенной формулировки закона инерции является утверждение о том, что действительно инерциальные системы существуют.

Рассмотрим для простоты систему из трех точек 1, 2 и 3. Для первой точки можно получить соотношение между силой $\mathbf{F}_1^{(2,3)}$, действующей на нее со стороны второй и третьей точек, и ускорением $\mathbf{w}_1^{(2,3)}$, которое вызывает эта сила.

Действительно, согласно утверждению о существовании инертной массы и постулату об одинаковой направленности силы и ускорения, вызываемого этой силой,

$$m_1 \mathbf{w}_1^{(2,3)} = \mathbf{F}_1^{(2,3)}, \quad (1.56)$$

где m_1 — масса точки 1,

$$\mathbf{w}_1^{(2,3)} = \mathbf{w}_1^{(2)} + \mathbf{w}_1^{(3)},$$

$$\mathbf{F}_1^{(2,3)} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31}.$$

Однако ускорение $\mathbf{w}_1^{(2,3)}$ точки 1, вызываемое телами 2 и 3, равно ускорению \mathbf{w}_1 точки 1 относительно инерциальной системы отсчета, поскольку в этой системе тела 2 и 3 являются единственной причиной ускорения точки; таким образом,

$$\mathbf{w}_1^{(2,3)} = \mathbf{w}_1, \quad (1.57)$$

где $\mathbf{w}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_1$ (см. (1.10)).

Нетрудно показать, что соотношения вида (1.56) и (1.57) будут справедливыми и при любом числе тел, действующих на данную точку. Следовательно, ускорение \mathbf{w}_1 точки 1 относительно инерциальной системы и сумма сил \mathbf{F}_1 , действующих на точку со стороны всех тел, связаны уравнением

$$m_1 \mathbf{w}_1 = \mathbf{F}_1, \quad (1.58)$$

которое называется *вторым законом Ньютона*.

Итак, согласно второму закону Ньютона *произведение массы любой материальной точки на ее ускорение относительно инерциальной системы отсчета равно сумме всех сил, действующих на данную точку со стороны других тел*. Второй закон является одним из фундаментальных законов природы. Он лежит в основе того раздела механики, в котором рассматривается движение материальных точек в зависимости от действия сил. Этот раздел механики называется *динамикой*.

Второй закон позволяет найти положение и скорость точки в любой момент времени, если известны: масса точки — m , сила $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ как функция положения, скорости и времени, а также положение точки \mathbf{r}_0 и ее скорость \mathbf{v}_0 в некоторый момент времени t_0 (конечно, рассматриваются положение и скорость относительно инерциальной системы). Действительно, зная \mathbf{r}_0 и \mathbf{v}_0 , можно определить силу в момент t_0 , а зная эту силу и массу, найти ускорение в тот же момент времени $\ddot{\mathbf{r}}_0 = \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0)$ (рис. 1.16).

Ускорение в свою очередь определяет приращение скорости $dv = \ddot{\mathbf{r}}_0 dt$, а скорость \mathbf{v}_0 определяет приращение радиуса-вектора $d\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 dt$. Таким образом, определяются положение и скорость точки в момент $t_0 + dt$ и тем самым определяется сила $\mathbf{F}(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}, \mathbf{v}_0 + d\mathbf{v}, t_0 + dt)$, действующая на точку в момент $t_0 + dt$. Повторяя указанный процесс, можно найти положение и скорость точки в любой момент времени $t > t_0$. Сформулированная здесь задача является основной задачей динамики.

Используя второй закон Ньютона, можно решать и обратную задачу: зная массу точки и ее положение относительно инерциальной системы отсчета в любой момент времени, получить силу, действующую

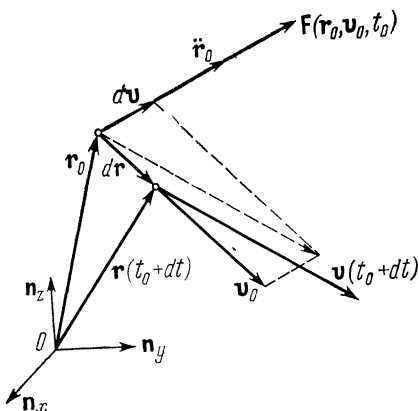


Рис. 1.16

щую на точку также в любой момент времени.

Подчеркнем, что под действием данной силы данное изменение скорости у тела с большей массой происходит за более длительный промежуток времени. В связи с этим говорят, что *тела обладают инертностью, а масса тел является мерой инертности*.

Второй закон дает возможность выбрать основные единицы измерения в механике. В самом деле, этот закон устанавливает взаимосвязь между массой, ускорением и силой. Но ускорение является второй производной радиуса-вектора по времени. Следовательно, закон устанавливает взаимосвязь между величинами с размерностями массы, длины, времени и силы. В принятой с 1960 г. системе СИ за основные единицы в механике выбраны единицы длины, времени и массы. За эталон массы принят килограмм — масса определенного тела — международного килограмма. Единицей силы является ньютон — сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2 .

Применяя второй закон к системе материальных точек, получим уравнения движения механической системы относительно инерциальной системы отсчета:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1.59)$$

здесь F_i — сила, действующая на i -тую материальную точку; предполагается, что все эти силы являются заданными функциями $r_1, r_2, \dots, r_N, v_1, v_2, \dots, v_N$ и t (см., например, (1.42) — (1.46)).

В третьем законе Ньютона утверждается, что *силы, с которыми две любые материальные точки действуют друг на друга, равны по величине и направлены в противоположные стороны по прямой, соединяющей точки* (см. рис. 1.17, где изображен случай сил отталкивания). Таким образом, для любых двух точек 1 и 2

$$F_{21} = -F_{12}, \quad (1.60)$$

где F_{21} — сила, действующая на первую точку со стороны второй, а сила F_{12} действует на вторую точку со стороны первой; эти силы коллинеарны вектору r_{12} (или r_{21}).

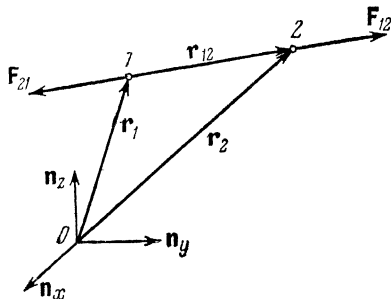


Рис. 1.17

Из третьего и второго законов механики вытекает, что любые две материальные точки сообщают друг другу ускорения, обратно пропорциональные их массам и направленные в противоположные стороны по прямой, соединяющей эти точки. Следовательно, величины ускорений и масс взаимодействующих точек связаны соотношением

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{m_1}{m_2}. \quad (1.61)$$

При установлении третьего закона Ньютон также основывался на данных эксперимента.

Принцип относительности Галилея. Возьмем систему отсчета S' , не ускоренно движущуюся относительно инерциальной системы S . Это означает, что начало системы S' движется относительно S равномерно и прямолинейно, а углы между осями систем S' и S сохраняют постоянные значения. Тогда система S' также будет инерциальной. Действительно, из (1.6) вытекает, что радиусы-векторы r и r' , характеризующие положение любой материальной точки относительно систем S и S' , связаны между собой соотношением

$$r = r_{O'} + r', \quad (1.62)$$

где $r_{O'} = (v_{O'})_0 t + (r_{O'})_0$ — радиус-вектор начала O' относитель-

но S ; $(v_{O'})_0$ и $(r_{O'})_0$ — скорость и радиус-вектор начала O' в момент времени $t=0$. Дифференцируя обе части (1.62) по времени и учитывая неизменность ориентации осей S' , получим соотношения для скоростей точки

$$v = (v_{O'})_0 + v', \quad (1.63)$$

где v и v' — скорости точки относительно систем S и S' соответственно. Дифференцируя по времени (1.63), найдем, что

$$w = w'. \quad (1.64)$$

Таким образом, *ускорение точки в данный момент времени одинаково относительно любой из систем, неускоренно движущихся относительно друг друга*. Следовательно, если в системе S ускорение изолированной точки равно нулю, то и в системе S' оно равно нулю. Итак, *если система S является инерциальной системой, то любая другая система S' , неускоренно движущаяся относительно S , также инерциальна*.

Преобразование координат при переходе от одной инерциальной системы к другой инерциальной системе определяется соотношением (1.62). Это преобразование называется преобразованием Галилея. Оно заметно упрощается, если системы S и S' одинаково ориентированы, скорость начала O' направлена по одной из осей (например, по оси Ox), а в начальный момент времени точки O' и O совпадают (рис. 1.18). В этом случае преобразование Галилея имеет вид

$$x = v_0 t + x', \quad y = y', \quad z = z', \quad (1.65)$$

где $v_0 = (x_{O'})_0$ (конечно, в этом преобразовании «участвует» фундаментальное допущение классической механики о преобразовании времени (1.7)).

На основании наблюдений Галилеем был сформулирован классический принцип относительности, согласно которому *законы механики одинаковы в любых инерциальных системах отсчета*. Это значит, что уравнения движения относительно любых инерциальных систем S и S' совпадают друг с другом, т. е. уравнение

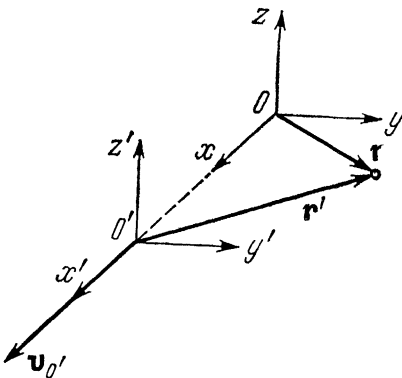


Рис. 1.18

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}$$

эквивалентно уравнению

$$m'\mathbf{w}' = \mathbf{F}'.$$

Поскольку в классической механике масса данной точки постоянна ($m=m'$), а ускорение точки в данный момент времени одинаково по отношению к любым инерциальным системам ($\mathbf{w}=\mathbf{w}'$), из принципа Галилея следует, что

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}', \quad (1.66)$$

т. е. следует утверждение о неизменности сил, действующих на точку, при переходе от одной инерциальной системы к другой, также инерциальной системе. Итак, все величины, входящие в уравнение Ньютона, не изменяются при преобразовании от одной инерциальной системы к другой инерциальной системе. Иными словами, *уравнения Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея.*

Рассмотренные выше основные понятия и законы классической механики: понятия о материальной точке, о пространстве и времени, о силе и массе, понятие об инерциальной системе отсчета, законы Ньютона и принцип относительности Галилея — являются фундаментом классической механики. Этот фундамент был построен в результате деятельности многих поколений, был создан в результате анализа и теоретического обобщения экспериментальных данных. Проверкой правильности основ классической механики, ее соответствия природе является сопоставление выводов теории опять-таки с экспериментом. Так как теория создается человеком в определенные исторические эпохи с определенными воззрениями и техническими возможностями, то любая физическая теория является приближенной, ограниченной. В том числе приближенными, ограниченными являются основные понятия и законы классической механики.

§ 1.4. Решение уравнений движения и начальные условия

Движение механической системы N материальных точек подчинено уравнениям (1.59). Если известны массы всех точек и их положения в любой момент времени, то, используя (1.59), можно определить силы как функции времени. Однако несравненно более трудной задачей является отыскание радиусов-векторов точек как функций времени, если заданы силы как функции положений точек, их скоростей и времени. В математическом отношении эта задача является задачей о нахождении общего решения системы

$3N$ дифференциальных обыкновенных уравнений 2-го порядка*. Это решение будет зависеть от $6N$ произвольных постоянных и может быть записано в виде

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t, C_1, C_2, \dots, C_{6N}) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (1.67)$$

Постоянные интегрирования связаны с начальными условиями.

Действительно, пусть нам известно общее решение (1.67) и заданы начальные положения и скорости точек системы, т. е. заданы $\mathbf{r}_{i0} = \mathbf{r}_i(t_0)$, $\mathbf{v}_{i0} = \mathbf{v}_i(t_0)$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Дифференцируя (1.67) по времени, получим скорости точек как функции времени и $6N$ произвольных постоянных

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(t, C_1, C_2, \dots, C_{6N}) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (1.68)$$

Полагая в системах (1.67) и (1.68) $t = t_0$, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i0} &= \mathbf{r}_i(t_0, C_1, C_2, \dots, C_{6N}), \\ \mathbf{v}_{i0} &= \mathbf{v}_i(t_0, C_1, C_2, \dots, C_{6N}) \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (1.69)$$

Допуская, что система (1.69) разрешима относительно постоянных интегрирования, найдем

$$C_\alpha = C_\alpha(t_0, \mathbf{r}_{10}, \mathbf{r}_{20}, \dots, \mathbf{r}_{N0}, \mathbf{v}_{10}, \mathbf{v}_{20}, \dots, \mathbf{v}_{N0}) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 6N). \quad (1.70)$$

Наконец, подставляя (1.70) в (1.67), получим общее решение уравнений движения механической системы в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_i(t, t_0, \mathbf{r}_{10}, \mathbf{r}_{20}, \dots, \mathbf{r}_{N0}, \mathbf{v}_{10}, \mathbf{v}_{20}, \dots, \mathbf{v}_{N0}) \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (1.71)$$

Таким образом, если заданы массы точек, силы, действующие на точки системы, и начальные условия, то поведение системы определяется однозначно. В этом проявляется *причинная обусловленность* механического движения.

Рассмотрим ряд примеров на решение уравнений движения относительно инерциальной системы отсчета. При этом обратим внимание на *большое значение выбора системы координат, который должен отражать особенности заданных сил и начальных условий*. Такой выбор обеспечивает сравнительную простоту решения задачи.

Пример 1.6. *Заряженная частица в переменном электрическом поле.*

* Здесь и далее предполагается выполнимость математических условий, при которых решение системы дифференциальных уравнений единственно.

Заряд e массы m движется между обкладками плоского неподвижного конденсатора, где напряженность электрического поля равна

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

(\mathcal{E}_0 и ω — постоянные величины). В момент времени $t=0$ заряд находился в положении \mathbf{r}_0 и имел скорость \mathbf{v}_0 относительно системы отсчета, связанной с пластинами конденсатора. Найти положение и скорость заряда в любой момент времени $t > 0$.

Из условия вытекает, что на заряд действует сила (см. (1.45))

$$\mathbf{F} = e\mathcal{E}_0 \cos \omega t,$$

а уравнением движения является уравнение

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathcal{E}_0 \cos \omega t.$$

Сила в любой момент времени коллинеарна постоянному вектору \mathcal{E}_0 . Поэтому ускорение и приращение скорости также коллинеарны \mathcal{E}_0 . Следовательно, движение заряда происходит в плоскости, задаваемой векторами \mathcal{E}_0 и \mathbf{v}_0 . В соответствии с этим выберем систему декартовых координат (начало отсчета и орты должны быть жестко связаны с конденсатором). Одну из осей (например, ось Ox) направим вдоль вектора \mathcal{E}_0 , а плоскость $z=0$ совместим с плоскостью движения (рис. 1.19). В выбранной системе координат проекции силы имеют вид

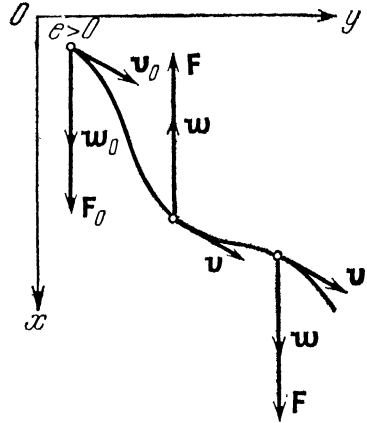


Рис. 1.19

$$F_x = e\mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad F_y = F_z = 0,$$

а проекции радиуса-вектора и скорости на ось Oz равны нулю.

Проектируя левую и правую части векторного уравнения движения на оси выбранной системы, получим три дифференциальных уравнения

$$m\ddot{x} = e\mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = 0$$

(подчеркнем, что проекция силы на ось Ox изменяется по гармоническому закону и в соответствии с этим изменяется абсолютная величина и знак проекции ускорения на ось Ox). В результате интегрирования уравнений найдем

$$\dot{x} = \frac{e\mathcal{E}_0}{m\omega} \sin \omega t + C_1, \quad x = -\frac{e\mathcal{E}_0}{m\omega^2} \cos \omega t + C_1 t + C_4,$$

$$\dot{y} = C_2, \quad y = C_2 t + C_5,$$

$$\dot{z} = C_3, \quad z = C_3 t + C_6.$$

Подставляя в эти функции $t=0$ и используя начальные условия, получим решение для $v(t)$ и $r(t)$ в виде

$$\dot{x} = \frac{e\mathcal{E}_0}{m\omega} \sin \omega t + \dot{x}_0, \quad x = \frac{e\mathcal{E}_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) + \dot{x}_0 t + x_0,$$

$$\dot{y} = \dot{y}_0, \quad y = \dot{y}_0 t + y_0,$$

$$\dot{z} = 0, \quad z = 0.$$

Итак, заряд движется в плоскости, образуемой векторами \mathcal{E}_0 и v_0 (т. е. в плоскости $z=0$). Движение вдоль оси Oy происходит с постоянной скоростью, так как сила действует лишь в направлении оси Ox . Движение заряда вдоль оси Ox складывается из движения по инерции с начальной скоростью \dot{x}_0 и колебания с частотой ω изменения заданной силы. Усредненная по времени за период $2\pi/\omega$ проекция скорости на ось Ox равна проекции начальной скорости на эту ось, т. е. $\bar{\dot{x}} = \dot{x}_0$. Отметим также, что изменяющиеся по гармоническому закону составляющие проекций скорости и радиуса-вектора заряда на ось Ox отстают по фазе от изменения проекции ускорения соответственно на $\pi/2$ и π .

В общем случае, когда на материальную точку действует сила, зависящая только от времени, все три уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{x} = F_x(t).$$

Интегрируя это уравнение и учитывая начальные условия, найдем общее решение в квадратурах:

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F_x(t) dt + \dot{x}_0, \quad x = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^t F_x(t) dt \right] dt + \dot{x}_0 (t - t_0) + x_0.$$

Для других проекций скорости и радиуса-вектора результаты аналогичны.

Пример 1.7. Задача о пространственном осцилляторе.

На точку массы m действует сила, направленная к неподвижной точке O и пропорциональная расстоянию между этими точками (коэффициент пропорциональности κ). Найти уравнение траектории материальной точки, а также ее радиус-вектор и ско-

рость как функции времени, если в момент времени $t=0$ она находилась в положении \mathbf{r}_0 относительно системы отсчета с началом в точке O и имела скорость \mathbf{v}_0 .

Уравнением движения в рассматриваемой системе отсчета является уравнение

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\kappa\mathbf{r}.$$

Таким образом, в любой момент времени ускорение (и приращение скорости) коллинеарно вектору \mathbf{r} , а движение точки происходит в плоскости, определяемой векторами \mathbf{r}_0 и \mathbf{v}_0 . Действительно, если $t=0$, то приращение скорости коллинеарно вектору \mathbf{r}_0 (см. рис. 1.7), и поэтому в момент времени, бесконечно близкий к начальному, точка будет находиться в указанной плоскости. Аналогично, рассматривая последующие приращения радиуса-вектора и скорости точки, можно прийти к выводу о ее движении в плоскости, определяемой начальными условиями. В связи с этим плоскость Oxy декартовой системы координат целесообразно совместить с плоскостью движения.

Проектируя левую и правую части уравнения движения на оси Ox и Oy , приходим к системе уравнений

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

где $\omega^2 = \kappa/m$. Общее решение этой системы уравнений имеет вид

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

$$y = C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t.$$

Дифференцируя его по времени, получим

$$\dot{x} = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t,$$

$$\dot{y} = -\omega C_3 \sin \omega t + \omega C_4 \cos \omega t.$$

Полагая в последних четырех функциях $t=0$ и используя начальные условия, найдем

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega}, \quad C_3 = y_0, \quad C_4 = \frac{\dot{y}_0}{\omega}.$$

Общее решение можно записать также в виде

$$x = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad y = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2),$$

где $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ — произвольные постоянные. Из полученных решений следует, что в направлении осей Ox и Oy точка совершает гармонические колебания с частотой ω , а амплитудами a_1, a_2

и ф а з а м и α_1, α_2 соответственно. Амплитуды и фазы выражаются через начальные положение и скорость точки; например,

$$a_1 = \left(x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2} \right)^{1/2}, \quad \text{tg } \alpha_1 = -\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}.$$

Запишем $y(t)$ в следующей форме:

$$y = a_2 \cos(\omega t + \alpha_1 + \delta),$$

где разность фаз $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$, и возведем в квадрат правые и левые части функций $x(t), y(t)$, представленных в виде, удобном для исключения времени:

$$\frac{x}{a_1} = \cos(\omega t + \alpha_1),$$

$$\frac{1}{\sin \delta} \left[\frac{y}{a_2} - \cos(\omega t + \alpha_1) \cos \delta \right] = -\sin(\omega t + \alpha_1).$$

Складывая результаты возведения в квадрат, получим уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

Итак, под действием силы — \mathbf{r} материальная точка движется по эллипсу с центром в неподвижной точке O , к которой в любой момент времени направлена сила. Плоскость эллипса определяется начальными условиями, этими же условиями определяются величины полуосей эллипса (a_1, a_2) и его ориентация в плоскости движения (т. е. разность фаз δ).

В общем случае, когда сила зависит только от положения точки, а каждая декартова проекция силы зависит только от соответствующей проекции радиуса-вектора, уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{x} = F_x(x), \quad m\ddot{y} = F_y(y), \quad m\ddot{z} = F_z(z).$$

Общее решение этих уравнений может быть получено в квадратурах. Например, умножая обе части первого уравнения на dx и учитывая, что

$$\ddot{x}dx = \frac{dx}{dt} \dot{x} dx = \dot{x} d\dot{x};$$

получим

$$\dot{x}d\dot{x} = \frac{1}{m} F_x(x) dx.$$

Интегрируя это уравнение, найдем $\dot{x}(x)$:

$$\dot{x} = \pm \left\{ \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F_x(x) dx + \dot{x}_0^2 \right\}^{1/2}$$

(здесь выбирается тот знак, который имеет \dot{x} при $x=x_0$), а разделяя в последнем уравнении переменные t , x и интегрируя еще раз, получим $t(x)$:

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\left\{ \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F_x(x) dx + \dot{x}_0^2 \right\}^{1/2}}$$

Пример 1.8. Движение в однородном поле тяжести при наличии силы сопротивления.

Пусть достаточно малое невращающееся тело массы m движется в однородном поле тяготения напряженности \mathbf{g} вблизи поверхности Земли. Кроме того, среда, покоящаяся относительно Земли, действует на тело с силой, пропорциональной его скорости относительно Земли (коэффициент пропорциональности k). Найти положение и скорость тела как функции времени.

Выберем систему отсчета, жестко связанную с Землей, и будем считать эту систему инерциальной, что с определенной степенью точности допустимо (см. пример 4.3). Сила, действующая на тело, складывается из постоянной силы притяжения $m\mathbf{g}$ и силы сопротивления среды $-k\mathbf{v}$, где \mathbf{v} — скорость тела (см. (1.46)). Следовательно, ускорение в любой момент времени лежит в плоскости, определяемой векторами \mathbf{g} , \mathbf{v}_0 ; в этой же плоскости будет двигаться тело (рис. 1.20). Учитывая данное обстоятельство, одну из координатных плоскостей (например, Oyz) совместим с плоскостью движения, а ось Oz направим вверх по вертикали.

Уравнение движения точки имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} - k\dot{\mathbf{r}},$$

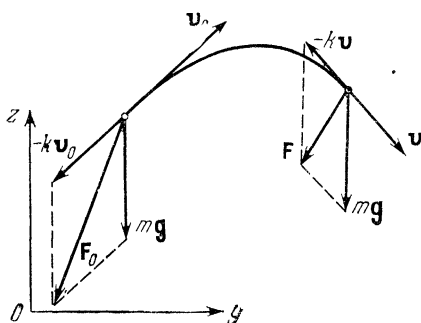


Рис. 1.20

где \mathbf{r} — радиус-вектор, определяющий положение тела. Проектируя левую и правую части уравнения движения на координатные оси указанной выше системы отсчета, найдем, что

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m} \dot{y}, \quad \ddot{z} = -g \left(1 + \frac{k}{mg} \dot{z} \right).$$

Интегрируя эти уравнения и используя начальные условия, получим решение для проекций скорости

$$\dot{y} = v_0 \cos \alpha_0 e^{-\frac{k}{m}t},$$

$$\dot{z} = \frac{mg}{k} \left(1 + \frac{kv_0}{mg} \sin \alpha_0 \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

(в качестве начальных условий здесь взяты не \dot{y}_0 и \dot{z}_0 , а модуль скорости v_0 и угол α_0 между начальной скоростью и осью Oy). Интегрируя второй раз, получим общее решение задачи в виде

$$y = \frac{m}{k} v_0 \cos \alpha_0 (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) + y_0,$$

$$z = \frac{m^2}{k^2} g \left(1 + \frac{k}{mg} v_0 \sin \alpha_0 \right) (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mg}{k} t + z_0.$$

Рассмотрим следующие частные случаи. Пусть $\dot{y}_0 = 0$ и $\alpha_0 = +\pi/2$, т. е. начальная скорость направлена вверх. Тогда начальное ускорение $\ddot{z}_0 = -g \left(1 + \frac{k}{mg} \dot{z}_0 \right) < 0$, т. е. будет направлено вниз. С возрастанием времени (как видно из решения) ускорение, оставаясь отрицательным, стремится к нулю, так как сила сопротивления в конце концов компенсирует силу притяжения. Установившаяся скорость падения оказывается равной $-(mg/k)$. Если начальная скорость направлена вниз ($\dot{y}_0 = 0$, $\alpha_0 = -\pi/2$), но $|\dot{z}_0| < (mg/k)$, то опять $\ddot{z}_0 < 0$.

Если же начальная скорость направлена вниз, а $|\dot{z}_0| > (mg/k)$, то начальное ускорение направлено вверх. Сила сопротивления в этом случае направлена вверх и по величине больше, чем сила притяжения. В последующие моменты времени ускорение, оставаясь положительным, стремится к нулю; соответственно скорость стремится к предельной скорости падения.

Пусть теперь $\dot{y}_0 \neq 0$, $\dot{z}_0 > 0$ и α_0 заключено в пределах: либо $0 < \alpha_0 < \pi/2$, либо $(\pi/2) < \alpha_0 < \pi$. Тогда в начале движения (при t , очень близком в $t=0$) $\dot{z} > 0$, а для достаточно больших t $\dot{z} < 0$.

Следовательно, в течение некоторого времени тело будет подниматься, а затем начнет падать. Время подъема определим, полагая $z=0$:

$$t_{z=0} = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{k}{mg} v_0 \sin \alpha_0 \right).$$

Из функций $y(t)$ и $z(t)$ легко отыскать координаты точки в тот момент, когда она достигает максимальной высоты. Действительно, полагая в этих функциях $t=t_{z=0}$, найдем

$$y(t_{z=0}) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{2g} \frac{1}{1 + \frac{k}{mg} v_0 \sin \alpha_0} + y_0,$$

$$z(t_{z=0}) = \frac{m}{k} v_0 \sin \alpha_0 - \frac{m^2}{k^2} g \ln \left(1 + \frac{k}{mg} v_0 \sin \alpha_0 \right) + z_0.$$

Уравнение траектории $z(y)$ получим, исключая время из функции $z(t)$ с помощью функции $y(t)$:

$$z = \frac{mg}{k} \frac{\left(1 + \frac{k}{mg} v_0 \sin \alpha_0 \right)}{v_0 \cos \alpha_0} (y - y_0) + \frac{m^2}{k^2} g \ln \left[1 - \frac{k(y - y_0)}{m v_0 \cos \alpha_0} \right] + z_0.$$

Для наглядности рассмотрим предельные случаи, когда можно считать, что $(k/m)t \gg 1$ или $(k/m)t \ll 1$. Если тело в начальный момент находится достаточно высоко над поверхностью Земли, то время полета (до падения на поверхность Земли) может быть достаточно велико (рис. 1.21, а); тогда в конце полета будет выполняться условие $(k/m)t \gg 1$. Устремляя $t \rightarrow +\infty$, получим предельные значения $y(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$:

$$y_\infty = y_0 + \frac{m}{k} v_0 \cos^2 \alpha_0, \quad \dot{y}_\infty = 0, \quad \dot{z}_\infty = -\frac{mg}{k}.$$

Эти величины дают приближенные значения дальности полета и проекций скорости в момент падения тела на поверхность Земли.

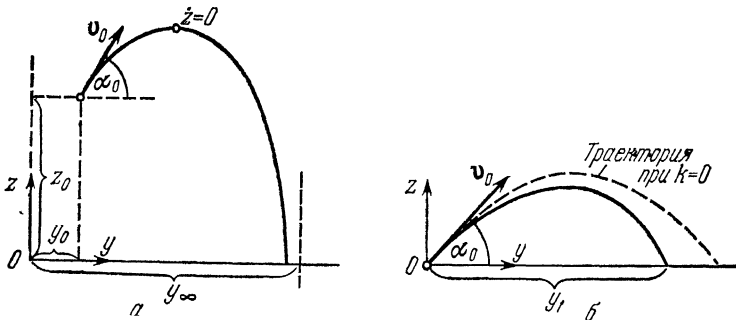


Рис. 1.21

Если время полета достаточно мало, то выполняется условие $(k/m)t \ll 1$. Предполагая, что сила сопротивления среды мала по сравнению с силой притяжения тела Землей, и разлагая интересующие нас функции в ряды по малым величинам, получим приближенные решения. Пусть, например, в начальный момент времени тело находится на поверхности Земли и требуется вычислить время полета t_1 , дальность y_1 и квадрат скорости тела в момент его падения на поверхность Земли (рис. 1.21, б). Полагая $z = z_0 = 0$ в функции $z(t)$ и разлагая ее по степеням $(k/m)t$, а также имея в виду, что $(kv_0/mg) \ll 1$, получим приближенное значение для времени полета

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g} \left(1 - \frac{kv_0}{mg} \sin \alpha_0 \right).$$

Полагая $t = t_1$ в функции $y(t)$ и считая величины, пропорциональные k , малыми, найдем приближенное значение для дальности полета

$$y_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} \left(1 - \frac{2kv_0}{mg} \sin \alpha_0 \right).$$

Наконец, полагая $t = t_1$ в функциях $\dot{y}(t)$ и $\dot{z}(t)$, получим приближенное значение квадрата скорости тела в момент его падения на поверхность Земли:

$$v_1^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{4kv_0}{mg} \sin \alpha_0 \right).$$

Приближенное уравнение траектории найдем с помощью разложения функции $z(y)$ в ряд по величинам, содержащим k :

$$z = (y - y_0) \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} (y - y_0)^2 - \frac{kg}{3mv_0^3 \cos^3 \alpha_0} (y - y_0)^3.$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае траектория весьма близка к параболе. Устремляя $k \rightarrow 0$ либо в уравнениях движения, либо в решениях, получим описание движения точки в однородном поле тяготения.

В общем случае, когда сила является функцией только скорости точки, причем каждая декартова проекция силы зависит лишь от соответствующей проекции скорости, уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{x} = F_x(\dot{x}), \quad m\ddot{y} = F_y(\dot{y}), \quad m\ddot{z} = F_z(\dot{z}).$$

Общее решение этих уравнений может быть получено в квадратурах. Например, возьмем первое уравнение движения. Так как $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$, то сразу видно, что переменные t и \dot{x} разделяются и соответствующий интеграл равен

$$t = t_0 + m \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{F_x(\dot{x})}.$$

Если отсюда можно выразить \dot{x} как функцию от t , то можно было бы найти в квадратуре $x(t)$, т. е.

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{x}(t) dt.$$

Отметим еще один прием интегрирования уравнений указанного типа. Умножая обе части уравнения движения на dx и имея в виду, что $\dot{x} dx = x \dot{x}$, получим зависимость $x(\dot{x})$:

$$x = x_0 + m \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{\dot{x} dx}{F_x(\dot{x})}.$$

Аналогично интегрируются и остальные уравнения движения.

Пример 1.9. *Движение заряженной частицы в постоянных однородных электрическом и магнитном полях.*

Теория движения заряда в электромагнитных полях имеет большое значение в современной физике: она играет важную роль в исследованиях плазмы, в ускорительной технике, в астрофизике и т. д.

Рассмотрим сначала поведение заряда в *постоянном однородном электрическом поле* напряженности \mathcal{E} . Уравнение движения и его решение в векторной форме имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= e\mathcal{E}, \\ \mathbf{v} &= \frac{e\mathcal{E}}{m}t + \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{r} &= \frac{e\mathcal{E}}{2m}t^2 + \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0 \end{aligned}$$

(здесь \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 — начальные значения радиуса-вектора и скорости заряда). Отсюда следует, что заряд движется ускоренно в направлении вектора \mathcal{E} и по инерции в направлении, перпендикулярном к \mathcal{E} , а траекторией точки является парабола. Эти основные черты рассматриваемого движения будут лучше видны, если спроектировать левую и правую части векторного решения на оси декартовой системы координат, выбранной так, чтобы ось Ox была параллельна вектору \mathcal{E} , а ось Oy была расположена в плоскости движения, определяемой векторами \mathcal{E} и \mathbf{v}_0 . Тогда

$$x = \frac{e\mathcal{E}}{2m}t^2 + \dot{x}_0t + x_0, \quad y = \dot{y}_0t + y_0, \quad z = 0.$$

Исключая из этих функций время, найдем уравнение траектории

$$x = x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\dot{y}_0} (y - y_0) + \frac{e \mathcal{E}}{2m\dot{y}_0^2} (y - y_0)^2.$$

Измеряя элементы этой траектории, можно получить значение величин $e/m\dot{y}_0^2$ и x_0/\dot{y}_0 .

Движение заряда в постоянном однородном магнитном поле напряженности \mathcal{H} подчиняется векторному уравнению (см. (1.44))

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}}\mathcal{H}].$$

Для решения этого уравнения выберем декартову систему координат с осью Oz , параллельной \mathcal{H} (рис. 1.22). В такой системе сила Лоренца имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} \begin{vmatrix} \mathbf{n}_x & \mathbf{n}_y & \mathbf{n}_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & \mathcal{H} \end{vmatrix} = \frac{e\mathcal{H}}{c} (\dot{y}\mathbf{n}_x - \dot{x}\mathbf{n}_y),$$

а уравнениями движения являются уравнения

$$\ddot{x} = \omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega\dot{x}, \quad \ddot{z} = 0,$$

где $\omega = \frac{e\mathcal{H}}{mc}$ — так называемая циклотронная частота. Интегрируя эту систему один раз и учитывая начальные условия, найдем

$$\dot{x} = \omega(y - y_0) + \dot{x}_0, \quad \dot{y} = -\omega(x - x_0) + \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0.$$

Подставляя функцию $\dot{y}(x)$ в первое из уравнений движения, получим

$$\ddot{x} + \omega^2(x - x_0) = \omega\dot{y}_0.$$

Это уравнение гармонических колебаний с постоянной правой частью имеет общее решение вида

$$x = x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega} - a \cos(\omega t + \alpha).$$

Отсюда дифференцированием найдем выражение для проекции скорости на ось Ox :

$$\dot{x} = a\omega \sin(\omega t + \alpha).$$

Используя функции $x(t)$ и $\dot{x}(t)$, определим постоянные a и α :

$$a = \frac{1}{\omega} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)^{1/2}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{\dot{x}_0}{\dot{y}_0}$$

$$\left(\sin \alpha = \frac{\dot{x}_0}{(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)^{1/2}}, \quad \cos \alpha = \frac{\dot{y}_0}{(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)^{1/2}} \right).$$

Затем, подставляя решение $\dot{x}(t)$ в полученную выше функцию $\dot{x}(y)$, найдем $y(t)$:

$$y = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} + a \sin(\omega t + \alpha),$$

откуда следует, что

$$\dot{y} = a \omega \cos(\omega t + \alpha).$$

Наконец, исключая время из функций $x(t)$ и $y(t)$, приходим к выводу, что проекция материальной точки на плоскость, перпендикулярную \mathcal{H} , движется по окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2,$$

где

$$x_0 = x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega}, \quad y_0 = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega}.$$

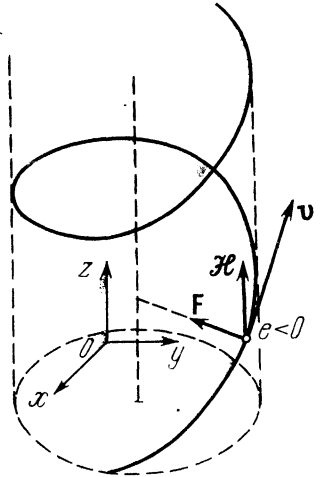


Рис. 1.22

Радиус a этой окружности определяется удельным зарядом e/m , напряженностью магнитного поля \mathcal{H} и проекцией начальной скорости на плоскость, перпендикулярную вектору напряженности \mathcal{H} (величина радиуса a не зависит от начального положения заряда). Центр указанной окружности определяется взятыми в начальный момент времени проекциями радиуса-вектора и скорости заряда на плоскость Oxy , т. е. величинами x_0 , y_0 , \dot{x}_0 , \dot{y}_0 , а также циклотронной частотой ω . В направлении оси Oz точка движется по инерции со скоростью z_0 . Следовательно, траекторией точки является винтовая линия с постоянным шагом $z_0(2\pi/\omega)$.

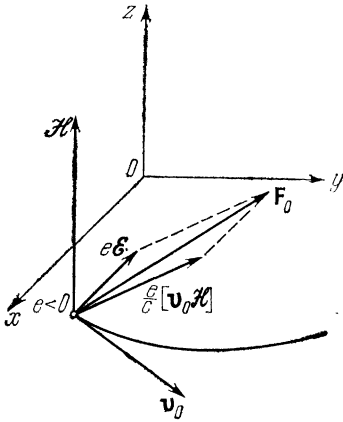


Рис. 1.23

Из приведенных соотношений, а также из того, что проекция ускорения на ось Oz равна нулю, следует, что абсолютная величина ускорения заряда является постоянной:

$$\omega = a \omega^2 = \omega (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)^{1/2},$$

а вектор ускорения направлен все время перпендикулярно к оси воображаемой цилиндрической поверхности радиуса a , на которую навивается траектория заряда.

Отметим важное свойство фокусировки рассматриваемого магнитного поля. Оно проявляется в том, что частицы с одинаковым удельным зарядом и одинаковым начальным положением, но с различными начальными скоростями, перпендикулярными \mathcal{H} , приходят в одно и то же положение через период времени $T = 2\pi/\omega$.

Теперь рассмотрим движение заряда во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях с напряженностями \mathcal{E} и \mathcal{H} [14, стр. 245—248]. Если начальная скорость \mathbf{v}_0 заряда перпендикулярна \mathcal{H} , то его движение будет плоским, поскольку приращение скорости в начальный и последующий моменты времени лежит в плоскости, определяемой векторами \mathbf{v}_0 и $\mathbf{F}_0 = e\mathcal{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}_0\mathcal{H}]$ (см. (1.44)). В связи с этим ось Oz направим вдоль вектора \mathcal{H} , а ось Ox вдоль \mathcal{E} (см. рис. 1.23, где $e < 0$).

Уравнение движения заряда

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}\mathcal{H}]$$

Из решения видно, что величина проекции скорости на плоскость Oxy постоянна; остается постоянным и модуль скорости точки. Дифференцируя $x(t)$ и $y(t)$ по времени, получим проекции ускорения как функции времени

$$\ddot{x} = a\omega^2 \cos(\omega t + \alpha),$$

$$\ddot{y} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \alpha),$$

а выразив их через x и y , найдем

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - x_0), \quad \ddot{y} = -\omega^2(y - y_0).$$

Из приведенных соотношений, а

также из того, что проекция ускоре-

ния на ось Oz равна нулю, следует, что абсолютная величина ускорения заряда является постоянной:

в выбранных декартовых координатах принимает вид

$$\ddot{x} = \omega \dot{y} + \frac{e \mathcal{E}}{m}, \quad \ddot{y} = -\omega \dot{x},$$

где $\omega = \frac{e \mathcal{H}}{mc}$. Интегрируя эту систему по аналогии с предыдущим случаем, находим

$$x = x_0 + \frac{1}{\omega} \left(\dot{y}_0 + \frac{c \mathcal{E}}{\mathcal{H}} \right) - a \cos(\omega t + \alpha),$$

$$y = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} - \frac{c \mathcal{E}}{\mathcal{H}} t + a \sin(\omega t + \alpha),$$

где

$$a = \frac{1}{\omega} \left[\dot{x}_0^2 + \left[\dot{y}_0 + \frac{c \mathcal{E}}{\mathcal{H}} \right]^2 \right]^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{x}_0}{\dot{y}_0 + \frac{c \mathcal{E}}{\mathcal{H}}}.$$

Для проекций скорости и ускорения соответственно имеем

$$\dot{x} = \omega a \sin(\omega t + \alpha), \quad \ddot{x} = \omega^2 a \cos(\omega t + \alpha),$$

$$\dot{y} = -\frac{c \mathcal{E}}{\mathcal{H}} + \omega a \cos(\omega t + \alpha), \quad \ddot{y} = -\omega^2 a \sin(\omega t + \alpha).$$

Уравнение траектории (циклоиды) запишем в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2,$$

где

$$x_0 = x_0 + \frac{1}{\omega} \left(\dot{y}_0 + \frac{c \mathcal{E}}{\mathcal{H}} \right), \quad y_0 = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} - \frac{c \mathcal{E}}{\mathcal{H}} t.$$

Отсюда видно, что движение заряда происходит в полосе, лежащей в плоскости Oxy , и может быть наглядно представлено как равномерное вращение заряда с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса a , центр которой движется параллельно оси Oy с постоянной скоростью $-\frac{c \mathcal{E}}{\mathcal{H}}$ (рис. 1.24). Существенно, что ω зависит от отношения $e \mathcal{H}/m$ и не зависит от начальных условий, а скорость центра указанной окружности зависит лишь от отношения напряженностей полей \mathcal{E}/\mathcal{H} и, следовательно, одинакова для частиц с различными удельными зарядами e/m и различными начальными условиями. Ширина полосы, в которой происходит движение заряда, равна $2a$. Она зависит от удельного заряда, напряженностей полей, начальной скорости и не зависит от начального положения ввиду однородности полей.

Рассмотренное движение заряда в направлении вектора $[e\mathcal{H}]$ с постоянной в среднем скоростью называют дрейфом заряда. Средние значения проекций скорости и ускорения за период $T=2\pi/\omega$ соответственно равны

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = -c \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{H}}, \quad \bar{\dot{x}} = \bar{\dot{y}} = 0.$$

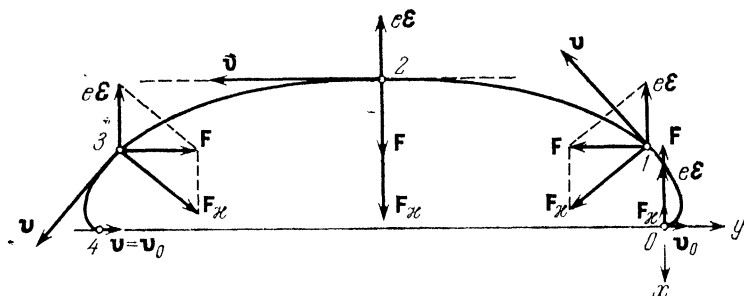


Рис. 1.24

Кстати отметим, что абсолютная величина ускорения отлична от нуля и равна

$$\omega = |a| \omega^2 = \frac{|e|\mathcal{H}}{mc} \left[\dot{x}_0^2 + \left(\dot{y}_0 + \frac{c\mathcal{E}}{\mathcal{H}} \right)^2 \right]^{1/2},$$

а вектор ускорения направлен все время к центру «образующей» окружности.

Изучаемые поля обладают важным свойством *фокусировки*. Дело в том, что ни частота ω , ни скорость дрейфа $-c \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{H}}$ не зависят от начальных условий. Поэтому расстояние l между двумя последовательными вершинами циклоиды, равное произведению величины скорости дрейфа на период T , также не зависит от начальных условий:

$$l = \frac{c\mathcal{E}}{\mathcal{H}} T = 2\pi c^2 \frac{m\mathcal{E}}{|e|\mathcal{H}^2}.$$

Следовательно, частицы с одинаковым удельным зарядом и одинаковым начальным положением, но с различными начальными скоростями, перпендикулярными к \mathcal{H} , будут приходить в одно и то же положение через периоды времени T .

Рассмотрим детальнее явление дрейфа заряда. С этой целью перенесем начало координат в начальное положение заряда, а начальную скорость направим перпендикулярно плоскости полей, т. е. положим, что $x_0 = y_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$. Такой выбор начальных ус-

ловий по существу не вносит ограничений, поскольку, изменяя начало отсчета времени t_0 , всегда можно добиться того, чтобы $x_0=0$. Подставляя выбранные начальные условия в общее решение, получим

$$x = a(1 - \cos \omega t), \quad y = -\frac{c \mathcal{E}}{\mathcal{H}} t + a \sin \omega t,$$

где

$$a = \frac{1}{\omega} \left(\dot{y}_0 + \frac{c \mathcal{E}}{\mathcal{H}} \right).$$

Возьмем для определенности отрицательный заряд $e < 0$ и положительно направленную начальную скорость $y_0 > 0$. Учитывая, что при этом $\omega < 0$ и $a < 0$, вычислим $x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$ при значениях аргумента $\omega t = 0, -\pi/2, -\pi, -\frac{3}{2}\pi, -2\pi$ (на рис. 1.24 эти точки обозначены 0, 1, 2, 3, 4 соответственно, а в каждой из этих точек изображены скорость v , сила $e \mathcal{E}$, сила $F_{\mathcal{H}} = \frac{e}{c} [v \mathcal{H}]$ и сумма этих сил F). В результате мы увидим, что на участке траектории 0—1—2 электрическое поле разгоняет заряд от скорости, равной y_0 , до скорости максимальной величины $y_0 + 2c (\mathcal{E}/\mathcal{H})$. Одновременно магнитное поле, искривляя траекторию, поворачивает скорость настолько, что в положении 2 она становится антипараллельной начальной скорости; при этом сила $F_{\mathcal{H}}$ оказывается направленной по вектору \mathcal{E} , а по величине превосходит силу $e \mathcal{E}$ (так как скорость в положении 2 достаточно велика). В связи с этим на участке траектории 2—3—4 появляется составляющая скорости, направленная против силы $e \mathcal{E}$; происходит торможение заряда электрическим полем, а магнитное поле продолжает искривлять траекторию; скорость заряда в точке 4 достигает минимальной величины y_0 и поворачивается до направления начальной скорости. Из этой картины движения следует, что на участке траектории 1—2—3 величина средней скорости движения заряда в направлении, перпендикулярном плоскости полей, больше, чем на участках 0—1, 3—4. В самом деле, легко подсчитать, что средние значения проекции скорости на участке 1—2—3 соответственно равны

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = -\frac{c \mathcal{E}}{\mathcal{H}} - \frac{2}{\pi} a \omega,$$

а на участках 0—1, 3—4

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = -\frac{c \mathcal{E}}{\mathcal{H}} + \frac{2}{\pi} a \omega.$$

Аналогично возникает дрейф частицы и при других значениях начальной скорости (см. рис. 1.25, на котором изображены все возможные случаи траекторий отрицательного заряда, если $x_0 = y_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$).

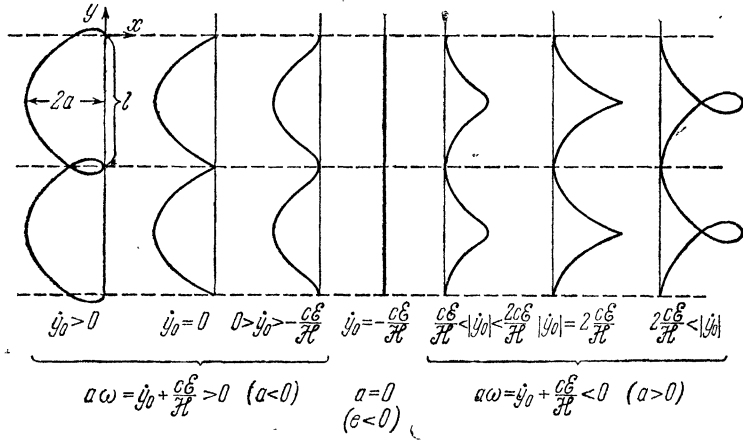


Рис. 1.25

Исследуем движение заряда в постоянных однородных электрическом и магнитном полях с произвольной ориентацией векторов \mathcal{E} , \mathcal{H} и \mathbf{v}_0 . Направляя ось Oz вдоль \mathcal{H} , а ось Ox в одной из плоскостей, определяемых векторами \mathcal{E} и \mathcal{H} , убедимся, что движение проекции материальной точки на плоскость Oxy описывается полученными ранее уравнениями с той разницей, что роль величины \mathcal{E} играет \mathcal{E}_x — проекция \mathcal{E} на ось Ox , а движение проекции точки на ось Oz будет равноускоренным и определится проекцией напряженности электрического поля \mathcal{E}_z . Таким образом, общее решение имеет вид

$$x = x_0 + \frac{1}{\omega} \left(\dot{y}_0 + \frac{c \mathcal{E}_x}{\mathcal{H}} \right) - a \cos(\omega t + \alpha),$$

$$y = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} - \frac{c \mathcal{E}_x}{\mathcal{H}} t + a \sin(\omega t + \alpha),$$

$$z = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{e \mathcal{E}_z}{2m} t^2,$$

где

$$a = \frac{1}{\omega} \left[\dot{x}_0^2 + \left(\dot{y}_0 + \frac{c \mathcal{E}_x}{\mathcal{H}} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{x}_0}{\dot{y}_0 + \frac{c \mathcal{E}_x}{\mathcal{H}}}.$$

В этом случае движение заряда может быть наглядно представлено как его равномерное вращение с угловой скоростью ω по окружности радиуса a , плоскость которой все время остается перпендикулярной напряженности \vec{H} , а центр движется с постоянной скоростью $\frac{c \mathcal{E}_x}{\mathcal{H}}$ в направлении вектора $[\mathcal{E}\vec{H}]$ и равноускоренно вдоль \vec{H} . Следовательно, траекторией заряда является некоторая винтовая кривая, вьющаяся около параболы с осью, параллельной напряженности магнитного поля.

Глава II

ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА, КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА И ЭНЕРГИИ

В первой главе было показано, что задача о движении одной точки имеет общее решение для сравнительно широкого класса сил. Задача о движении двух точек также имеет общее решение в квадратурах при достаточно общих предположениях о силе взаимодействия между точками (см. § 3.1). Однако отыскание общего решения задачи трех и более точек при достаточно общих предположениях о силах взаимодействия встречает непреодолимые трудности*. В связи с этим общие теоремы, справедливые при любом числе материальных точек, приобретают громадное значение. Такими универсальными теоремами являются законы изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии. Рассмотрим эти законы для механических систем свободных точек (см. с. 26), или, кратко говоря, для свободных систем.

§ 2.1. Законы изменения и сохранения импульса и момента импульса материальной точки

Из дальнейшего будет ясно, что законы сохранения импульса, кинетического момента и энергии приводят к так называемым интегралам движения. Интегралом движения *называется такая функция времени, координат и скоростей точек, которая при движении механической системы сохраняет постоянное значение, определяемое начальными условиями*. Таким образом, интеграл движения определяет соотношение вида

$$f(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N) = C \quad (2.1)$$

между радиусами-векторами и скоростями точек системы. Функция f сохраняет постоянное значение при любых начальных условиях, а значение постоянной C фиксируется, если начальные условия заданы, т. е.

* В настоящее время частные решения задачи трех тел находятся с помощью методов вычислительной математики.

$$\dot{f}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N) = C_0, \quad (2.2)$$

где

$$C_0 = f(t_0, \mathbf{r}_{10}, \mathbf{r}_{20}, \dots, \mathbf{r}_{N0}, \mathbf{v}_{10}, \mathbf{v}_{20}, \dots, \mathbf{v}_{N0}).$$

Интегралы движения, содержащие скорости точек, называются первыми интегралами. Вторыми интегралами называются такие функции времени, координат точек и произвольных констант, которые при движении системы сохраняют постоянные значения.

Если известны $6N$ независимых первых интегралов движения

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N) = C_\alpha \quad (2.3)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, 6N),$$

то уравнения движения (1.59) механической системы можно считать проинтегрированными, поскольку соотношения (2.3) определяют радиусы-векторы и скорости точек системы как функции времени и $6N$ произвольных постоянных. Соответственно знание s независимых первых интегралов дает возможность понизить порядок системы уравнений движения на s .

Рассмотрим связь законов сохранения со свойствами сил на примере одной точки, движущейся относительно определенной инерциальной системы отсчета.

Закон изменения импульса материальной точки совпадает со вторым законом Ньютона. Действительно, импульсом точки \mathbf{p} называется произведение массы точки m на ее скорость \mathbf{v} (часто эту величину называют количеством движения). Поскольку масса точки постоянна, то из уравнения (1.58) получаем закон изменения

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}. \quad (2.4)$$

На основании (2.4) можно утверждать: если проекция силы на некоторую неподвижную ось в любой момент времени равна нулю, то проекция импульса на ту же ось сохраняется; например, если $F_z = 0$, то

$$p_z = p_{z0}. \quad (2.5)$$

Если проекции силы на две фиксированные оси равны нулю, то получим два интеграла. Например, пусть на точку действует сила тяжести $m\mathbf{g}$. Так как вектор \mathbf{g} постоянен, то проекции силы на оси, перпендикулярные этому вектору, равны нулю в любой момент времени. Следовательно, проекции импульса (и скорости) на оси, перпендикулярные \mathbf{g} , сохраняются, т. е. $x = x_0$, $y = y_0$ (ось Oz

направлена вдоль вектора \mathbf{g}). Наконец, если сумма сил, действующих на точку, равна нулю ($\mathbf{F}=\mathbf{0}$), то

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0, \quad (2.6)$$

т. е. имеет место закон сохранения импульса точки.

Отметим: если проекция силы на подвижную ось равна нулю, то отсюда не вытекает сохранение проекции импульса на эту ось. Пусть, например, проекция силы на координатную ось (ρ) равна нулю. Спроектировав на эту ось обе части уравнения движения точки (или (2.4)), найдем, что

$$m\dot{\omega}_\rho = F_\rho.$$

Левая часть этого уравнения (согласно (1.20)) равна

$$\dot{p}_\rho - m\rho\dot{\varphi}^2,$$

где $p_\rho = m\dot{\rho}$ и является проекцией импульса точки на ось (ρ). Таким образом, если $F_\rho = 0$, то это не означает, что p_ρ сохраняется.

Закон изменения момента импульса точки является следствием второго закона Ньютона. Действительно, умножая (2.4) векторно слева на радиус-вектор точки \mathbf{r} , получим

$$[\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}] = [\mathbf{r}\mathbf{F}].$$

Правая часть этого уравнения называется моментом силы \mathbf{L} . Левую часть (используя определение импульса и очевидное равенство $[\mathbf{v}\mathbf{v}]=0$) можно представить в виде

$$[\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}] = \frac{d\mathbf{M}}{dt},$$

где $\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$ — момент импульса точки. В результате найдем, что *производная момента импульса материальной точки по времени равна моменту силы, действующей на эту точку*,

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}. \quad (2.7)$$

Отсюда следует: *если проекция момента силы на некоторую неподвижную ось в любой момент времени равна нулю, то проекция момента импульса точки на ту же ось сохраняется*; например, если $L_z = 0$, то

$$M_z = M_{z0}. \quad (2.8)$$

Подчеркнем, что момент силы (или его проекция) может равняться нулю не только в том случае, когда сила равняется нулю. Пусть, например, задана *сила, направление которой постоянно*.

Направляя координатную ось Oz коллинеарно силе, на основании (2.8) найдем (рис. 2.1, а)

$$\begin{aligned} F_x = F_y = 0, \quad F_z \neq 0; \\ L_x \neq 0, \quad L_y \neq 0, \quad L_z = xF_y - yF_x = 0; \\ M_z = m(\dot{x}y - y\dot{x}) = M_{z0}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Таким образом, проекция момента импульса точки на направление силы сохраняется, что дает один первый интеграл движения.

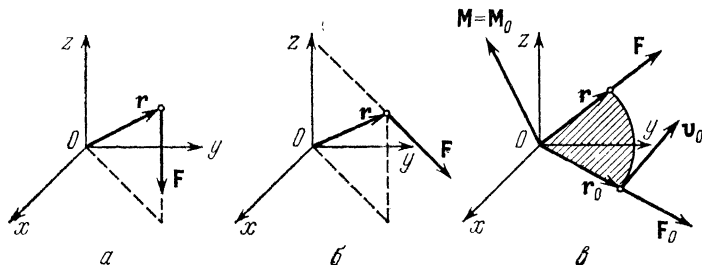


Рис. 2.1

Теперь рассмотрим силу (рис. 2.1, б), *линия действия которой все время пересекает неподвижную ось под прямым углом* (линией действия силы называется прямая, на которой расположен этот вектор). Выбирая неподвижную ось за ось Oz , на основании (2.8) получим

$$\begin{aligned} F_\rho \neq 0, \quad F_\varphi = F_z = 0; \\ L_\rho = -zF_\varphi = 0, \quad L_\varphi \neq 0, \quad L_z = \rho F_\varphi = 0; \\ M_z = m\rho^2\dot{\varphi} = M_{z0}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Следовательно, проекция момента импульса точки на неподвижную ось сохраняется и дает также один первый интеграл*, тогда как из равенства L_ρ нулю не следует постоянство M_ρ , поскольку орт \mathbf{n}_ρ сам зависит от времени.

В физических приложениях очень распространен случай *центральной силы, т. е. силы, линия действия которой все время проходит через некоторую неподвижную точку* — центр силы. Выбирая эту точку за начало координат (рис. 2.1, в), найдем

* Случай (2.9) и (2.10) являются частными случаями более общего, когда линия действия силы все время пересекает неподвижную прямую под любым углом.

$$\mathbf{F} = F_r \mathbf{n}, \quad \mathbf{L} = 0, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{M} = m [\mathbf{r} \mathbf{v}] = \mathbf{M}_0.$$

Таким образом, момент импульса точки относительно центра силы сохраняется. Однако между тремя проекциями момента импульса имеется очевидная зависимость:

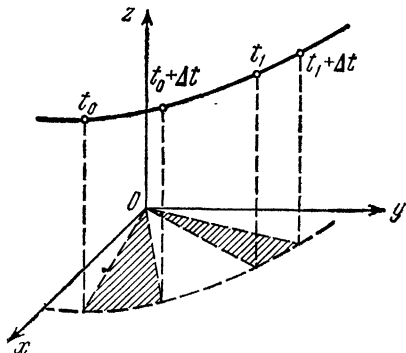


Рис. 2.2

$$Mv = m [\mathbf{r} \mathbf{v}] v = 0, \quad (2.12)$$

поэтому из полученных трех первых интегралов независимы лишь два.

Под действием центральной силы точка всегда движется по плоской траектории. Это видно как из уравнения движения (см., в частности, пример 1.7 на с. 45), так и из второго интеграла

$$m [\mathbf{r} \mathbf{v}] \mathbf{r} = \mathbf{M}_0 \mathbf{r} = 0. \quad (2.13)$$

Плоскость траектории проходит через центр силы и перпендикулярна постоянному моменту импульса точки; положение этой плоскости определяется начальными условиями, так как

$$\mathbf{M}_0 = m [\mathbf{r}_0 \mathbf{v}_0].$$

Во всех отмеченных случаях для выявления сохраняющихся величин важен такой выбор системы координат, который учитывает особенности сил. Только в случае изолированной точки не существенно, где поместить начало координат и как направить оси, поскольку силы, действующие на точку, отсутствуют ($\mathbf{F} = 0$); в этом случае

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0, \quad (2.14)$$

т. е. имеет место закон сохранения момента импульса точки.

Для более наглядного представления о сохранении момента импульса выразим уравнение (2.7) через секторную скорость σ (см. (1.11) и рис. 1.3, б). Тогда получим

$$2m \dot{\sigma} = L, \quad (2.15)$$

откуда вытекает, что из равенства $M_z = M_{z0}$ следует

$$\sigma_z = \sigma_{z0}. \quad (2.16)$$

Это значит, что проекция радиуса-вектора точки на плоскость, перпендикулярную оси Oz , описывает одинаковые площади за любые одинаковые интервалы времени (рис. 2.2). По этой причине интеграл (2.16) часто называется интегралом площадей.

§ 2.2. Законы изменения и сохранения энергии материальной точки

Закон изменения кинетической энергии точки получим, умножая обе части уравнения движения (1.58) скалярно на перемещение точки $d\mathbf{r}$:

$$m \dot{\mathbf{v}} d\mathbf{r} = \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

Правая часть этого уравнения называется элементарной работой dA силы \mathbf{F} на перемещении $d\mathbf{r}$, а левая часть равна дифференциалу от кинетической энергии. В последнем можно убедиться, используя определение скорости (1.9) и известное утверждение о том, что скалярное произведение вектора на его приращение равно произведению модуля вектора на приращение этого модуля*:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} = m\mathbf{v} d\mathbf{v} = mv dv = dT,$$

где $T = mv^2/2$ — кинетическая энергия точки. В результате получаем, что *дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе действующей на точку силы*:

$$dT = dA. \quad (2.17)$$

Разделив (2.17) на dt и определив мощность силы как отношение $\frac{dA}{dt}$, получим другую форму закона изменения кинетической энергии, а именно: *производная кинетической энергии точки по времени равна мощности силы, действующей на точку*:

$$\dot{T} = \frac{dA}{dt}. \quad (2.18)$$

* Действительно, по определению скалярного произведения для любого вектора \mathbf{a} имеем

$$\mathbf{a} d\mathbf{a} = a |d\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, d\mathbf{a}).$$

Но приращение модуля вектора равно

$$da = |d\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, d\mathbf{a}),$$

следовательно,

$$\mathbf{a} d\mathbf{a} = a da.$$

Следует иметь в виду, что *элементарная работа dA не всегда является полным дифференциалом, а мощность $\frac{dA}{dt}$ — полной производной скалярной функции по времени.*

Потенциальные силы. Как предполагалось выше, сила является заданной функцией положения, скорости точки и времени. Поэтому, не зная закона движения точки (т. е. функции $\mathbf{r}(t)$), нельзя вычислить работу на конечном перемещении точки. Для вычисления конечного изменения кинетической энергии в общем случае нужно знать решение уравнений движения. Однако для весьма широкого класса сил можно, не зная решения уравнений движения, найти изменение кинетической энергии. Такими силами являются потенциальные силы.

Понятие о потенциальных силах тесно связано с понятием о силовом поле, которое рассмотрим на примере электростатического поля. Известно, что сила, с которой неподвижный заряд 2 действует на заряд 1, может быть записана в виде

$$\mathbf{F}_{21} = e_1 \mathcal{E}_2,$$

где $\mathcal{E}_2 = e_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ (здесь начало координат совмещено со вторым зарядом, см. (1.43)). В этом выражении вектор \mathcal{E}_2 не зависит от величины заряда e_1 . Поэтому становится возможным следующее представление о силе: заряд 2 — источник силы — порождает силовое поле, которое в каждой точке пространства имеет определенную напряженность \mathcal{E}_2 независимо от того, присутствует ли в этой точке пространства другой заряд — объект воздействия — или нет; если такой заряд имеется, то на него действует поле с силой, равной произведению этого заряда на напряженность поля в месте нахождения этого заряда. Таким образом, *силовое поле можно задать с помощью напряженности поля или силы как функций точки пространства.*

Силовое поле называется потенциальным, если его напряженность удовлетворяет требованию, которое для рассматриваемого примера имеет вид

$$\text{rot } \mathcal{E}_2(\mathbf{r}) = e_2 \text{rot } (\mathbf{r}/r^3) = 0$$

(дифференциальная операция «ротор» производится по координатам точки пространства). Соответственно *силу называют потенциальной, если она зависит только от координат и удовлетворяет требованию*

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.19)$$

Учитывая, что векторная функция, удовлетворяющая требованию (2.19), всегда может быть выражена через градиент некото-

рой скалярной функции U от положения точки, потенциальную силу можно представить в виде

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U(\mathbf{r}). \quad (2.20)$$

Элементарная работа потенциальной силы будет полным дифференциалом*:

$$dA = -\nabla U dr = -dU. \quad (2.21)$$

Отсюда вытекает, что работа на конечном перемещении точки из положения \mathbf{r}_0 в положение \mathbf{r}_1 равна определенному интегралу:

$$A = - \int_{(\mathbf{r}_0)}^{(\mathbf{r}_1)} dU = U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}_1) \quad (2.22)$$

(здесь и далее предполагается, что U — однозначная функция). Итак, *работа потенциальной силы равна разности значений функции U в начальном и конечном положениях материальной точки и не зависит от формы траектории, по которой движется точка.* Скалярную функцию U называют потенциальной энергией точки, т. е. энергией, зависящей от расположения точки в потенциальном силовом поле. Из (2.21) и (2.20) видно, что потенциальную энергию можно найти по заданной потенциальной силе с помощью неопределенного интеграла:

$$U = - \int \mathbf{F} dr + C \quad (2.23)$$

(здесь C — постоянная, определяющая «нулевой уровень» потенциальной энергии; выбор такого уровня произволен и не влияет на значение силы и работы этой силы).

Приведем ряд примеров. Пусть *сила перпендикулярна к неподвижной плоскости и является функцией расстояния от этой плоскости.* Такая сила потенциальна, поскольку она удовлетворяет условию (2.19). Если координатную ось Oz направить вдоль силы, т. е. перпендикулярно к указанной плоскости, то найдем

$$\mathbf{F} = F(z) \mathbf{n}_z, \quad \mathbf{F} dr = F(z) dz, \quad U = - \int F(z) dz + C. \quad (2.24)$$

В частности, напряженность \mathcal{E} поля равномерно заряженной бесконечной плоскости постоянна по величине и направлена перпендикулярно этой плоскости [40, гл. I, § 4]. Совмещая координатную плоскость Oxy с заряженной плоскостью, получим следующие выражения для силы и элементарной работы:

* Здесь и далее градиент записывается с помощью векторного дифференциального оператора «набла», который в декартовых координатах имеет вид

$$\nabla = \mathbf{n}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{n}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{n}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$\mathbf{F} = e\mathcal{E} \mathbf{n}_z, \quad dA = e\mathcal{E} dz. \quad (2.25)$$

Для потенциальной энергии заряда и работы силы электростатического поля на конечном перемещении заряда соответственно находим

$$U = -e\mathcal{E}z + C, \quad A = - \int_{z_0}^{z_1} dU = e\mathcal{E}(z_1 - z_0). \quad (2.26)$$

Отсюда видно, что работа силы по перемещению точки с плоскости $z=z_0$ на плоскость $z=z_1$ не зависит от формы траектории (каждая из указанных плоскостей представляет собой эквипотенциальную поверхность, т. е. поверхность, в каждой точке которой потенциальная энергия имеет одно и то же значение).

Рассмотрим силу, величина которой зависит от расстояния до неподвижной прямой, а линия действия которой проходит через эту прямую перпендикулярно к ней. Поле такой силы потенциально, поскольку условие (2.19) выполняется. Если ось Oz совместить с осью симметрии поля, то в цилиндрических координатах будем иметь

$$\mathbf{F} = F(\rho) \mathbf{n}_\rho, \quad dA = F(\rho) d\rho, \quad (2.27)$$

$$U = - \int F(\rho) d\rho + C, \quad A = \int_{\rho_0}^{\rho_1} F(\rho) d\rho.$$

В качестве частного примера можно взять электростатическое поле равномерно заряженной бесконечной прямой. Как известно, сила, действующая на заряд e со стороны такого поля, равна

$$\mathbf{F} = e \frac{2\kappa}{\rho} \mathbf{n}_\rho, \quad (2.28)$$

где κ — заряд, приходящийся на единицу длины [40, гл. I, § 4]. Подставляя (2.28) в (2.27), получим

$$dA = \frac{2e\kappa}{\rho} d\rho, \quad U = -2e\kappa \ln \rho + C, \quad A = 2e\kappa \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right). \quad (2.29)$$

В данном примере эквипотенциальными поверхностями являются коаксиальные цилиндры с осью, совпадающей с заряженной прямой, а работа, совершаемая над зарядом при его движении по любому пути между двумя такими поверхностями, будет одной и той же.

Наконец, приведем случай *центральной силы, являющейся функцией расстояния от центра силы*. Совместя начало координат

нат с центром силы и используя сферические координаты, запишем силу в виде

$$\mathbf{F} = F(r) \mathbf{n}_r. \quad (2.30)$$

Непосредственной проверкой убедимся в потенциальности силы (2.30); при этом интересующие нас выражения будут определяться следующими формулами:

$$dA = F(r) dr, \quad U = - \int F(r) dr + C, \quad A = \int_{r_0}^{r_1} F(r) dr. \quad (2.31)$$

Например, если

$$\mathbf{F} = \frac{e_1 e_2}{r^2} \mathbf{n}_r,$$

то

$$dA = \frac{e_1 e_2}{r^2} dr, \quad U = \frac{e_1 e_2}{r} + C, \quad A = e_1 e_2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (2.32)$$

В этом примере поверхностями равного потенциала являются сферы с центром, совпадающим с неподвижным зарядом (см. с. 66).

Во всех рассмотренных случаях сила являлась стационарной, т. е. явно от времени не зависела. Это означает, что при фиксированном положении точки ее потенциальная энергия не изменяется со временем, т. е. частная производная $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$. Однако если точка перемещается, то ее потенциальная энергия будет изменяться. Такое изменение характеризуется полной производной*:

$$\frac{dU(\mathbf{r})}{dt} = \nabla U \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

(здесь \mathbf{r} является радиусом-вектором материальной точки). В приведенных на с. 67—69 примерах полная производная $\dot{U} \neq 0$.

Сила, явно зависящая не только от положения, но и от времени, также может удовлетворять условию потенциальности (2.19) (в этом случае сила называется нестационарной потенциальной силой). Тогда выражение (2.20) также имеет место, а потенциальная энергия определяется по заданной силе интегра-

* В более подробной записи полная производная в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{dU(\mathbf{r})}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

лом (2.23), причем интегрирование производится при фиксированном времени. Что касается соотношения (2.21), то оно не имеет места. Действительно, если U явно зависит от \mathbf{r} и t , то

$$dU = \nabla U d\mathbf{r} + \frac{\partial U}{\partial t} dt \quad (2.33)$$

и, следовательно,

$$dA = -\nabla U d\mathbf{r} = -dU + \frac{\partial U}{\partial t} dt. \quad (2.34)$$

Так как свойство (2.22) в этом случае не выполняется, то для определения работы, совершенной на конечном пути, нужно знать закон движения точки, т. е. функцию $\mathbf{r}(t)$.

Рассмотрим в качестве примера заряд e в переменном электрическом поле напряженности $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$ (см. (1.45)). Направляя ось Ox вдоль вектора \mathcal{E}_0 , согласно (2.23) получим

$$U = -e \mathcal{E}_0 x \cos \omega t + C. \quad (2.35)$$

Следовательно, в этом примере как полная, так и частная производные потенциальной энергии по времени отличны от нуля.

Гироскопической силой \mathbf{F}^g называется сила, линейно зависящая от скорости точки и направленная всегда перпендикулярно этой скорости; проекции гироскопической силы на координатные оси являются однородными линейными формами относительно проекций скорости точки с коэффициентами, составляющими антисимметричную матрицу; работа гироскопических сил всегда равна нулю.

Возьмем, например, часть Лоренца (1.44), зависящую от напряженности магнитного поля:

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathcal{H}]. \quad (2.36)$$

Проекции этой силы на декартовы оси соответственно равны

$$F_x = \frac{e}{c} (\quad + \mathcal{H}_z \dot{y} - \mathcal{H}_y \dot{z}),$$

$$F_y = \frac{e}{c} (-\mathcal{H}_z \dot{x} \quad + \mathcal{H}_x \dot{z}),$$

$$F_z = \frac{e}{c} (+ \mathcal{H}_y \dot{x} - \mathcal{H}_x \dot{y} \quad),$$

откуда видно, что матрица, составленная из коэффициентов при проекциях скорости, антисимметрична:

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & +\mathcal{H}_z & -\mathcal{H}_y \\ -\mathcal{H}_z & 0 & +\mathcal{H}_x \\ +\mathcal{H}_y & -\mathcal{H}_x & 0 \end{array} \right\|. \quad (2.37)$$

Так же легко убедиться, что мощность силы (2.36) всегда равна нулю:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathcal{H}] \mathbf{v} = 0. \quad (2.38)$$

Диссипативной силой \mathbf{F}^d называется сила, направленная всегда противоположно скорости тела относительно среды, вызывающей торможение этого тела. Такая сила имеет вид

$$\mathbf{F}^d = -k\mathbf{v}, \quad (2.39)$$

где k — положительная скалярная функция, которая может зависеть от положения и скорости тела*. Диссипативная сила задается диагональной матрицей коэффициентов при проекциях скорости на координатные оси

$$\left\| \begin{array}{ccc} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{array} \right\|.$$

Мощность диссипативных сил при перемещениях тела относительно среды, вызывающей торможение тела, отрицательна:

$$\frac{dA}{dt} = -kv^2 < 0. \quad (2.40)$$

Например, сила сопротивления (1.46) является диссипативной силой. При достаточно больших относительных скоростях сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости и имеет вид (2.39), где $k = k_1 v$ (k_1 — положительная постоянная). Сила трения скольжения, возникающая при движении тела по поверхности другого твердого тела, прямо пропорциональна R_{\perp} — величине нормальной реакции твердого тела на движущееся тело. Таким образом, в этом случае $k = k_2 \frac{R_{\perp}}{v}$ (k_2 — положительная постоянная, а R_{\perp} может зависеть от положения тела).

Теперь предположим, что на точку действуют потенциальная, гироскопическая и диссипативная силы, сумма которых равна

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \mathbf{F}^g + \mathbf{F}^d. \quad (2.41)$$

* В гидродинамике встречаются диссипативные силы более общего по сравнению с (2.39) вида, например силы, проекции которых на координатные оси являются однородными линейными формами относительно проекций скорости тела с коэффициентами, составляющими симметричную матрицу.

Мощность силы \mathbf{F} получим, учитывая (2.34) и (2.38):

$$\frac{dA}{dt} = -\dot{U} + \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{F}^d \mathbf{v}. \quad (2.42)$$

Тогда, определяя полную механическую энергию E точки как сумму ее кинетической и потенциальной энергий

$$E = T + U, \quad (2.43)$$

с помощью (2.18) найдем закон изменения полной энергии точки при наличии потенциальных, гироскопических и диссипативных сил:

$$\dot{E} = \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{F}^d \mathbf{v}. \quad (2.44)$$

Итак, изменение полной энергии точки обусловлено явной зависимостью потенциальных сил от времени, а также наличием диссипативных сил; гироскопические силы не изменяют энергии.

Например, изменение полной энергии заряда в переменном электрическом поле (1.45) подчиняется уравнению (см. (2.35))

$$\dot{E} = e \mathcal{E}_0 \omega x \sin \omega t.$$

Если на точку действует потенциальная сила тяжести и диссипативная сила сопротивления, т. е. сила $\mathbf{F} = m\mathbf{g} - k\mathbf{v}$ (см. пример 1.8 на с. 47), то потенциальная энергия точки равна $U = mgz + C$ (ось Oz направлена против силы тяжести), а закон изменения энергии примет вид

$$\dot{E} = -kv^2 \quad (k > 0).$$

Следовательно, полная энергия точки убывает, что, конечно, не означает исчезновения энергии; механическая энергия E убывает, превращаясь в определенное количество теплоты, но это превращение уравнение (2.44) не отражает.

В общем случае полная энергия точки может возрастать, убывать или сохранять постоянное значение; в частности, энергия будет сохраняться, если ее прибыль и убыль компенсируют друг друга. Однако возможны случаи, когда процессы поступления энергии в систему и убыли энергии отсутствуют. Действительно, если среди сил, действующих на точку, нет диссипативных сил, а потенциальные силы стационарны, то полная энергия точки будет сохраняться, т. е. если $\mathbf{F}^d = \dot{0}$ и $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, то

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(\mathbf{r}) = E_0. \quad (2.45)$$

Закон (2.45) сохранения полной энергии точки дает один первый интеграл — интеграл энергии, который позволяет, не отыскивая решения уравнений движения, определить величину скорости как функцию положения точки.

Например, в задаче о пространственном осцилляторе потенциальная энергия равна

$$U = \frac{\kappa}{2} r^2 \quad (2.46)$$

(см. пример 1.7). Поскольку U явно от времени не зависит, а диссипативные силы отсутствуют, то полная энергия осциллятора будет сохраняться, т. е.

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{\kappa}{2} r^2 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{\kappa}{2} r_0^2.$$

Отсюда можно определить величину скорости как функцию расстояния от центра силы:

$$v = \left[v_0^2 + \frac{\kappa}{m} (r_0^2 - r^2) \right]^{1/2}.$$

В примере 1.9 рассматривалось движение заряда в постоянном однородном магнитном поле, т. е. движение под действием только гироскопической силы (см. с. 52). Закон (2.45) в этом случае приводит к интегралу

$$E = T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}, \quad (2.47)$$

из которого следует сохранение абсолютной величины скорости заряда.

При движении заряда в постоянных однородных взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях на заряд действуют потенциальная сила $e\mathcal{E}$ и гироскопическая $\mathbf{F}_{\text{ж}}$ (см. пример 1.9 на с. 54). Направляя ось Ox вдоль вектора \mathcal{E} , найдем выражение потенциальной энергии

$$U = -e\mathcal{E}x + C$$

и получим интеграл энергии

$$\frac{mv^2}{2} - e\mathcal{E}x = \frac{mv_0^2}{2} - e\mathcal{E}x_0.$$

Так как сила $\mathbf{F}_{\text{ж}}$, искривляя траекторию, ограничивает движение заряда в направлении оси Ox , то и кинетическая энергия изменяется в определенных пределах.

Теорема Клаузиуса о вириале сил. Если движение точки происходит в ограниченной области пространства с ограниченной по модулю скоростью, то имеет место теорема Клаузиуса, согласно которой *кинетическая энергия точки, усредненная по бесконечному интервалу времени, равна усредненному по тому же интервалу времени вириалу сил*; вириалом силы \mathbf{F} называется функция

$$-\frac{1}{2} \mathbf{F}\mathbf{r}. \quad (2.48)$$

В самом деле, умножим обе части уравнения движения (1.58) скалярно на радиус-вектор \mathbf{r} точки и представим результат умножения в виде

$$\frac{d}{dt} (m \mathbf{v}\mathbf{r}) - 2T = \mathbf{F}\mathbf{r}.$$

Усредняя все члены по бесконечному интервалу времени, найдем, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} m \mathbf{v}\mathbf{r} \Big|_{t_0}^{t_0 + \Delta t} - 2\bar{T} = \overline{\mathbf{F}\mathbf{r}}.$$

Отсюда, учитывая ограниченность \mathbf{v} и \mathbf{r} , получим соотношение

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \overline{\mathbf{F}\mathbf{r}}, \quad (2.49)$$

доказывающее справедливость теоремы Клаузиуса.

Если сила \mathbf{F} потенциальна, то (2.49) можно представить в виде

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{(\mathbf{r}\nabla) U}. \quad (2.50)$$

Теперь дополнительно потребуем, чтобы потенциальная энергия была однородной функцией ν -той степени относительно координат точки. В этом случае из соотношения (2.50) следует практически важное соотношение между средними значениями кинетической и потенциальной энергий точки

$$\bar{T} = \frac{\nu}{2} \bar{U}. \quad (2.51)$$

(при этом используется теорема Эйлера об однородных функциях [44, с. 477]). Например, для линейного гармонического осциллятора ($U \sim r^2$, $\nu=2$)

$$\bar{T} = \bar{U}, \quad (2.52)$$

а для точки, движущейся в поле тяготения Ньютона ($U \sim 1/r$, $\mathbf{v} = -1$)

$$\bar{T} = -\frac{\bar{U}}{2}. \quad (2.53)$$

Теорема о вириале используется в механике, статистической механике и атомной физике (например, для вывода уравнений состояния и определения постоянных межмолекулярного взаимодействия). Теорема в виде (2.50) и (2.51) имеет место и в квантовой механике (с соответствующими обобщениями используемых операций усреднения и других понятий).

Для системы N точек теорема о вириале сил следует из уравнений (1.59). Действительно, умножая обе части каждого из уравнений (1.59) на соответствующий радиус-вектор \mathbf{r}_i и складывая все результаты умножения, аналогично (2.49) получим

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \overline{\mathbf{F}_i \mathbf{r}_i} \quad (2.54)$$

для произвольных заданных сил и

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \overline{(\mathbf{r}_i \nabla_i) U} \quad (2.55)$$

для потенциальных сил.

Пример 2.1 Движение через потенциальный барьер.

Точка массы m движется из полупространства, где ее потенциальная энергия равна постоянной величине U , в полупространство, где потенциальная энергия равна постоянной $U' \neq U$. Эти полупространства разделены плоскостью. Найти скорость точки после того, как она перейдет плоскость раздела (начальная скорость точки известна).

Изменение потенциальной энергии происходит только на плоскости раздела в направлении, перпендикулярном этой плоскости. Поэтому сила, действующая на точку, отлична от нуля только на плоскости и перпендикулярна к ней. В связи с этим координатную плоскость Oyz совместим с плоскостью потенциального барьера, а ось Ox направим перпендикулярно к нему. Так как проекции силы на оси Oy и Oz равны нулю, то из закона сохранения импульса следует, что

$$v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z$$

(в этом примере «нестрихованные» величины относятся к полупространству, где потенциальная энергия равна U , а «стрихован-

ные» — к полупространству, где потенциальная энергия равна U' , причем все «нестрихованные» величины считаются заданными). Из закона сохранения энергии вытекает, что

$$\frac{m(v')^2}{2} + U' = \frac{mv^2}{2} + U.$$

Полученные соотношения дают возможность найти направляющие косинусы и абсолютную величину скорости после прохождения плоскости потенциального барьера как функции тех же величин до прохождения барьера:

$$\cos \alpha' = \frac{v}{v'} \left[\cos^2 \alpha + \frac{2}{mv^2} (U - U') \right]^{1/2},$$

$$\cos \beta' = \frac{v}{v'} \cos \beta, \quad \cos \gamma' = \frac{v}{v'} \cos \gamma,$$

где

$$v' = v \left[1 + \frac{2}{mv^2} (U - U') \right]^{1/2};$$

α , β , γ и α' , β' , γ' — углы между координатными осями и скоростью точки до и после прохождения потенциального барьера соответственно. Приведенное решение справедливо, если

$$\cos^2 \alpha > \frac{2}{mv^2} (U' - U);$$

в противном случае имеет место отражение частицы от потенциального барьера.

Пример 2.2. *Заряд в неоднородном магнитном поле.*

В магнитном поле постоянного тока силы J , протекающего по бесконечному прямому тонкому проводнику, движется точка заряда $e < 0$. Найти удельный заряд точки, полагая известными начальное расстояние ρ_0 заряда до проводника, начальную скорость v_0 , направленную вдоль тока, и максимальное расстояние ρ_{\max} заряда от проводника.

Направляя ось Oz по проводнику вдоль тока, получим выражение для напряженности магнитного поля в цилиндрических координатах [40, с. 204]

$$\mathcal{H} = \frac{2J}{c\rho} \mathbf{n}_\rho. \quad (1)$$

Проекция силы Лоренца будут соответственно равны

$$F_\rho = -\frac{2eJ}{c^2} \dot{z}, \quad F_\varphi = 0, \quad F_z = \frac{2eJ}{c^2} \dot{\rho}. \quad (2)$$

Используя (2), найдем, что проекция L_z момента силы Лоренца равна нулю, что приводит к интегралу площадей (см. (2.16)).

$$\rho^2 \dot{\varphi} = \rho_0^2 \dot{\varphi}_0. \quad (3)$$

Отсюда в силу начальных условий ($v_0 = \dot{z}_0 n_z$, т. е. $\rho_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$) заключаем, что заряд движется в плоскости $\varphi = \varphi_0$.

Сохранение кинетической энергии (см. (2.47)) дает еще один интеграл

$$\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\rho}_0^2 + \rho_0^2 \dot{\varphi}_0^2 + \dot{z}_0^2,$$

который для заданных начальных условий сводится к соотношению

$$\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 = \dot{z}_0^2. \quad (4)$$

Поскольку законы сохранения других интегралов движения не дают, воспользуемся одним из уравнений движения

$$\ddot{z} = \frac{2eJ}{mc^2} \frac{\dot{\rho}}{\rho},$$

которое сразу интегрируется:

$$\dot{z} = \dot{z}_0 + \frac{2eJ}{mc^2} \ln(\rho/\rho_0). \quad (5)$$

При максимальном удалении проекция скорости $\dot{\rho}$ должна обращаться в нуль и, следовательно, \dot{z} согласно (4) должна равняться $\pm \dot{z}_0$. Таким образом, из интеграла (5) с учетом знака заряда $e < 0$ получим величину удельного заряда

$$\frac{|e|}{m} = c^2 \frac{v_0}{J \ln(\rho_{\max}/\rho_0)}.$$

§ 2.3. Движение в центрально-симметричном поле

Рассмотрим движение материальной точки массы m под действием центральной силы, произвольно зависящей только от расстояния между точкой и центром силы. Такая сила потенциальна и стационарна (см. с. 69). Помещая начало системы отсчета в центр силы и используя законы сохранения момента импульса и энергии, получим четыре первых интеграла движения

$$m[\mathbf{r}\mathbf{v}] = \mathbf{M}_0, \quad \frac{mv^2}{2} + U(r) = E_0, \quad (2.56)$$

из которых три независимы (здесь и далее потенциальная энергия $U(r)$ считается заданной).

Наряду с первыми интегралами в данной задаче можно найти три вторых независимых интеграла. Один из таких интегралов, а именно интеграл $\mathbf{M}_0 \mathbf{r} = 0$, представляет собой уравнение (2.13) плоскости, в которой происходит движение точки. Два других интеграла вытекают из (2.56). Действительно, направляя ось Oz по вектору \mathbf{M}_0 и вводя на плоскости Oxy полярные координаты, получим

$$mr^2\dot{\varphi} = M_0, \quad \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E_0. \quad (2.57)$$

Исключая $\dot{\varphi}$ из интеграла энергии с помощью интеграла площадей, приходим к уравнению, допускающему разделение переменных r и t :

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} [E_0 - U_{\text{eff}}], \quad (2.58)$$

где функция $U_{\text{eff}}(r)$, часто называемая «эффektivной» потенциальной энергией, равна

$$U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{M_0^2}{2mr^2} \quad (2.59)$$

(отметим, что уравнение (2.58) эквивалентно уравнению для прямолинейного движения точки с потенциальной энергией, равной U_{eff}). Разделяя переменные в уравнении (2.58), найдем еще один второй интеграл

$$t = \pm \int \frac{dr}{\left\{ \frac{2}{m} [E_0 - U_{\text{eff}}] \right\}^{1/2}} + \text{const.} \quad (2.60)$$

Из интеграла (2.60) в принципе можно определить функцию $r(t)$ и подставить ее в интеграл момента. Тогда получим, что

$$\dot{\varphi} = \frac{M_0}{mr^2(t)}. \quad (2.61)$$

Отсюда найдем последний второй интеграл

$$\varphi = \frac{M_0}{m} \int \frac{dt}{r^2(t)} + \text{const.} \quad (2.62)$$

Интеграл момента позволяет найти уравнение траектории, если с его помощью в интеграле энергии исключить dt , а затем вычислить квадратуру:

$$\varphi = \pm \int \frac{\frac{M_0}{mr^2} dr}{\left\{ \frac{2}{m} [E_0 - U_{\text{eff}}] \right\}^{1/2}} + \text{const.} \quad (2.63)$$

Выбор знака в интегралах (2.60) и (2.63) диктуется начальными условиями; например, знак перед интегралом (2.60) определяется знаком производной \dot{r} , взятой в начальный момент времени.

Итак, три вторых интеграла (2.13), (2.60) и (2.62) определяют общее решение поставленной задачи (один из интегралов (2.60) или (2.62) может быть заменен интегралом (2.63)). Это решение содержит шесть постоянных: E_0 , M_{x0} , M_{y0} , M_{z0} , r_0 , φ_0 . Выбор постоянных не является единственным: можно, например, ввести r_0 , φ_0 , r_0 , $\dot{\varphi}_0$ и два угла, определяющие положение плоскости движения. Однако выбор постоянных интегрирования, содержащих энергию и момент, имеет определенное преимущество, в частности, при переходе к соответствующим квантовым задачам.

Замечательным является то, что *полученное общее решение справедливо для любой центральной силы, зависящей только от расстояния до центра силы*. Движение точки в поле таких сил обладает общими свойствами, а именно: *движение происходит в неподвижной плоскости, проходящей через центр силы; радиус-вектор точки описывает равные площади за равные промежутки времени; угол φ изменяется со временем всегда монотонно; траектория точки симметрична относительно апсид (так называются прямые, проходящие через центр силы и точки поворота, находящаяся в начальный момент времени в точке поворота и обладающая в одном случае начальной скоростью v_0 , а в другом случае — $-v_0$, будет двигаться по симметричным кривым*. Действи-

Последнее утверждение означает, что материальная точка, т. е. точки траектории, в которых величина радиуса-вектора принимает экстремальные значения).

тельно, в точках поворота \dot{r} обращается в нуль, а в окрестности этих точек изменяет знак; вместе с r изменяет знак выражение

$$\left\{ \frac{2}{m} [E_0 - U_{\text{eff}}] \right\}^{1/2},$$

которое определяет знак подынтегральных функций в (2.60) и (2.63). Следовательно, при отсчете φ от некоторой апсиды участки траектории, находящиеся по разные стороны от апсиды, будут отличаться знаком φ (при одинаковых значениях r). Это свойство симметрии позволяет построить всю траекторию, зная лишь участок траектории между двумя апсидами. Таковы общие черты движения точки в центрально-симметричном поле.

Если функция $U(r)$ задана, то, вычисляя интегралы (2.60) и (2.62) (или (2.63)), можно получить общее решение для соответствующего вида взаимодействия. Однако до нахождения общего решения полезно провести его качественный анализ. Построив график $U_{\text{eff}}(r)$, можно определить область изменения координаты r движущейся точки. Действительно, поскольку в классической механике, r , v и t вещественны, то \dot{r}^2 должна быть положительно определенной величиной. Таким образом, из уравнения (2.58) вытекает неравенство

$$E_0 \geq U_{\text{eff}}(r), \quad (2.64)$$

определяющее область изменения r , и уравнение

$$E_0 = U_{\text{eff}}(r), \quad (2.65)$$

определяющее границы указанной области. Рассмотрим простейший пример, когда точка движется по инерции относительно системы координат с началом, не лежащим на траектории точки. В этом случае

$$U_{\text{eff}} = \frac{M_0^2}{2mr^2} \quad (M_0 \neq 0, \quad E_0 = T_0),$$

а область изменения r определяется неравенством

$$r \geq r_{\text{min}} = \frac{M_0}{\sqrt{2mT_0}}.$$

Траекторией точки может быть любая прямая, касающаяся окружности радиуса $r = r_{\text{min}}$ (см. рис. 2.3, где плоскость Oxy является плоскостью движения точки).

Если точка движется в потенциальном поле (2.46), то

$$U_{\text{eff}} = \frac{\kappa r^2}{2} + \frac{M_0^2}{2mr^2}.$$

В этом случае уравнение (2.65) дает две точки поворота, определяемые равенствами

$$r_{1,2}^2 = \frac{1}{\kappa} \left[E_0 \mp \left(E_0^2 - \frac{\kappa}{m} M_0^2 \right)^{1/2} \right],$$

а неравенство (2.64) определяет область $r_1 \leq r \leq r_2$ (рис. 2.4). Если $E_0 = (U_{\text{eff}})_{\text{min}} = (\kappa/m)^{1/2} M_0$, то точка будет двигаться по окружности радиуса $r = r_1 = r_2 = (E_0/\kappa)^{1/2}$. Траектория точки в общем случае, когда $E_0 > (U_{\text{eff}})_{\text{min}}$, находится с помощью интеграла (2.63). Ею является эллипс, центр которого находится в центре силы и который дважды касается окружностей с радиусами r_1 и r_2 соответственно (см. пример 1.7).

Анализ графика U_{eff} позволяет найти условие падения частицы на центр силового поля. Пусть, например,

$$U = -\frac{\alpha}{r^5} \quad (\alpha > 0)$$

(такая степенная функция используется при рассмотрении межмолекулярного взаимодействия). Из графика U_{eff} (рис. 2.5) вид-

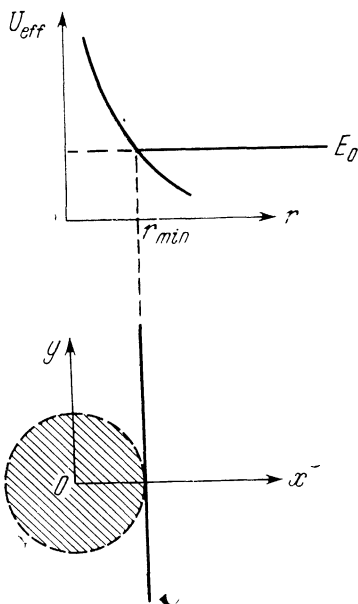


Рис. 2.3

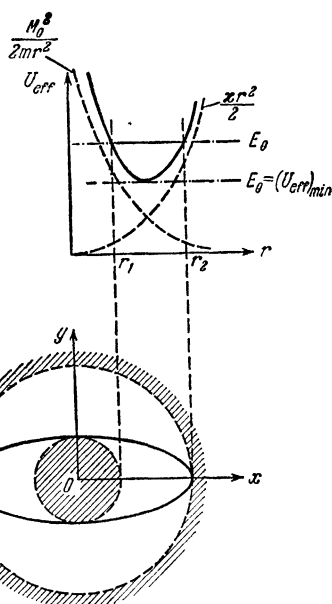


Рис. 2.4

но: если $(U_{eff})_{max} < E_0$, то движение происходит в неограниченной области и, в частности, возможно падение точки на центр. Если $0 < E_0 \leq (U_{eff})_{max}$, то движение происходит либо в области $r \geq r_2$, либо в области $r \leq r_1$, в которой точка достигает центра; при $E_0 \leq 0$ также имеет место падение на центр.

В общем случае условие падения на центр можно получить с помощью неравенства (2.64), записанного в виде

$$r^2 E_0 \geq r^2 U(r) + \frac{M_0^2}{2m}.$$

Устремляя здесь r к нулю, найдем *условие падения на центр силового поля*

$$0 \geq r^2 U(r) |_{r \rightarrow 0} + \frac{M_0^2}{2m}. \quad (2.66)$$

Для степенного потенциала $U(r) = -\alpha/r^n$ это условие выполняется при

$$n = 2, \quad \text{если } \alpha \geq \frac{M_0^2}{2m}, \quad n > 2, \quad \text{если } \alpha > 0; \quad (2.67)$$

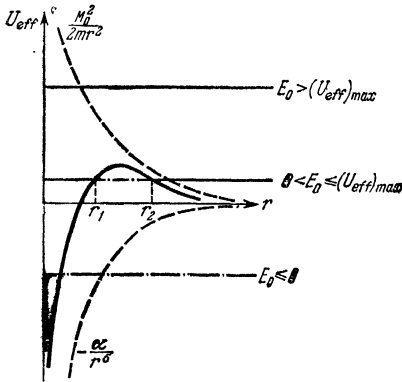


Рис. 2.5

иначе говоря, потенциальная энергия должна достаточно быстро стремиться к $-\infty$ при $r \rightarrow 0$.

В заключение приведем условие замкнутости финитной траектории, когда $0 < r_{\min} \leq r \leq r_{\max} < \infty$. В этом случае, определяя из (2.63) угол $\Delta\varphi$ поворота радиуса-вектора точки за период времени, в течение которого r изменяется от r_{\min} до r_{\max} и опять до r_{\min} , и приравнявая $\Delta\varphi$ рациональной части от 2π , получим условие замкнутости траектории

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M_0}{mr^2} dr}{\left\{ \frac{2}{m} [E_0 - U_{\text{eff}}] \right\}^{1/2}} = 2\pi \frac{k}{n}, \quad (2.68)$$

где k и n — целые числа. Действительно, если (2.68) имеет место, то через k полных оборотов точка займет первоначальное положение. Соотношение (2.68) при любых начальных условиях выполняется только для двух полей:

$$U \sim \frac{1}{r}, \quad U \sim r^2.$$

§ 2.4. Движение под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра силы. Законы Кеплера

Исследуем движение точки массы m в центрально-симметричном поле вида

$$U = -\frac{\alpha}{r} \quad (2.69)$$

с неподвижным центром силы; в случае электростатического поля, создаваемого неподвижным зарядом e_c , постоянная $\alpha = -ee_c$, где e — заряд движущейся точки, а в случае гравитационного поля, создаваемого неподвижной массой m_c , постоянная $\alpha = \gamma m m_c$ (см. (1.43), (1.49), (2.32)).

Анализируя график U_{eff} (рис. 2.6) и принимая во внимание неравенство (2.64), убедимся, что в случае притяжения ($\alpha > 0$) и положительной полной энергии ($E_0 > 0$) $r \geq r_{\min}$; в случае $\alpha > 0$ и $E_0 = 0$ движение точки также будет происходить в неограниченной области (т. е. будет инфинитным); в случае $\alpha > 0$ и отрицательной энергии ($E_0 < 0$) движение происходит в ограниченной области $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ (т. е. движение финитно); если $\alpha > 0$ и $E_0 = (U_{\text{eff}})_{\min}$, то точка движется по окружности; наконец, в случае отталкивания ($\alpha < 0$) всегда $r \geq r_{\min}$, а полная энергия положительна ($E_0 > 0$).

Во всех указанных случаях траектория, или, как часто говорят, орбита точки, определяется одной формулой. Действительно, подставляя (2.69) в (2.63), получим

$$\mp (\varphi - c) = - \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\left[\frac{2mE_0}{M_0^2} \pm \frac{2m|\alpha|}{M_0^2} \left(\frac{1}{r}\right) - \left(\frac{1}{r}\right)^2\right]^{1/2}}$$

(здесь знак «+» под радикалом соответствует случаю $\alpha > 0$, а знак «-» случаю $\alpha < 0$). Вводя вместо постоянных E_0 и M_0 положительные (по определению) постоянные

$$p \doteq \frac{M_0^2}{m|\alpha|}, \quad \varepsilon = \left[1 + \frac{2E_0 M_0^2}{m\alpha^2}\right]^{1/2}, \quad (2.70)$$

запишем последний интеграл в виде

$$\mp (\varphi - c) = - \int \frac{d\left(\frac{1}{r} \mp \frac{1}{p}\right)}{\left[\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} \mp \frac{1}{p}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

Затем в результате интегрирования получим

$$\varphi - c = \pm \arccos \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{p}{r} \mp 1\right).$$

Опуская знак «-» перед углом $(\varphi - c)$ ввиду четности косинуса, найдем уравнение орбиты

$$r = \frac{p}{\pm 1 + \varepsilon \cos(\varphi - c)}, \quad (2.71)$$

где знак «+» соответствует случаю притяжения ($\alpha > 0$), а знак «-» случаю отталкивания ($\alpha < 0$).

Уравнение (2.71) является уравнением кривой второго порядка, в фокусе которой находится начало координат; постоянная p называется параметром орбиты, а постоянная ε — ее эксцентриситетом. Значение c зависит от выбора направления полярной оси в плоскости орбиты. Если полярную ось направить на ближайшую к центру силы точку траектории (см. выбор осей на рис. 2.6), то $c = 0$.

Из аналитической геометрии известно, что траектории вида (2.71) представляют собой гиперболу (при $\varepsilon > 1$), параболу (при $\varepsilon = 1$), эллипс ($\varepsilon < 1$) или окружность ($\varepsilon = 0$). Принимая во внимание (2.70), получим, что в заданном потенциальном поле $U = -\alpha/r$ в случае притяжения ($\alpha > 0$) траекторией точки будет

$$\begin{aligned} & \text{гипербола, если } E_0 > 0, \\ & \text{парабола, если } E_0 = 0, \\ & \text{эллипс, если } 0 > E_0 > (U_{\text{eff}})_{\text{min}}, \\ & \text{окружность, если } E_0 = (U_{\text{eff}})_{\text{min}}; \end{aligned} \quad (2.72)$$

в случае отталкивания ($\alpha < 0$) точка может двигаться только по гиперболе ($E_0 > 0$).

Рассмотрим подробнее движение по эллиптической орбите, когда $\alpha > 0$, а $0 > E_0 > (U_{\text{eff}})_{\text{min}}$, т. е. $\varepsilon < 1$ (рис. 2.6). Из уравнения (2.71) следует, что

$$r_{\text{min}} = \frac{p}{1 + \varepsilon}, \quad r_{\text{max}} = \frac{p}{1 - \varepsilon}. \quad (2.73)$$

С помощью известных из аналитической геометрии формул для полуосей эллипса

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (2.74)$$

и формул (2.70) a и b можно выразить через постоянные E_0 и M_0 :

$$a = \frac{\alpha}{2|E_0|}, \quad b = \frac{M_0}{\sqrt{2m|E_0|}}. \quad (2.75)$$

Отсюда видно, что большая полуось эллипса зависит от полной энергии и не зависит от значения момента.

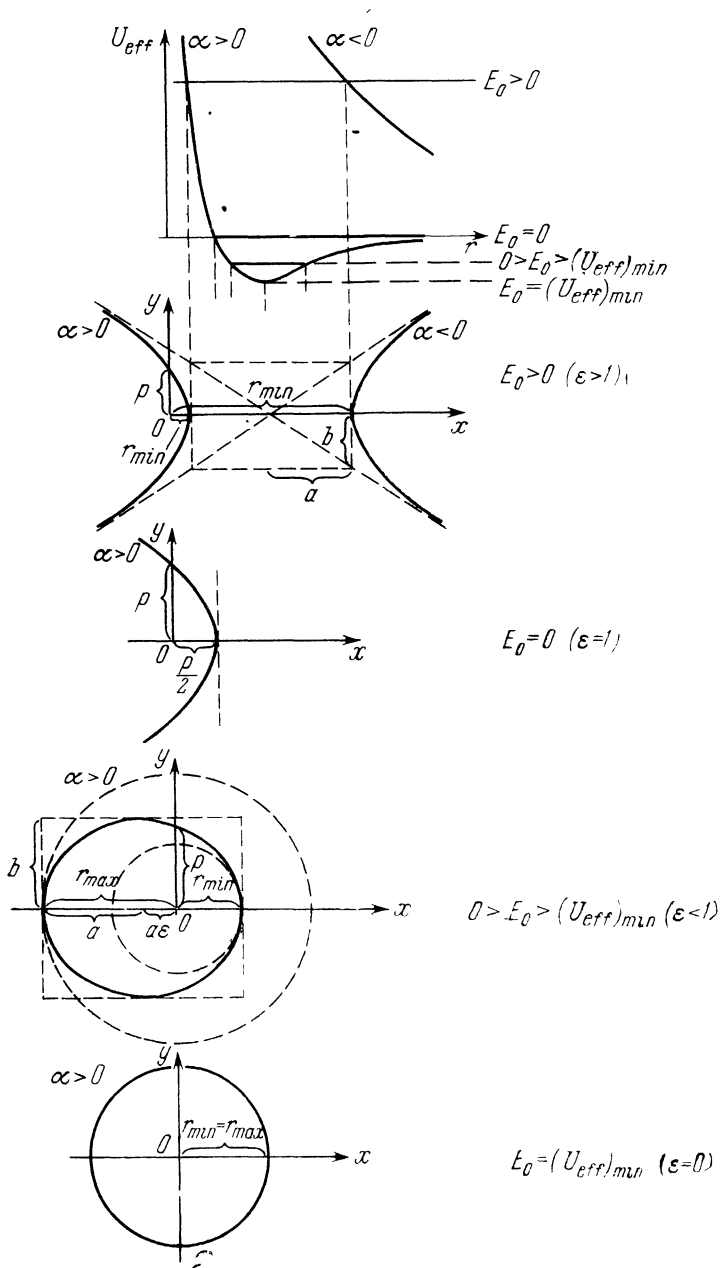


Рис. 2.6

В частном случае круговой орбиты ($E_0 = (U_{\text{eff}})_{\text{min}}$, $\varepsilon = 0$) имеем

$$\dot{r} = 0, \quad r = r_0 = a = b. \quad (2.76)$$

Очевидно, что при движении по окружности постоянна не только полная энергия, но и потенциальная и кинетическая энергия точки.

Закон движения точки по эллиптической траектории получим из интеграла (2.60). Учитывая, что $E_0 = -|E_0|$ и $\alpha > 0$, а также используя формулы (2.75), запишем (2.60) в виде

$$\mp(t - c') = \sqrt{\frac{m}{2|E_0|}} \int \frac{r dr}{(-r^2 + 2ar - b^2)^{1/2}}.$$

С помощью (2.74) убедимся, что $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$, и сведем интеграл к следующему:

$$\mp(t - c') = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{r dr}{[a^2\varepsilon^2 - (r - a)^2]^{1/2}}.$$

Сделаем подстановку

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \xi),$$

найдем

$$\mp(t - c') = \sqrt{\frac{ma^3}{a}} (\xi - \varepsilon \sin \xi).$$

Выбирая параметр ξ так, чтобы с его увеличением время возрастало, и принимая начальные условия

$$r_0 = a(1 - \varepsilon) = r_{\text{min}}, \quad t_0 = 0 \text{ при } \xi = 0, \quad (2.77)$$

получим закон движения точки по эллиптической орбите в параметрическом виде

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \xi), \quad t = \frac{T}{2\pi} (\xi - \varepsilon \sin \xi), \quad (2.78)$$

где $T = 2\pi \sqrt{ma^3/\alpha}$ — период полного оборота точки по эллипсу. Значение этого периода легко получить с помощью интеграла площадей, записав его в виде (см. (2.8))

$$2m\sigma_z = 2m \frac{dS}{dt} = M_0, \quad (2.79)$$

где dS — площадь, очерчиваемая радиусом-вектором точки за время dt . Интегрируя это выражение по полному периоду и учитывая, что площадь эллипса равна πab , найдем

$$2\pi lab = M_0 T.$$

Отсюда, используя (2.75), получим

$$T^2 = \frac{\pi^2}{2} \frac{ma^2}{|E_0|^3} = 4\pi^2 \frac{ma^3}{\alpha}. \quad (2.80)$$

Таким образом, *период обращения по эллипсу зависит только от полной энергии (или от величины большой полуоси) и не зависит от момента (и от величины малой полуоси).*

Уравнение орбиты (2.71), закон площадей (2.79) и соотношение периода и большой полуоси (2.80) являются математическим выражением трех законов Кеплера, установленных им эмпирически примерно в 1609—1619 гг. в результате обработки наблюдений над движением планет. В этих законах утверждалось, что

каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце (первый закон);

секторная скорость каждой планеты относительно Солнца постоянна (второй закон);

отношение квадратов периодов обращения планет к кубам больших полуосей их орбит постоянно и для всех планет одинаково (третий закон).

Заметим, что применительно к движению планет третий закон Кеплера верен приближенно (см. с. 120). Тем не менее открытие законов Кеплера имело очень большое значение. В частности, на их основе Ньютоном был установлен закон всемирного тяготения: допуская, что движение тел в поле тяготения Земли также подчинено законам Кеплера, можно было на основании первого и второго законов утверждать, что величина ускорения тел вблизи поверхности Земли равна (см. пример 1.3)

$$g = \frac{C}{R^2},$$

где R — радиус Земли. Кроме того, из третьего закона Кеплера следовало, что квадрат периода обращения Луны вокруг Земли прямо пропорционален кубу радиуса a лунной (приблизительно круговой) орбиты, т. е.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{C} a^3.$$

Допуская, что постоянные C в последних двух выражениях имеют одинаковые значения, можно было найти следующую формулу для ускорения g :

$$g = \frac{4\pi^2}{R^2} \cdot \frac{a^3}{T^2}. \quad (2.81)$$

Таким образом, ускорение тел вблизи поверхности Земли можно было вычислить как по данным наблюдений за Луной, так и по данным эксперимента, проведенного около земной поверхности. Совпадение этих двух результатов являлось одним из доказательств справедливости закона всемирного тяготения (см. (1.49)).

На основе закона всемирного тяготения и второго закона Ньютона была создана количественная теория движения небесных тел относительно гелиоцентрической системы отсчета. Совпадение наблюдений и выводов этой теории доказало инерциальность гелиоцентрической системы Коперника — Бруно и ее преимущественность над геоцентрической системой Птолемея, что явилось крупным шагом в победе материалистического воззрения на вопросы мироздания.

В случае $\alpha > 0$ и $E = 0$ ($\epsilon = 1$) точка движется по параболе (см. рис. 2.6). Минимальное расстояние, на котором она проходит вблизи центра силы, равно

$$r_{\min} = p/2. \quad (2.82)$$

В этом положении скорость точки максимальна, а по мере удаления точки от центра силы ее скорость стремится к нулю, поскольку при $r \rightarrow \infty$ потенциальная энергия становится исчезающе малой и по условию $E_0 = T + U = 0$.

Закон движения точки по параболе легко получить в параметрическом виде из (2.60):

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{2} (1 + \xi^2), \\ t &= \sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}} \frac{\xi}{2} \left(1 + \frac{\xi^2}{3} \right) \end{aligned} \quad (2.83)$$

(здесь начальное условие выбрано аналогично (2.77)).

В случае движения по гиперболе под воздействием притягивающего центра имеем $\alpha > 0$, $E_0 > 0$ ($\epsilon > 1$). Орбитой при этом будет левая ветвь гиперболы (см. рис. 2.6) с минимальным расстоянием до центра силы, равным

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \epsilon}. \quad (2.84)$$

Учитывая, что полуоси гиперболы связаны с параметром p и эксцентриситетом ϵ гиперболы соотношениями

$$a = \frac{p}{\epsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}, \quad (2.85)$$

с помощью (2.70) находим

$$a = \frac{\alpha}{2E_0}, \quad b = \frac{M_0}{\sqrt{2mE_0}}. \quad (2.86)$$

Закон движения точки по гиперболе в случае $\alpha > 0$ получим (аналогично (2.78)) в виде

$$r = a(\varepsilon \operatorname{ch} \xi - 1), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\varepsilon \operatorname{sh} \xi - \xi) \quad (2.87)$$

(здесь начальные условия также аналогичны (2.77)).

Наконец, приведем формулы для случая движения точки по гиперболе под действием отталкивающего центра ($\alpha < 0$):

$$r_{\min} = \frac{p}{\varepsilon - 1}, \quad a = \frac{|\alpha|}{2E_0}, \quad b = \frac{M_0}{\sqrt{2mE_0}}, \quad (2.88)$$

$$r = a(\varepsilon \operatorname{ch} \xi + 1), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\varepsilon \operatorname{sh} \xi + \xi),$$

орбитой при этом будет правая ветвь гиперболы (см. рис. 2.6).

Пример 2.3. Изменение орбиты космического корабля.

Пусть в момент прекращения работы двигателя космический корабль массы m находился на расстоянии r_0 от центра Земли и имел скорость v_0 , направленную под углом γ_0 к радиусу-вектору корабля r_0 (рис. 2.7). Определить элементы орбиты корабля в плоскости его движения, пренебрегая сопротивлением атмосферы, если напряженность поля тяготения на поверхности Земли равна g , а радиус Земли равен R . Насколько нужно изменить кинетическую энергию корабля в перигее, чтобы он перешел на орбиту приземления, изображенную на рисунке штриховой линией (изменением массы корабля в результате достаточно кратковременной работы двигателя можно пренебречь)?

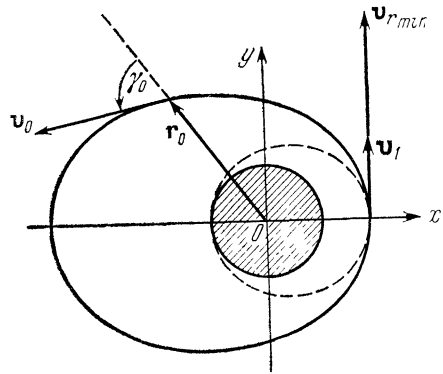


Рис. 2.7

Учитывая лишь силу притяжения корабля Землей и пренебрегая воздействием всех прочих тел, мы можем воспользоваться общим решением задачи о движении точки в центральном поле.

Поместим начало системы координат в центр Земли, так как он является центром силы притяжения. Плоскость Oxy совместим с плоскостью орбиты, сохраняющей свою ориентацию относительно гелиоцентрической системы отсчета, а ось Ox направим на ближайшую к центру Земли точку орбиты — перигей. Вы-

бранную систему можно считать инерциальной для достаточно больших интервалов времени. Выразим постоянные α , E_0 и M_0 , входящие в общее решение задачи о движении точки в центральном поле, через постоянные, заданные в условии примера. Полагая, в частности, в (1.49), что $r_{21} = R$, а массы m_1 и m_2 соответственно равны массе корабля m и массе Земли m_3 , найдем

$$\alpha = \gamma m m_3 = m g R^2.$$

Тогда потенциальная энергия корабля-спутника (см. (2.69)) принимает вид

$$U = - \frac{m g R^2}{r}. \quad (1)$$

Полная энергия и момент импульса спутника в начальный момент времени соответственно равны

$$E_0 = \frac{m}{2} \left(v_0^2 - \frac{2gR^2}{r_0} \right), \quad M_0 = m r_0 v_0 \sin \gamma_0. \quad (2)$$

С помощью этих выражений на основе (2.72) можно убедиться, что траекторией рассматриваемого тела будет

$$\begin{aligned} & \text{гипербола, если } v_0^2 > v_2^2 (R/r_0), \\ & \text{парабола, если } v_0^2 = v_2^2 (R/r_0), \\ & \text{эллипс, если } v_0^2 < v_2^2 (R/r_0), \\ & \text{окружность, если } v_0^2 = v_1^2 (R/r_0) \text{ и } \gamma_0 = \pi/2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $v_1 = \sqrt{gR}$ — первая космическая скорость, а $v_2 = \sqrt{2gR}$ — вторая космическая скорость.

Параметр и эксцентриситет орбиты, выраженные через начальные условия, находим, используя (2.70) и формулы (2) настоящего примера:

$$p = \frac{r_0^2}{gR^2} v_0^2 \sin^2 \gamma_0, \quad \varepsilon = \left[1 + \left(v_0^2 - \frac{2gR^2}{r_0} \right) \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \gamma_0}{g^2 R^4} \right]^{1/2}. \quad (4)$$

С помощью (2.74) и (2.85) получим выражения полуосей, справедливые как в случае эллипса, так и в случае гиперболы:

$$a = \frac{gR^2}{\left| \frac{2gR^2}{r_0} - v_0^2 \right|}, \quad b = \frac{r_0 v_0 \sin \gamma_0}{\left| \frac{2gR^2}{r_0} - v_0^2 \right|^{1/2}}. \quad (5)$$

Наконец, согласно (2.80) период полного оборота спутника по эллипсу равен

$$T = \frac{2\pi gR^3}{\left(\frac{2gR^2}{r_0} - v_0^2\right)^{3/2}}. \quad (6)$$

Если орбита спутника известна, то его положение в любой момент времени определяется законом (2.78). Величину скорости как функцию r легко найти из интеграла энергии

$$v^2 = v_0^2 + 2gR^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \quad (7)$$

Направление же скорости можно определить, отыскивая с помощью интегралов момента и энергии величины \dot{r} и $r\dot{\varphi}$ как функции r :

$$\dot{r} = \left[v_0^2 + 2gR^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) - \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \gamma_0}{r^2} \right]^{1/2}, \quad (8)$$

$$r\dot{\varphi} = \frac{r_0 v_0 \sin \gamma_0}{r},$$

поскольку отношение этих функций дает $\operatorname{tg} \gamma_0$ как функцию r .

Теперь найдем изменение кинетической энергии, при котором космический корабль перейдет на орбиту приземления. Так как в перигее радиальная составляющая скорости корабля равна нулю, а расстояние до центра силы минимально, то из формулы (8) найдем

$$v|_{r_{\min}} = r\dot{\varphi}|_{r_{\min}} = \frac{r_0 v_0 \sin \gamma_0}{r_{\min}}. \quad (9)$$

Эту скорость нужно изменить так, чтобы корабль стал двигаться по эллипсу, касающемуся поверхности Земли. Большая полуось новой орбиты при этом будет равна

$$a_1 = \frac{r_{\min} + R}{2}.$$

Учитывая, что $a_1 = \alpha/2|E_1|$ (см. (2.75)), определим полную энергию

$$|E_1| = \frac{mgR^2}{r_{\min} + R},$$

которой корабль должен обладать при движении по заданной орбите приземления. Затем, пользуясь сохранением полной энергии корабля, движущегося по новой орбите, получаем значение кинетической энергии корабля на орбите приземления в точке $r = r_{\min}$

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgR^2 \left(\frac{1}{r_{\min}} - \frac{1}{r_{\min} + R} \right). \quad (10)$$

Наконец, из формул (9) и (10) находим требуемое изменение кинетической энергии

$$\Delta T = \frac{m}{2} \left\{ \frac{r_0^2}{r_{\min}^2} v_0^2 \sin^2 \gamma_0 - 2gR^2 \left(\frac{1}{r_{\min}} - \frac{1}{r_{\min} + R} \right) \right\},$$

где $r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon}$, а p и ε определены формулами (4) настоящего примера.

Пример 2.4. Движение по баллистической траектории.

Пусть достаточно малое тело массы m запускается с поверхности Земли со скоростью $v_0 < v_2$ ($v_2 = \sqrt{2gR}$). Пренебрегая сопротивлением атмосферы, определить максимальную высоту, дальность и время полета тела (под дальностью будем понимать длину дуги большого круга, которая по поверхности Земли соединяет точки вылета и падения, — см. рис. 2.8).

Этот пример является частным случаем примера 2.3, поэтому выбор системы координат и предыдущие результаты остаются в силе. В частности, в рассматриваемом примере тело будет двигаться по отрезку эллиптической орбиты, пересекающей поверхность Земли в точках вылета и падения.

Максимальная высота подъема тела над поверхностью Земли равна

$$h_{\max} = r_{\max} - R,$$

где r_{\max} определяется одной из формул (2.73), а значения параметра и эксцентриситета орбиты находятся с помощью формулы (4) примера 2.3:

$$p = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \gamma_0,$$

$$\varepsilon = \left[1 + (v_0^2 - 2gR) \frac{v_0^2}{g^2 R^2} \sin^2 \gamma_0 \right]^{1/2}.$$

Используя эти соотношения, получим

$$h_{\max} = R \frac{v_0^2 - gR(1 - \varepsilon)}{2gR - v_0^2}.$$

Угол φ_0 между осью Ox и направлением на точку вылета находится из уравнения орбиты (2.71), в котором r полагается равным R :

$$\varphi_0 = \arccos \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{p}{R} - 1 \right).$$

Зная φ_0 , получим угол между направлениями на точки вылета и падения

$$\Delta\varphi = 2(\pi - \varphi_0),$$

отсюда определим дальность полета

$$l = R\Delta\varphi = 2\pi R \times \left[1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{p}{R} - 1 \right) \right].$$

Время полета получим, используя решение (2.78). Учитывая,

что в этом решении приняты начальные условия (2.77), момент

t_0 начала движения тела с поверхности Земли и соответствующее ему значение параметра ξ_0 определим так:

$$R = a(1 - \varepsilon \cos \xi_0), \quad t_0 = \frac{T}{2\pi} (\xi_0 - \varepsilon \sin \xi_0),$$

где $T = \frac{2\pi g R^2}{(2gR - v_0^2)^{3/2}}$ (см. формулу (6) примера 2.3). Момент

прохождения апогея, т. е. наиболее удаленной от центра Земли точки эллиптической орбиты, будет равен $(T/2) - t_0$. Учитывая, что время полета точки от места запуска до апогея равно времени полета от апогея до места падения, для полного времени полета находим

$$\Delta t = 2 \left(\frac{T}{2} - t_0 \right) = T \left[1 - \frac{1}{\pi} (\xi_0 - \varepsilon \sin \xi_0) \right],$$

где

$$\xi_0 = \arccos \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{R}{a} \right), \quad a = \frac{gR^2}{2gR - v_0^2}$$

(см. формулу (5) примера 2.3).

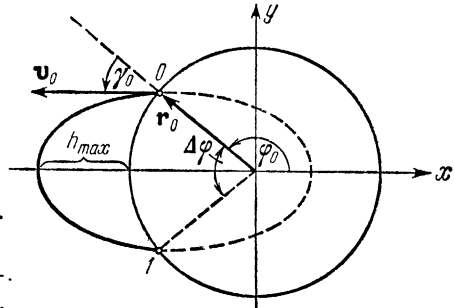


Рис. 28

§ 2.5. Движение центра масс; законы изменения и сохранения импульса системы

Как будет ясно из дальнейшего, закон изменения импульса механической системы тесно связан с понятием о центре масс. Центром масс или центром инерции механической системы называется воображаемая точка, которая как бы обладает массой, равной массе всей системы, и положение которой определяется радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_m = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{m}, \quad (2.89)$$

где m_i и \mathbf{r}_i — масса и радиус-вектор i -той точки системы, $m = \sum_{i=1}^N m_i$ — масса всей системы, а N — число материальных точек системы. Скорость центра масс \mathbf{v}_m можно получить, продифференцировав левую и правую части (2.89) по времени:

$$\mathbf{v}_m = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i}{m}. \quad (2.90)$$

Аналогично найдем ускорение $\dot{\mathbf{w}}_m$ центра масс:

$$\mathbf{w}_m = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{w}_i}{m}. \quad (2.91)$$

Из определений (2.89), (2.90) и (2.91) вытекают некоторые свойства центра масс, его скорости и ускорения. Например, скорость и ускорение, приобретаемые центром масс в результате движения i -той точки (см. рис. 2.9, на котором изображена система двух точек), будут равны $\frac{m_i}{m} \mathbf{v}_i$ и $\frac{m_i}{m} \mathbf{w}_i$ соответственно. Таким образом, скорость и ускорение центра масс, связанные с движением только i -той точки, параллельны соответственно скорости \mathbf{v}_i и ускорению \mathbf{w}_i этой точки и в m/m_i раз меньше их по величине.

Импульсом механической системы \mathbf{P} называется сумма импульсов точек системы

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i, \quad (2.92)$$

где $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ — импульс i -той точки. Согласно (2.90) импульс системы равен массе всей системы, умноженной на скорость центра масс, т. е.

$$\mathbf{P} = m \mathbf{v}_m, \quad (2.93)$$

а согласно (2.91) производная импульса по времени равна массе системы, умноженной на ускорение центра масс:

$$\dot{\mathbf{P}} = m \mathbf{w}_m. \quad (2.94)$$

Заметим, что определение импульса системы в виде (2.93) аналогично определению импульса одной материальной точки.

Уравнение движения центра масс можно получить с по-

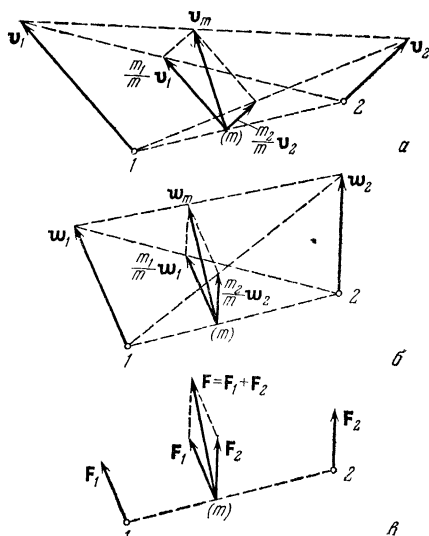


Рис. 2.9

мощью уравнений движения материальных точек (1.59), так как движение центра масс — этой воображаемой точки — обусловлено движением отдельных реальных точек механической системы. Из (2.91) следует, что

$$m \mathbf{w}_m = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{w}_i; \quad (2.95)$$

однако в инерциальной системе отсчета произведение массы какой-либо точки на ее ускорение согласно второму закону Ньютона должно быть равно силе, приложенной к этой точке, т. е.

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i. \quad (2.96)$$

Следовательно, произведение массы всей системы на ускорение центра масс ввиду (2.95) должно быть равно сумме всех сил, действующих на отдельные точки системы (см. рис. 2.9, в):

$$m \mathbf{w}_m = \mathbf{F}, \quad (2.97)$$

где $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$, а \mathbf{F}_i — сила, действующая на i -тую точку.

Среди сил, действующих на точки системы, есть как внутренние, так и внешние силы. *Под внутренними силами понимают силы, действующие между точками данной механической системы, а под внешними — силы, действующие на точки данной системы со стороны тел, не входящих в эту систему.* Деление сил на внутренние и внешние зависит от того, какую систему мы считаем *данной*, движение *какой* системы изучается. Если система выбрана, то силу, действующую на ее i -тую точку, всегда можно записать в виде

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{in}} + \mathbf{F}_i^{\text{e}}, \quad (2.98)$$

где $\mathbf{F}_i^{\text{in}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ji}$ — сумма внутренних сил, действующих на i -тую точку, \mathbf{F}_{ji} — сила, действующая на i -тую точку со стороны j -той точки системы, а \mathbf{F}_i^{e} — суммарная внешняя сила, действующая на i -тую точку. Складывая все силы (2.98), действующие на точки системы, находим

$$\mathbf{F} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ji} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{e}}. \quad (2.99)$$

Однако *сумма всех внутренних сил равна нулю, поскольку силы взаимодействия каждой пары точек равны по величине и противоположны по направлению.* Действительно, представляя сумму всех внутренних сил \mathbf{F}^{in} в виде

$$\mathbf{F}^{\text{in}} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^N (\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij}) \quad (2.100)$$

и применяя третий закон Ньютона к каждой паре точек системы (см. (1.60)), найдем

$$\mathbf{F}^{\text{in}} = 0. \quad (2.101)$$

Таким образом, из уравнения (2.97) получаем *уравнение движения центра масс относительно инерциальной системы отсчета*

$$m\mathbf{w}_m = \mathbf{F}^{\text{e}}, \quad (2.102)$$

где $\mathbf{F}^{\text{e}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{e}}$ — *сумма всех внешних сил, действующих на точки системы.* Уравнение (2.102) ввиду соотношения (2.94) приводит к закону изменения импульса

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^e. \quad (2.103)$$

На основании (2.103) в полной аналогии со случаем одной материальной точки (см. (2.5)) можно утверждать, что *если проекция суммы внешних сил на некоторую неподвижную ось в любой момент времени равна нулю, то проекция импульса системы или проекция скорости центра масс системы на ту же ось сохраняется*. Например, если

$$F_z^e = \sum_{i=1}^N F_{iz}^e = 0,$$

то

$$P_z = \sum_{i=1}^N m_i \dot{z}_i = P_{z0}, \quad (2.104)$$

или

$$\dot{z}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \dot{z}_i = \dot{z}_{m0}.$$

Следовательно, в направлении оси Oz центр масс системы движется равномерно

$$z_m = \dot{z}_{m0}t + z_{m0}. \quad (2.105)$$

Теперь рассмотрим замкнутую, или изолированную, систему, т. е. систему, взаимодействием которой с прочими не входящими в нее телами можно пренебречь*. Для такой системы все внешние силы равны нулю:

$$\mathbf{F}_i^e = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

и поэтому

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{P}_0 \quad (2.106)$$

или

$$\mathbf{v}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{m0},$$

т. е. имеет место закон сохранения импульса замкнутой системы.

* В физике термин «замкнутая система» является весьма распространенным.

Центр масс замкнутой системы движется равномерно и прямолинейно, а ее внутренние силы не могут изменить скорости центра масс (или импульса системы). Например, солнечная система с определенной степенью точности может рассматриваться как замкнутая, и поэтому силы взаимодействия между ее телами не влияют на равномерное и прямолинейное движение центра масс системы, хотя все тела, входящие в солнечную систему, движутся ускоренно.

В случае незамкнутой системы внутренние силы, вообще говоря, влияют на изменение импульса и ускорение центра масс системы, если сумма внешних сил зависит от положения или скоростей точек системы. Действительно, изменение импульса системы определяется вектором \mathbf{F}^e — суммой всех внешних сил, действующих на систему (см. (2.103)), причем вектор \mathbf{F}^e считается известной функцией радиусов-векторов точек и их скоростей. Однако радиусы-векторы и скорости точек изменяются под воздействием как внешних, так и внутренних сил согласно уравнениям движения

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{\text{in}} + \mathbf{F}_i^e \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Вместе с тем изменяются аргументы вектора \mathbf{F}^e и как следствие этого изменяется сам вектор \mathbf{F}^e . Влияние внутренних сил на ускорение центра масс подробно проиллюстрировано на примере 2.6.

Подчеркнем, что закон сохранения импульса справедлив и для таких замкнутых систем, поведение которых не подчинено уравнениям Ньютона. Например, при исследовании движения системы заряженных частиц, среди внутренних сил которой есть электромагнитные силы, было обнаружено излучение электромагнитных волн. Это излучение, как оказалось, обладает импульсом, в связи с чем импульс собственно зарядов не сохраняется. Однако суммарный импульс зарядов и электромагнитного поля остается неизменным, т. е. имеет место закон сохранения импульса замкнутой системы, под которой в данном случае следует понимать совокупность зарядов и поля излучения.

Пример 2.5. *Движение центра масс в однородном поле.*

В однородном постоянном электрическом поле с напряженностью \mathcal{E} движутся две заряженные точки. Их массы и заряды соответственно равны m_1, m_2 и e_1, e_2 . Найти положение центра масс как функцию времени, если начальные значения \mathbf{r}_{m0} и \mathbf{v}_{m0} известны.

Направляя ось Ox вдоль вектора \mathcal{E} и учитывая, что внутренние силы электростатического взаимодействия подчинены третьему закону Ньютона, получим уравнение (2.103) в проекциях на декартовы оси

$$m\ddot{x}_m = e_1\mathcal{E} + e_2\mathcal{E}, \quad \ddot{y}_m = 0, \quad \ddot{z}_m = 0.$$

Интегрируя эту систему, найдем

$$x_m = \frac{e_1 + e_2}{m_1 + m_2} \mathcal{E} \frac{t^2}{2} + \dot{x}_{m0}t + x_{m0},$$

$$y_m = \dot{y}_{m0}t + y_{m0}, \quad z_m = \dot{z}_{m0}t + z_{m0}.$$

Сопоставляя это решение с решением задачи о движении одного заряда (см. с. 51), мы видим, что воображаемая точка — центр масс двух зарядов — движется как материальная точка с массой $m_1 + m_2$ и зарядом $e_1 + e_2$. Что касается движения каждого из зарядов, то без решения системы уравнений (1.59) найти закон такого движения нельзя.

Пример 2.6. Движение центра масс в неоднородном поле.

Две точки с массами m_1 и m_2 движутся в силовом поле

$$F^e = \kappa r$$

(здесь $\kappa > 0$, а r — радиус-вектор точки пространства в инерциальной системе отсчета с началом в центре силы). Найти положение центра масс системы как функцию времени в двух случаях: а) пренебрегая взаимодействием точек друг с другом; б) предполагая, что внутренними силами являются силы притяжения, прямо пропорциональные расстоянию между точками с коэффициентом пропорциональности κ .

В обоих случаях движение центра масс определяется одним и тем же уравнением (2.102)

$$m\ddot{r}_m = F_1^e + F_2^e = \kappa(r_1 + r_2), \quad (1)$$

где $m = m_1 + m_2$. Однако уравнения движения точек системы будут различными. В случае (а)

$$m_1\ddot{r}_1 = \kappa r_1, \quad m_2\ddot{r}_2 = \kappa r_2, \quad (2)$$

а в случае (б)

$$m_1\ddot{r}_1 = F_{21} + \kappa r_1, \quad m_2\ddot{r}_2 = F_{12} + \kappa r_2, \quad (3)$$

где $F_{21} = -\kappa(r_1 - r_2) = -F_{12}$.

Перепишем системы (2) и (3) в удобном для интегрирования виде:

$$а) \quad \ddot{r}_1 = k_1^2 r_1, \quad \ddot{r}_2 = k_2^2 r_2; \quad (4)$$

$$б) \quad \ddot{r}_1 = k_1^2 r_2, \quad \ddot{r}_2 = k_2^2 r_1, \quad (5)$$

где $k_1^2 = \frac{\kappa}{m_1}$, $k_2^2 = \frac{\kappa}{m_2}$. Решение этих систем в декартовых координатах не представляет затруднений. Найдем, например, решение системы уравнений, описывающих движение точек в направлении оси Ox :

$$a) \ddot{x}_1 = k_1^2 x_1, \quad \ddot{x}_2 = k_2^2 x_2; \quad (6)$$

$$б) \ddot{x}_1 = k_1^2 x_2, \quad \ddot{x}_2 = k_2^2 x_1. \quad (7)$$

Решение системы (6) имеет вид

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad (8)$$

где

$$\varphi_1(t) = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{-k_1 t}, \quad \varphi_2(t) = B_1 e^{k_2 t} + B_2 e^{-k_2 t},$$

а A_1 и A_2 , B_1 и B_2 — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями. Учитывая (8), из уравнения (1) найдем проекцию ускорения центра масс невзаимодействующих точек как функцию времени

$$\ddot{x}_m(t) = \frac{\kappa}{m} [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)], \quad (9)$$

а из определения центра масс и решения (8) легко получим

$$x_n(t) = \frac{1}{m} [m_1 \varphi_1(t) + m_2 \varphi_2(t)]. \quad (10)$$

Умножая правую и левую части второго из уравнений (7) на отношение k_1/k_2 и затем один раз складывая, а второй раз вычитая результат умножения из первого уравнения системы (7), приходим к уравнениям

$$\ddot{\psi} = k_1 k_2 \psi, \quad \ddot{\theta} = -k_1 k_2 \theta, \quad (11)$$

где $\psi = x_1 + \frac{k_1}{k_2} x_2$, $\theta = x_1 - \frac{k_1}{k_2} x_2$.

Решением системы (11) являются функции

$$\psi(t) = C_1 e^{\sqrt{k_1 k_2} \cdot t} + C_2 e^{-\sqrt{k_1 k_2} \cdot t},$$

$$\theta(t) = a \cos(\sqrt{k_1 k_2} \cdot t + \alpha).$$

Отсюда, используя соотношения между x_1 , x_2 и ψ , θ , находим

$$x_1(t) = \frac{1}{2} [\psi(t) + \theta(t)], \quad x_2(t) = \frac{k_2}{2k_1} [\psi(t) - \theta(t)].$$

Это решение дает возможность определить проекцию ускорения центра масс и проекцию центра масс на ось Ox в случае взаимодействующих точек:

$$\ddot{x}_m(t) = \frac{\kappa}{2m} \left[\left(1 + \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \right) \psi(t) + \left(1 - \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \right) \theta(t) \right], \quad (12)$$

$$x_m(t) = \frac{1}{2m} [(m_1 + \sqrt{m_1 m_2}) \psi(t) + (m_1 - \sqrt{m_1 m_2}) \theta(t)]. \quad (13)$$

Решение для других проекций ускорения центра масс аналогично полученному.

Из формул (9) и (12) видно, что в отсутствие внешних сил скорость центра масс становится постоянной и внутренние силы не могут ее изменить. Однако если внешняя неоднородная сила отлична от нуля, то внутренние силы влияют на движение центра масс (сравните (10) и (13)).

Пример 2.7. *Движение тела переменной массы; задача Циолковского.*

В современной технике большое практическое значение имеет задача о движении тела переменной массы. Пусть изменение массы тела происходит за счет непрерывного отделения от тела некоторых его частей, причем за бесконечно малый элемент времени отделяется частица бесконечно малой массы. Однако скорость отделившейся частицы отличается от скорости тела на конечную величину. Найти уравнение движения тела (в предположении, что тело и отделяющиеся частицы можно считать материальными точками).

Отделение частиц от тела происходит за счет внутренних сил системы тело — частица. Следовательно, изменение импульса рассматриваемой системы подчинено закону (2.103). Подсчитаем это изменение. В момент времени t (до отделения частицы от тела) импульс системы равен

$$\mathbf{P}(t) = m\mathbf{v},$$

где m — масса тела в момент t , \mathbf{v} — скорость тела в тот же момент времени относительно некоторой инерциальной системы отсчета. В момент времени $t+dt$ (после отделения частицы) импульс системы равен сумме импульса тела и импульса частицы:

$$\mathbf{P}(t+dt) = (m - |dm|)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + |dm|\mathbf{v}_1,$$

где $d\mathbf{v}$ — изменение скорости тела за время dt , dm — уменьшение массы тела, соответственно $|dm|$ — масса отделившейся частицы, \mathbf{v}_1 — скорость этой частицы относительно инерциальной системы отсчета.

Следовательно, изменение импульса системы с точностью до бесконечно малых второго порядка равно

$$d\mathbf{P} = m d\mathbf{v} + |dm|(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}).$$

Подставляя это выражение в (2.103), получим *уравнение движения точки с переменной массой*, т. е. уравнение Мещерского

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^e + \frac{dm}{dt} \mathbf{u}, \quad (1)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$ — скорость отделяющихся частиц относительно тела, \mathbf{F}^e — внешняя сила, действующая на тело, а $\frac{dm}{dt} < 0$. Нетрудно убедиться, что в случае присоединяющихся к телу частиц ($\frac{dm}{dt} > 0$) справедливо то же уравнение (1).

В качестве примера на решение уравнения (1) рассмотрим задачу Циолковского. Пусть ракета движется в отсутствие внешнего поля, скорость \mathbf{u} отделяющихся частиц сгорающего топлива постоянна и направлена противоположно \mathbf{v}_0 — скорости тела в начальный момент времени. Найти скорость, которую приобретает тело за счет конечного изменения своей массы.

Умножая правую и левую части уравнения (1) на dt и проектируя их на ось, направленную по вектору \mathbf{v}_0 , получим

$$m dv = -u dm,$$

откуда находим, что

$$v = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m}. \quad (2)$$

Таким образом, скорость, приобретаемая телом, зависит только от величины относительной скорости отделяющихся частиц и от изменения массы тела и не зависит от того, по какому закону изменялась масса тела.

§ 2.6. Законы изменения и сохранения кинетического момента системы

Умножая каждое из уравнений движения (1.59) векторно слева на \mathbf{r}_i — радиус-вектор соответствующей точки и учитывая, что $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{in}} + \mathbf{F}_i^e$, получим уравнение, определяющее изменение момента импульса i -той точки.

$$\dot{\mathbf{M}}_i = \mathbf{L}_i^{\text{in}} + \mathbf{L}_i^e, \quad (2.107)$$

где $\mathbf{L}_i^{\text{in}} = [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i^{\text{in}}]$ — момент внутренней силы, действующей на i -тую точку, $\mathbf{L}_i^e = [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i^e]$ — момент внешней силы, действующей на i -тую точку. Суммируя (2.107) по всем точкам, находим

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i^{\text{in}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i^{\text{e}}, \quad (2.108)$$

где $\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i$ — кинетический момент системы, равный сумме моментов импульсов всех точек системы. Учтем далее, что силы взаимодействия между каждой парой точек согласно третьему закону Ньютона равны по величине, противоположны по направлению и расположены на прямой, соединяющей взаимодействующие точки. С этой целью запишем момент внутренних сил в виде суммы моментов сил по всем парам взаимодействующих точек

$$\sum_{i=1}^N \left[\mathbf{r}_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ji} \right] = \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^N \{ [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_{ji}] + [\mathbf{r}_j \mathbf{F}_{ij}] \}. \quad (2.109)$$

Каждый член последней суммы в силу третьего закона Ньютона равняется нулю в любой системе отсчета (см. рис. 1.17), т. е.

$$[\mathbf{r}_i \mathbf{F}_{ji}] + [\mathbf{r}_j \mathbf{F}_{ij}] = [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{F}_{ji}] = 0, \quad (2.110)$$

так как вектор \mathbf{F}_{ji} коллинеарен вектору $\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$.

Учитывая (2.110) и (2.109), из (2.108) найдем, что производная кинетического момента системы по времени равна сумме моментов внешних сил, действующих на точки системы (закон изменения кинетического момента системы):

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}^{\text{e}}, \quad (2.111)$$

где

$$\mathbf{L}^{\text{e}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i^{\text{e}}.$$

Из (2.111) вытекает (сравните с (2.8)): если проекция суммы моментов внешних сил на некоторую неподвижную ось для любого момента времени равна нулю, то проекция кинетического момента системы на ту же ось сохраняется; например, если

$$L_z^{\text{e}} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i^{\text{e}}]_z = 0,$$

то

$$M_z = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i]_z = M_{z0}. \quad (2.112)$$

Учитывая определение секторной скорости (1.11), последний интеграл можно представить в виде интеграла площадей

$$2 \sum_{i=1}^N m_i \sigma_{iz} = M_{z0}, \quad (2.113)$$

из которого следует сохранение суммы произведений масс точек на площади, описываемые за любые одинаковые интервалы времени проекциями радиусов-векторов этих точек на плоскость Oxy .

(См. рис. 2.10, на котором изображены проекции площадей, описываемых радиусами-векторами двух точек за интервал времени Δt ; если для системы двух точек $L_z^e = 0$, то сумма произведений масс точек на соответствующие площади сохранится и для любого другого интервала времени, равного Δt .)

В случае замкнутой системы все силы $\mathbf{F}_i^e = 0$ и поэтому

$$L^e = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i^e] = 0,$$

т. е. согласно (2.111) будет иметь место закон сохранения кинетического момента замкнутой системы:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i] = \mathbf{M}_0. \quad (2.114)$$

Таким образом, момент замкнутой системы не может изменяться под действием внутренних сил, поскольку они подчинены третьему закону Ньютона. Однако ориентация такой системы под действием внутренних сил может изменяться. Действительно, под воздействием внутренних сил может произойти перемещение некоторых точек системы и изменение их скоростей. При этом другие точки системы также переместятся и изменят скорости, т. е. произойдет переориентация системы. Вместе с тем момент всей системы останется неизменным.

В случае незамкнутых систем внутренние силы, вообще говоря, могут влиять на изменение кинетического момента, если сумма

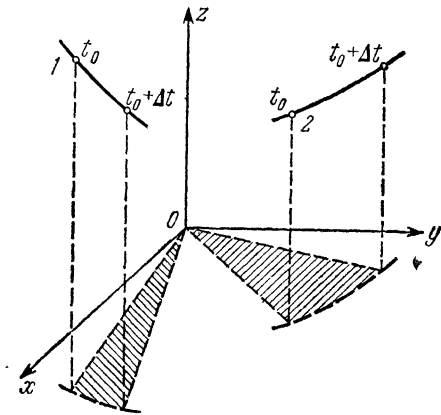


Рис. 2.10

моментов внешних сил зависит от положений и скоростей точек системы (причина этого уже была выяснена при рассмотрении закона изменения импульса на с. 98).

Пример 2.8. *Изменение моментов импульсов точек замкнутых систем.*

Рассмотрим две замкнутые системы, каждая из которых состоит из $N \geq 3$ взаимодействующих точек. Внутренними силами первой системы являются силы притяжения, прямо пропорциональные расстоянию между взаимодействующими точками и произведению масс этих точек (коэффициент пропорциональности κ). Точки второй системы взаимодействуют по закону всемирного тяготения. Сравним изменения моментов импульсов точек обеих систем.

Так как обе системы замкнутые, то их кинетические моменты сохраняются относительно любой инерциальной системы отсчета. Выбирая инерциальные системы с началами в центрах масс рассматриваемых механических систем, для каждой из них получим

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_0. \quad (1)$$

Изменение момента импульса i -той точки определяется моментом внутренних сил согласно уравнению (2.107)

$$\dot{\mathbf{M}}_i = \mathbf{L}_i^{\text{in}} = \left[\mathbf{r}_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ji} \right], \quad (2)$$

где \mathbf{F}_{ji} — сила, с которой j -тая точка действует на i -тую точку. Для первой системы

$$\mathbf{F}_{ji} = -\kappa m_j m_i \mathbf{r}_{ji}, \quad (3)$$

где $\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ — вектор, направленный от j -той точки к i -той точке, m_j и m_i — массы этих точек; для второй системы

$$\mathbf{F}_{ji} = -\gamma \frac{m_j m_i}{r_{ji}^3} \mathbf{r}_{ji}. \quad (4)$$

Используя (3), найдем момент сил, действующих на i -тую точку первой системы:

$$\mathbf{L}_i^{\text{in}} = \kappa m_i \left[\mathbf{r}_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_j \mathbf{r}_j \right].$$

Учитывая, что начало отсчета помещено в центр масс ($\mathbf{r}_m = 0$), согласно (2.89) получаем

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_j \mathbf{r}_j = -m_i \mathbf{r}_i,$$

и, таким образом, для точек первой системы

$$\mathbf{L}_i^{\text{in}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Следовательно, сохраняется не только кинетический момент всей системы, но и момент импульса каждой точки:

$$\mathbf{M}_i = m_i [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i] = \mathbf{M}_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Отсюда вытекает, что точки первой системы при любых начальных условиях движутся каждая в своей плоскости постоянной ориентации.

В системе гравитирующих точек момент сил, действующих на i -тую точку, отличен от нуля:

$$\mathbf{L}_i^{\text{in}} = \gamma m_i \left[\mathbf{r}_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{m_j}{r_{ji}^2} \mathbf{r}_j \right) \right] \neq 0 \quad (N \geq 3).$$

Следовательно, моменты импульсов точек не сохраняются, а при произвольных начальных условиях изменяются как по величине, так и по направлению. Последнее означает, что движение гравитирующих масс при $N \geq 3$, вообще говоря, неплоское. Например, момент каждой планеты солнечной системы изменяется. Но поскольку масса Солнца значительно больше массы любой планеты, то воздействие планет друг на друга весьма мало по сравнению с воздействием Солнца на планеты. Поэтому в любой момент времени картину движения можно представить так: каждая планета движется по определенному эллипсу только под воздействием Солнца, а влияние всех прочих планет сводится к медленному изменению характеристик этого эллипса. Величины параметров, эксцентриситетов и наклонов орбит различных планет взаимосвязаны между собой, и эту взаимосвязь дает закон сохранения кинетического момента всей системы.

§ 2.7. Законы изменения и сохранения энергии системы

Умножим i -тое уравнение системы (1.59) скалярно на перемещение $d\mathbf{r}_i$ соответствующей точки и учтем разделение сил на внутренние и внешние. Тогда аналогично тому, как было получено (2.17), получим выражение для изменения кинетической энергии i -той точки

$$dT_i = dA_i^{\text{in}} + dA_i^{\text{e}}, \quad (2.115)$$

где T_i — кинетическая энергия i -той точки, dA_i^{in} и dA_i^{e} — работы внутренней и внешней сил на элементарном перемещении i -той точки соответственно. Суммируя (2.115) по всем точкам, находим

$$dT = dA^{\text{in}} + dA^{\text{e}}, \quad (2.116)$$

где $T = \sum_{i=1}^N T_i$ — кинетическая энергия системы,

равная сумме кинетических энергий точек, $dA^{\text{in}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{in}} d\mathbf{r}_i$ —

элементарная работа всех внутренних сил, $dA^{\text{e}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{e}} d\mathbf{r}_i$ —

элементарная работа всех внешних сил. Итак, *дифференциал кинетической энергии системы равен элементарной работе всех внутренних и внешних сил, действующих на точки системы.*

В отличие от изменений импульса и кинетического момента *изменение кинетической энергии зависит как от внешних, так и от внутренних сил.* Чтобы убедиться в этом, используем третий закон Ньютона и представим работу внутренних сил в виде

$$dA^{\text{in}} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j < i}}^N \{\mathbf{F}_{ji} d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ij} d\mathbf{r}_j\} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j < i}}^N \mathbf{F}_{ji} (d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j). \quad (2.117)$$

Поскольку перемещения различных точек под воздействием даже одинаковых сил, вообще говоря, различны, т. е.

$$d\mathbf{r}_i \neq d\mathbf{r}_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j),$$

то

$$dA^{\text{in}} \neq 0. \quad (2.118)$$

Теперь рассмотрим закон изменения кинетической энергии (2.116) в предположении, что сумма всех внешних сил, действующих на i -тую точку системы, и сумма всех внутренних сил, действующих на ту же точку, соответственно равны:

$$\mathbf{F}_i^{\text{e}} = \mathbf{F}_i^{\text{e,p}} + \mathbf{F}_i^{\text{e,g}} + \mathbf{F}_i^{\text{e,d}}, \quad \mathbf{F}_i^{\text{in}} = \mathbf{F}_i^{\text{in,p}} + \mathbf{F}_i^{\text{in,d}} \quad (2.119)$$

(здесь индексами p, g, d обозначены соответственно потенциальные, гироскопические и диссипативные силы). Учитывая, что гироскопические силы не совершают работы, т. е.

$$\mathbf{F}_i^{\text{e,g}} d\mathbf{r}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.120)$$

(см. (2.38)), найдем, что

$$dA^e = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{e,p} d\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{e,d} d\mathbf{r}_i, \quad (2.121)$$

$$dA^{in} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{in,p} d\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{in,d} d\mathbf{r}_i.$$

Для потенциальных сил имеем

$$\mathbf{F}_i^{e,p} = -\nabla_i U_i^e, \quad U_i^e = -\int \mathbf{F}_i^{e,p} d\mathbf{r}_i + C \quad (i = 1, 2, \dots, N); \quad (2.122)$$

здесь $U_i^e(\mathbf{r}_i, t)$ — потенциальная энергия i -той точки во внешнем потенциальном поле, а символом ∇_i обозначен оператор «набла», где дифференцирование производится по координатам i -той точки (см. с. 67). Используя (2.122), получим выражение для работы внешних потенциальных сил (см. (2.34)):

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{e,p} d\mathbf{r}_i = -dU^e + \frac{\partial U^e}{\partial t} dt, \quad (2.123)$$

где $U^e = \sum_{i=1}^N U_i^e$ — потенциальная энергия системы во внешних полях.

Предположим, что потенциальная энергия взаимодействия любой пары точек системы задается функцией

$$U_{ij} = U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (2.124)$$

Тогда для потенциальных сил взаимодействия точек находим

$$\mathbf{F}_{ji}^p = -\nabla_i U_{ij}, \quad \mathbf{F}_{ij}^p = -\nabla_j U_{ij}. \quad (2.125)$$

Нетрудно убедиться, что эти силы удовлетворяют закону действия и противодействия, а их элементарная работа равна

$$\mathbf{F}_{ji}^p d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ij}^p d\mathbf{r}_j = -dU_{ij}. \quad (2.126)$$

Суммируя (2.126) по всем парам точек системы, получим работу всех внутренних потенциальных сил в виде

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{in,p} d\mathbf{r}_i = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \{\mathbf{F}_{ji}^p d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ij}^p d\mathbf{r}_j\} = -dU^{in}, \quad (2.127)$$

где $U^{in} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N U_{ij}$ — внутренняя потенциальная энергия системы.

Потенциальную энергию U системы определяют как сумму ее потенциальной энергии во внешних полях и внутренней потенциальной энергии:

$$U = U^e + U^{\text{in}}. \quad (2.128)$$

При допущениях (2.122) и (2.124) потенциальная энергия системы имеет вид

$$U = \sum_{i=1}^N U_i^e(\mathbf{r}_i, t) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^N U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (2.129)$$

Полная механическая энергия E системы (или, кратко, энергия системы) определяется как сумма кинетической и потенциальной энергий системы

$$E = T + U. \quad (2.130)$$

Основываясь на законе изменения кинетической энергии (2.116) и используя (2.121), (2.123), (2.127) и (2.130), получим

$$dE = \frac{\partial U^e}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{d}} d\mathbf{r}_i, \quad (2.131)$$

где $\mathbf{F}_i^{\text{d}} = \mathbf{F}_i^{\text{in}, \text{d}} + \mathbf{F}_i^{\text{e}, \text{d}}$ — сумма внутренних и внешних диссипативных сил, действующих на i -тую точку. Разделим левую и правую части (2.131) на элемент времени dt ; тогда найдем, что полная производная механической энергии системы по времени равна сумме частной производной потенциальной энергии системы во внешних полях по времени и мощности диссипативных внутренних и внешних сил, действующих на точки системы:

$$\dot{E} = \frac{\partial U^e}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{d}} \mathbf{v}_i. \quad (2.132)$$

С помощью этого закона изменения механической энергии системы относительно инерциальной системы отсчета получим закон сохранения механической энергии системы. Действительно, если потенциальная энергия системы во внешних полях явно от времени не зависит, а диссипативные силы (внешние и внутренние) отсутствуют, т. е. если

$$\frac{\partial U^e}{\partial t} = 0 \text{ и } \mathbf{F}_i^{\text{d}} = 0 \text{ (} i = 1, 2, \dots, N \text{),} \quad (2.133)$$

то механическая энергия системы сохраняется:

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{i=1}^N U_i^e + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N U_{ij} = E_0. \quad (2.134)$$

Такую систему называют консервативной.

Энергия может сохраняться также и в том случае, когда убыль энергии за счет диссипативных сил компенсируется поступлением энергии в систему. Тогда

$$\frac{\partial U^e}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^d \mathbf{v}_i = 0, \quad E = E_0, \quad (2.135)$$

причем

$$\frac{\partial U^e}{\partial t} > 0, \quad \text{а} \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^d \mathbf{v}_i < 0$$

(см. (2.40)).

Механическая энергия замкнутой системы сохраняется, если внутренние диссипативные силы отсутствуют:

$$E = T + U^{\text{in}} = E_0. \quad (2.136)$$

Если же внутренние диссипативные силы отличны от нуля, то механическая энергия замкнутой системы убывает, т. е.

$$\dot{E} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{in},d} \mathbf{v}_i < 0, \quad (2.137)$$

где $E = T + U^{\text{in}}$. Однако это не означает исчезновения энергии: наличие диссипативных сил приводит к превращению механической энергии в определенное количество теплоты. В связи с этим подчеркнем, что закон сохранения механической энергии является частным случаем всеобщего закона сохранения и превращения энергии всех форм движения материи, согласно которому формы движения «при известных обстоятельствах... переходят друг в друга», «и притом так, что данному количеству энергии в одной форме всегда соответствует определенное количество энергии в какой-либо другой форме»*. Например, механическая энергия движущихся зарядов, излучающих электромагнитные волны, превращается в энергию этого излучения. Закон сохранения энергии, учитывающий изменение энер-

* Энгельс Ф. Диалектика природы. М., Политиздат, 1965, с. 58 и 168.

гии за счет излучения, формулируется в электродинамике. Что касается закона сохранения энергии, учитывающего передачу тепла, то он изучается в термодинамике. Полученный выше закон сохранения механической энергии представляет собой лишь закон превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно.

В заключение сделаем ряд общих замечаний о законах изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии.

Законы изменения

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^e, \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}^e, \quad \dot{E} = \frac{\partial U^e}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^d \mathbf{v}_i, \quad (2.138)$$

представляют собой семь уравнений, которые при определенных свойствах сил приводят к законам сохранения.

В случае замкнутой системы в отсутствие внутренних диссипативных сил число интегралов движения, вытекающих из законов сохранения, максимально, а именно в этом случае имеем семь первых и три вторых интеграла

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 \quad (\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_{m0}), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_0, \quad E = E_0, \\ \mathbf{r}_m = \mathbf{v}_{m0} (t - t_0) + \mathbf{r}_{m0}, \end{aligned} \quad (2.139)$$

т. е. *десять классических интегралов механики.*

Законы сохранения могут иметь место для систем с любым числом точек, в связи с чем они являются важнейшим орудием исследований. Например, изучение свойств газа, состоящего из очень большого числа молекул, основано на законах сохранения.

В настоящей главе законы сохранения были получены как следствие уравнений движения Ньютона. Поэтому они связаны со свойствами пространства и времени, которые постулируются в классической механике. Эту связь лучше рассмотреть на примере замкнутой системы (см. приложение к гл. IX, а также [21, § 6—9]). Оказывается, что *сохранение импульса связано с однородностью пространства*, в силу которой механические свойства замкнутой системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого. *Сохранение момента связано с изотропией пространства*, в силу которой механические свойства замкнутой системы не изменяются при любом повороте системы как целого. *А сохранение механической энергии связано с однородностью времени*, в силу которой механические свойства замкнутой системы не меняются при любом «переносе» системы во времени.

Наконец, подчеркнем, что законы сохранения справедливы и в таких замкнутых системах, когда движение объекта не описывается уравнениями Ньютона. Следовательно, значение законов

сохранения импульса, момента и энергии выходит далеко за рамки классической механики.

Пример 2.9. *Зависимость скоростей планет от их расстояний до Солнца и их расстояний между собой.*

Рассмотрим солнечную систему как систему, состоящую из N материальных точек (планет) и Солнца — одной точки весьма большой массы по сравнению с массами прочих точек. Поскольку эту систему можно считать замкнутой, ее центр масс движется равномерно и прямолинейно. Если пренебречь процессами излучения и диссипации, то механическую энергию системы можно считать постоянной. Найдем интеграл энергии относительно инерциальной системы отсчета с началом в центре масс солнечной системы. Для этого вычислим потенциальную энергию взаимодействия любой пары точек (см. (2.126)):

$$U_{ij} = - \int (\mathbf{F}_{ji} d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ij} d\mathbf{r}_j).$$

Используя третий закон Ньютона и закон всемирного тяготения, получим, что

$$U_{ij} = - \int \mathbf{F}_{ji} (d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j) = - \int \mathbf{F}_{ji} d\mathbf{r}_{ji} = - \gamma \frac{m_i m_j}{r_{ji}}. \quad (1)$$

Таким образом, интеграл энергии (2.134) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{M_S v_S^2}{2} - \sum_{i=1}^N \gamma \frac{m_i M_S}{r_{iS}} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = E_0, \quad (2)$$

где m_i и \mathbf{v}_i — масса и скорость i -той планеты, M_S и \mathbf{v}_S — масса и скорость Солнца. Учитывая, что в системе центра масс $\mathbf{v}_m = 0$, установим связь между скоростью Солнца и скоростями планет (см. 2.90):

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i + M_S \mathbf{v}_S = 0. \quad (3)$$

Исключая с помощью (3) из интеграла (2) скорость \mathbf{v}_S , получим соотношение между скоростями планет \mathbf{v}_i , их взаимными расстояниями r_{ij} и расстояниями до Солнца r_{iS} ($i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j$):

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{1}{2M_S} \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \right)^2 - \sum_{i=1}^N \gamma \frac{m_i M_S}{r_{iS}} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = E_0. \quad (4)$$

Таким образом, изменение расстояний от планет до Солнца и расстояний между планетами приводит к изменению скоростей планет.

В интеграле (4) вторая и четвертая суммы малы по сравнению с первой и третьей суммами соответственно, так как $M_S \gg m_i$ ($i=1, 2, \dots, N$). Пренебрежение указанными малыми членами равносильно пренебрежению воздействием планет на движение Солнца и друг на друга, т. е. равносильно допущению о том, что каждая планета движется только под действием Солнца. При таком допущении вместо интеграла (4) будут иметь место интегралы энергий для каждой планеты в центрально-симметричном поле Солнца

$$\frac{m_i v_i^2}{2} - \gamma \frac{m_i M_S}{r_{iS}} = E_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

(см. (2.56) и (2.69)).

Глава III

ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ И ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ ЧАСТИЦ

Под задачей двух тел обычно понимают задачу о движении двух взаимодействующих точек в отсутствие внешних сил. Значение этой задачи весьма велико: ее решение лежит в основе небесной механики и теории свободного движения спутников, в основе теории столкновения и рассеяния частиц; ее решение используется в статистической механике, когда задачу о движении многих частиц фактически сводят к статистической задаче двух точек, и т. д.

§ 3.1. Задача двух тел

Исследуем движение двух точек с массами m_1 и m_2 , если потенциальная энергия их взаимодействия U зависит только от расстояния между точками, а внешние силы отсутствуют.

Уравнениями движения точек относительно инерциальной системы S являются уравнения

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|), \quad (3.1)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|),$$

где $\mathbf{F}_{21} = -\nabla_1 U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$, а $\mathbf{F}_{12} = -\nabla_2 U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$ (см. (2.124), (2.125)).

Один из векторных интегралов уравнений (3.1) очевиден: ввиду отсутствия внешних сил центр масс системы движется относительно S равномерно и прямолинейно (см. (2.106)). Таким образом, скорость центра масс и его радиус-вектор соответственно равны

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_{m0}, \quad \mathbf{r}_m = \mathbf{v}_{m0}t + \mathbf{r}_{m0}, \quad (3.2)$$

где $\mathbf{v}_{m0} = \frac{1}{m}(m_1\mathbf{v}_{10} + m_2\mathbf{v}_{20})$, $\mathbf{r}_{m0} = \frac{1}{m}(m_1\mathbf{r}_{10} + m_2\mathbf{r}_{20})$, а \mathbf{r}_{10} , \mathbf{r}_{20} , \mathbf{v}_{10} , \mathbf{v}_{20} — начальные положения и скорости соответствующих точек.

Рассмотрим далее движение точек относительно поступательно движущейся системы центра масс S_m (рис. 3.1). Так называют систему отсчета, начало которой находится в центре масс механической системы, а оси не изменяют своей ориентации относительно системы S (т. е. углы между осями систем S_m и S неизменны). В данном случае система S_m инерциальна, поскольку центр масс движется равномерно и прямолинейно относительно системы S . Следовательно, положения, скорости и ускорения точек относительно S и S_m связаны между собой соотношениями (см. (1.62) — (1.64)):

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_m + \mathbf{r}'_i, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{m0} + \mathbf{v}'_i,$$

$$\mathbf{w}_i = \dot{\mathbf{w}}'_i \quad (i = 1, 2), \quad (3.3)$$

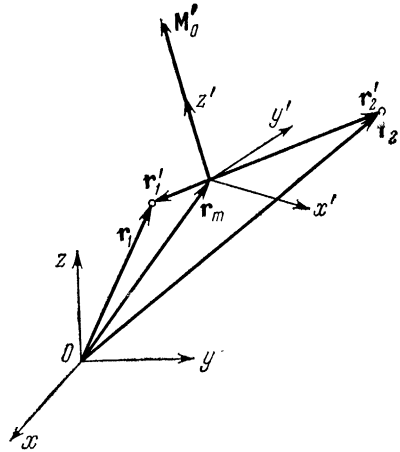


Рис. 3.1

где «нестрихованные» векторы относятся к системе S , а «стрихованные» — к системе S_m . Учитывая инвариантность уравнений движения при переходе от системы S к S_m (см. с. 41), из (3.1) получим

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}'_1 = \mathbf{F}_{21} (|\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1|),$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}'_2 = \mathbf{F}_{12} (|\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1|).$$

Однако положения точек 1 и 2 в системе S_m не являются независимыми. Действительно, из определения центра масс (2.89) и определения системы S_m имеем

$$m_1 \mathbf{r}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2 = 0. \quad (3.5)$$

Поэтому радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, характеризующий относительное расположение точек, выражается через \mathbf{r}'_1 и \mathbf{r}'_2 :

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 = \frac{m}{m_1} \mathbf{r}'_2 = -\frac{m}{m_2} \mathbf{r}'_1, \quad (3.6)$$

а радиусы-векторы \mathbf{r}'_1 и \mathbf{r}'_2 связаны с вектором \mathbf{r} соотношениями

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{m} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}'_2 = \frac{m_1}{m} \mathbf{r}. \quad (3.7)$$

Дифференцируя (3.5)—(3.7) по времени, получаем аналогичные соотношения для скоростей точек

$$m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = 0, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1 = \frac{m}{m_1} \mathbf{v}'_2 = -\frac{m}{m_2} \mathbf{v}'_1, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{v}'_1 = -\frac{m_2}{m} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}'_2 = \frac{m_1}{m} \mathbf{v},$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$.

Соотношения (3.6) или (3.7) дают возможность разделить переменные в уравнениях (3.4). Действительно, подставляя (3.6) в (3.4), найдем

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}'_1 = \mathbf{F}_{21} \left(\left| -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{r}'_1 \right| \right), \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}'_2 = \mathbf{F}_{12} \left(\left| \frac{m}{m_1} \mathbf{r}'_2 \right| \right). \quad (3.10)$$

Отсюда, переходя к переменной \mathbf{r} , сведем оба уравнения к одному и тому же уравнению

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}(|\mathbf{r}|), \quad (3.11)$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — «приведенная» масса. Это уравнение представляет собой *уравнение движения одной точки в заданном поле с центром силы, как бы помещенным в центр масс системы двух точек*. Таким образом, задача двух тел сводится к эквивалентной задаче о движении μ -точки — воображаемой точки с массой μ и радиусом-вектором \mathbf{r} — в центрально-симметричном поле с неподвижным центром, т. е. к задаче, разобранный в § 2.3.

Поскольку на μ -точку «действует» центральная стационарная потенциальная сила, имеет место сохранение момента импульса и энергии относительно S_m :

$$\mu [\mathbf{r}\mathbf{v}] = \mathbf{M}'_0, \quad \frac{\mu v^2}{2} + U(|\mathbf{r}|) = E'_0. \quad (3.12)$$

Выведем эти интегралы, исходя непосредственно из законов сохранения (2.114) и (2.136). Согласно этим законам кинетический момент и энергия системы двух точек относительно S_m сохраняются:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}'_1 + \mathbf{M}'_2 = \mathbf{M}'_0, \quad E' = T'_1 + T'_2 + U = E'_0. \quad (3.13)$$

Выразим момент импульса и кинетическую энергию точки I в переменных \mathbf{r} , \mathbf{v} (см. (3.7) и (3.9)):

$$\mathbf{M}'_1 = m_1 [\mathbf{r}'_1 \mathbf{v}'_1] = m_1 \left(\frac{m_2}{m} \right)^2 [\mathbf{r}\mathbf{v}], \quad (3.14)$$

$$T'_1 = \frac{m_1 (v'_1)^2}{2} = \frac{m_1}{2} \left(\frac{m_2}{m} \right)^2 v^2.$$

Аналогично для второй точки получим

$$\mathbf{M}'_2 = m_2 \left(\frac{m_1}{m} \right)^2 [\mathbf{r}\mathbf{v}], \quad T'_2 = \frac{m_2}{2} \left(\frac{m_1}{m} \right)^2 v^2, \quad (3.15)$$

а учитывая (3.14) и (3.15), найдем выражения кинетического момента и кинетической энергии системы в переменных \mathbf{r} и \mathbf{v} :

$$\mathbf{M}' = \mu [\mathbf{r}\mathbf{v}], \quad T' = \frac{\mu v^2}{2}. \quad (3.16)$$

Следовательно, (3.12) и (3.13) представляют собой одни и те же законы сохранения.

Сопоставляя (3.12) с интегралами (2.56), мы видим, что решение задачи двух тел относительно \mathcal{S}_m можно найти сразу, если в общем решении, описывающем движение точки в центрально-симметричном потенциальном поле, произвести замену

$$m \rightarrow \mu, \quad \mathbf{M}_0 \rightarrow \mathbf{M}'_0, \quad E_0 \rightarrow E'_0. \quad (3.17)$$

Тогда из (2.13), (2.60) и (2.63) получим общее решение уравнения (3.11):

$$\mathbf{M}'_0 \mathbf{r} = 0, \quad t = \pm \int \frac{dr}{\left[\frac{2}{\mu} (E'_0 - U_{\text{eff}}) \right]^{1/2}} + \text{const}, \quad (3.18)$$

$$\varphi = \pm \int \frac{\frac{M'_0}{\mu r^2} dr}{\left[\frac{2}{\mu} (E'_0 - U_{\text{eff}}) \right]^{1/2}} + \text{const},$$

где $U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{(M'_0)^2}{2\mu r^2}$.

Смысл первого из интегралов (3.18) очевиден: он определяет плоскость движения μ -точки. Эта плоскость проходит через центр масс перпендикулярно к \mathbf{M}'_0 , т. е. совпадает с плоскостью $O'x'y'$ на рис. 3.1. Второй и третий интегралы определяют движение μ -точки на указанной плоскости в полярных координатах. Таким образом, с помощью интегралов (3.18) можно определить функ-

цию $\mathbf{r}(t)$ и тем самым с помощью (3.7) найти положения точек 1 и 2 относительно S_m . Затем, используя (3.2) и (3.3), можно найти законы движения точек относительно системы S в виде

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_m(t) - \frac{m_2}{m} \mathbf{r}(t), \quad (3.19)$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_m(t) + \frac{m_1}{m} \mathbf{r}(t).$$

Аналогично для скоростей точек относительно S получим решение в виде (см. (3.9) и (3.3))

$$\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{v}_{m0} - \frac{m_2}{m} \mathbf{v}(t), \quad (3.20)$$

$$\mathbf{v}_2(t) = \mathbf{v}_{m0} + \frac{m_1}{m} \mathbf{v}(t),$$

где $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$,

Итак, общее решение задачи двух точек, потенциальная энергия взаимодействия которых зависит только от расстояния между ними, в отсутствие внешних сил определяется формулами (3.2), (3.18) и (3.19). Из этих формул следует, что относительно инерциальной системы отсчета центр масс точек движется равномерно и прямолинейно, а обе точки относительно системы центра масс совершают движение в плоскости, проходящей через центр масс и сохраняющей свою ориентацию относительно инерциальной системы отсчета; траектории обеих точек относительно системы центра масс подобны, а центр подобия находится в центре масс, причем соотношение подобия равно отношению масс точек.

Проиллюстрируем задачу двух тел на примере системы с потенциальной энергией взаимодействия

$$U = -\frac{\alpha}{r},$$

где α равняется либо $\gamma m_1 m_2$ (гравитационное взаимодействие), либо $-e_1 e_2$ (электростатическое взаимодействие). В этом случае общее решение аналогично решению, приведенному в § 2.4. Например, производя в формуле (2.71) замену (3.17), получим уравнение орбиты μ -точки

$$r = \frac{p}{\pm 1 \pm \epsilon \cos \varphi}, \quad (3.21)$$

где $p = \frac{(M'_0)^2}{\mu |\alpha|}$ — параметр орбиты, $\varepsilon = \left[1 + \frac{2E'_0 (M'_0)^2}{\mu \alpha^2} \right]^{1/2}$ — эксцентриситет орбиты, значение $+1$ в знаменателе формулы соответствует случаю $\alpha > 0$, а значение -1 — случаю $\alpha < 0$.

Закон движения μ -точки по эллиптической орбите найдем из формулы (2.78):

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \xi) \quad t = \frac{1}{2\pi} T (\xi - \varepsilon \sin \xi),$$

где $a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}$ — большая полуось эллипса, по которому движется μ -точка, $T^2 = 4\pi^2 (\mu a^3 / \alpha)$ — квадрат периода обращения по эллипсу, а p и ε определены в (3.21).

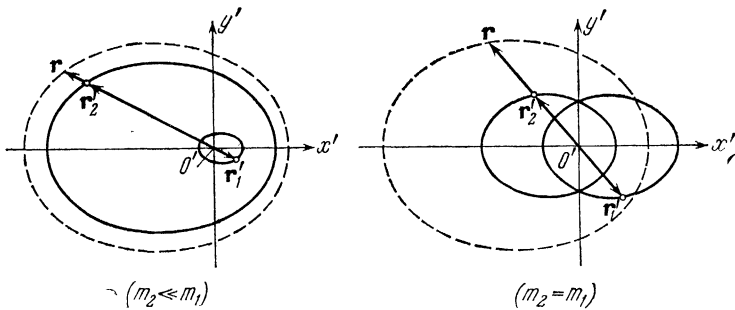


Рис. 3.2

Чтобы представить себе движение реальных точек 1 и 2 относительно S_m , рассмотрим их движение по эллиптическим орбитам при различных соотношениях масс и заданных p и ε . Например, пусть $m_2 \ll m_1$, тогда выражения радиусов-векторов точек через радиус-вектор μ -точки можно записать в виде (см. (3.7))

$$r'_1 \approx -\frac{m_2}{m_1} r, \quad r'_2 \approx \left(1 - \frac{m_2}{m_1} \right) r;$$

если же $m_2 = m_1$, то

$$r'_1 = -\frac{r}{2}, \quad r'_2 = \frac{r}{2}.$$

Таким образом, если μ -точка движется по эллипсу, то и реальные точки описывают эллиптические орбиты (рис. 3.2). Рассмотренные случаи дают представление о движении систем: планета — Солнце и двойные звезды соответственно.

Полезно найти соотношения между периодом обращения точек по эллиптическим орбитам и их большими полуосями. Например, в случае гравитационного притяжения для μ -точки

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{a^3}{m_1 + m_2}.$$

Периоды обращения точек 1 и 2, очевидно, равны периоду T . С другой стороны, большие полуоси орбит этих точек выражаются через a , поскольку из (3.7) вытекает, что

$$r'_1 = \frac{m_2}{m} r, \quad r'_2 = \frac{m_1}{m} r,$$

и, следовательно,

$$a_1 = \frac{m_2}{m} a, \quad a_2 = \frac{m_1}{m} a,$$

где a_1 и a_2 — большие полуоси эллиптических орбит точек 1 и 2 соответственно. Таким образом, найдем отношения квадрата периода T к кубам больших полуосей a_1 и a_2 :

$$\frac{T^2}{a_1^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{m_1^3}{m^3}, \quad \frac{T^2}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{m^2}{m_1^3},$$

где $m = m_1 + m_2$. Эти отношения зависят от масс точек, в связи с чем становится понятной приближенность третьего закона Кеплера, приведенного на с. 87. Действительно, поскольку масса любой планеты весьма мала по сравнению с массой Солнца, то отношение T^2/a_2^3 для любых двух планет одинаково с большой точностью.

Теперь применим к рассматриваемой задаче теорему о вириале сил в том случае, когда точки движутся по эллипсам. Согласно формуле (2.54), отнесенной к S_m -системе, получим

$$\bar{T}' = -\frac{1}{2} \overline{(\mathbf{F}_{12} \mathbf{r}'_2 + \mathbf{F}_{21} \mathbf{r}'_1)}.$$

Подставляя сюда выражения сил через потенциальную энергию $U(r)$, найдем соотношение

$$\bar{T}' = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} r,$$

которое для потенциала вида $U = -\alpha/r$ упрощается:

$$\bar{T}' = -\frac{\bar{U}}{2}. \quad (3.22)$$

Кроме того, поскольку $\bar{T}' + \bar{U} = E'_0$, (3.22) приводит к формулам

$$\bar{T}' = -E'_0, \quad \bar{U} = 2E'_0, \quad (3.23)$$

которые определяют средние значения кинетической и потенциальной энергий системы через ее полную энергию в начальный момент времени.

§ 3.2. Упругое рассеяние частиц

Если в начальный момент времени две частицы находятся достаточно далеко друг от друга, а их начальные скорости направлены так, что с течением времени происходит сближение частиц, в результате взаимодействия они могут снова удалиться на достаточно большое расстояние друг от друга, причем их скорости как по величине, так и по направлению изменятся. В этом случае говорят, что произошло рассеяние частиц. Если в результате взаимодействия при $t \rightarrow +\infty$ расстояние между частицами стремится к нулю или остается ограниченным, то говорят, что произошел захват частиц. Рассеяние и захват частиц зависят от характера взаимодействия между частицами, в связи с чем изучение таких процессов играет большую роль в физике.

Рассмотрим задачу о рассеянии двух частиц, в которой считаются известными массы частиц и потенциальная энергия их взаимодействия как функция расстояния r между ними, а внешними силами можно пренебречь. До рассеяния, т. е. при $t \rightarrow -\infty$, частицы считаются бесконечно удаленными друг от друга; они обладают скоростями, соответственно равными

$$\mathbf{v}_1^- = \mathbf{v}_1(t)|_{t \rightarrow -\infty}, \quad \mathbf{v}_2^- = \mathbf{v}_2(t)|_{t \rightarrow -\infty}, \quad (3.24)$$

где $\mathbf{v}_1(t)$ и $\mathbf{v}_2(t)$ — скорости обеих точек в момент времени t . Практически состояние «до рассеяния» характеризуется таким конечным расстоянием между частицами, на котором энергией их взаимодействия можно пренебречь. Скорости, рассматриваемые в (3.24), являются скоростями частиц относительно некоторой инерциальной системы отсчета, которую в теории рассеяния обычно называют лабораторной системой, или L -системой. В задаче считается известной ориентация плоскости движения частиц относительно системы S_m , которую в теории рассеяния часто называют ψ -системой. Также считается известным прицельное расстояние ρ^- , т. е. расстояние между асимптотами траекторий частиц относительно S_m , по которым частицы движутся до рассеяния; прицельное расстояние можно также определить как минимальное расстояние, на котором частицы пролетели бы друг от друга в отсутствие взаимодействия (см. рис. 3.3, где

в качестве траектории μ -точки изображена ветвь гиперболы, соответствующая случаю отталкивания — сравните с рис. 2.6, а траектории действительных точек изображены для $m_1 = m_2$).

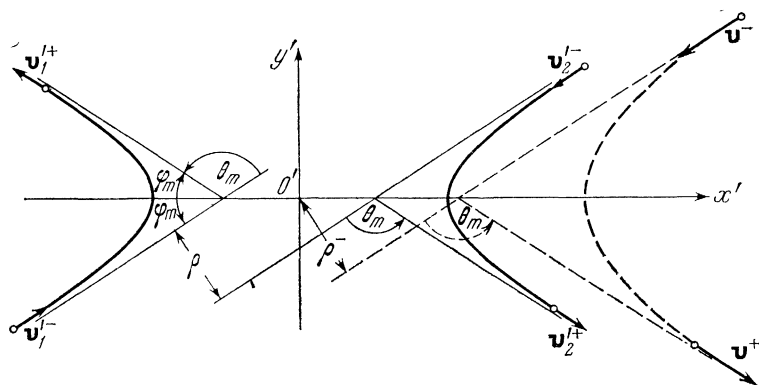


Рис. 3.3

Если скорости частиц до рассеяния заданы, то ориентация плоскости движения относительно S_m определяется одним скалярным параметром. Действительно, по этим скоростям можно определить их разность-вектор

$$\mathbf{v}^- = \mathbf{v}_2^- - \mathbf{v}_1^-, \quad (3.25)$$

который лежит в плоскости движения частиц относительно S_m , так как в любой момент времени вектор \mathbf{v} коллинеарен скоростям частиц \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 относительно S_m . Поэтому ориентацию этой плоскости всегда можно задать единичным вектором \mathbf{n}_z' , перпендикулярным к плоскости и, следовательно, перпендикулярным к \mathbf{v}^- (рис. 3.4). Но направление

\mathbf{n}_z' , если \mathbf{v}^- задан, определяется одним скалярным параметром, например углом ε между \mathbf{n}_z и единичным вектором \mathbf{n}_{xy} , лежащим в плоскости $O'xy$ и перпендикулярным к \mathbf{v}^- .

Итак, в задаче о рассеянии двух частиц будем считать известными массы этих частиц m_1 и m_2 , потенциальную энергию их вза-

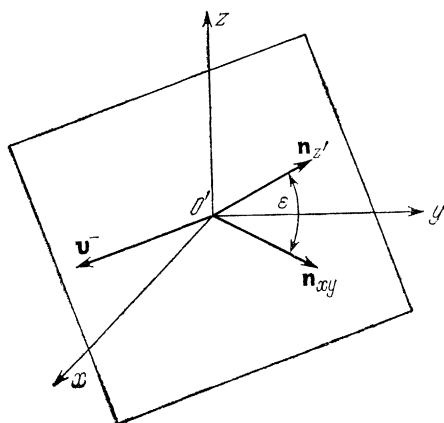


Рис. 3.4

имодействия $U(r)$, скорости до рассеяния \mathbf{v}_1^- и \mathbf{v}_2^- относительно лабораторной системы отсчета, угол ε , определяющий ориентацию плоскости движения относительно системы центра масс, а также прицельное расстояние ρ , которое характеризует относительное расположение точек до рассеяния в системе центра масс. По этим данным требуется определить \mathbf{v}_1^+ и \mathbf{v}_2^+ — скорости обеих частиц после рассеяния, т. е. при $t \rightarrow +\infty$:

$$\mathbf{v}_1^+ = \mathbf{v}_1(t)|_{t \rightarrow +\infty}, \quad \mathbf{v}_2^+ = \mathbf{v}_2(t)|_{t \rightarrow +\infty}. \quad (3.26)$$

Устремляя t к $+\infty$ в соотношениях (12.9) и (12.20), справедливых для любого момента времени, и используя сохранение скорости центра масс частиц, получим

$$\mathbf{v}'_1^+ = -\frac{m_2}{m} \mathbf{v}^+, \quad \mathbf{v}'_2^+ = \frac{m_1}{m} \mathbf{v}^+, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{v}_1^+ = \mathbf{v}_m^- - \frac{m_2}{m} \mathbf{v}^+, \quad \mathbf{v}_2^+ = \mathbf{v}_m^- + \frac{m_1}{m} \mathbf{v}^+, \quad (3.28)$$

где \mathbf{v}'_1^+ , \mathbf{v}'_2^+ — скорости точек после рассеяния относительно системы S_m , $\mathbf{v}_m^- = \frac{1}{m}(m_1 \mathbf{v}_1^- + m_2 \mathbf{v}_2^-)$ — скорость центра масс. Как видно, в (3.27) и (3.28) входит один неизвестный вектор \mathbf{v}^+ — разность скоростей точек после рассеяния. Величину этого вектора можно найти, используя закон сохранения энергии относительно системы S_m . Действительно, вторая из формул (3.12) приводит к интегралу

$$\frac{\mu (\sigma^+)^2}{2} + U^+ = \frac{\mu (\sigma^-)^2}{2} + U^-, \quad (3.29)$$

где U^- , U^+ — значения потенциальной энергии взаимодействия частиц до и после рассеяния. Эти значения равны между собой, т. е.

$$U^+ = U^-, \quad (3.30)$$

поскольку как до рассеяния, так и после него частицы находятся на бесконечно большом расстоянии друг от друга. Таким образом, из (3.29) и (3.30) вытекает, что величина разности скоростей частиц после рассеяния и до него одна и та же:

$$\sigma^+ = \sigma^-. \quad (3.31)$$

По существу этот вывод основан на предположении о том, что внутренняя энергия частиц в процессе рассеяния остается неизменной (такое рассеяние называется упругим).

Учитывая (3.31), неизвестный вектор \mathbf{v}^+ можно представить в виде

$$\mathbf{v}^+ = v^- \mathbf{n}_{\theta_m}, \quad (3.32)$$

где $v^- = |\mathbf{v}_2^- - \mathbf{v}_1^-|$, т. е. является известной величиной, а \mathbf{n}_{θ_m} — единичный вектор, направленный по вектору \mathbf{v}^+ или по вектору $\mathbf{v}_2^{'+}$, что видно из (3.27). Орт \mathbf{n}_{θ_m} легко определить, используя решение задачи двух тел. Действительно, вычисляя последний из интегралов (3.18) в пределах от r_{\min} до ∞ , получим Φ_m — угол между асимптотой траектории и апсидой (см., например, рис. 3.3):

$$\Phi_m = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M'_0}{\mu r^2} dr}{\left[\frac{2}{\mu} (E'_0 - U_{\text{eff}}) \right]^{1/2}}, \quad (3.33)$$

где r_{\min} определяется из уравнения $E'_0 = U_{\text{eff}}$.

Интеграл (3.33) определяет угол Φ_m как функцию E'_0 , M'_0 и приведенной массы μ (при заданной потенциальной энергии $U(r)$). В свою очередь, постоянные E'_0 и M'_0 могут быть выражены через известные величины, т. е. через v^- — величину разности скоростей точек до рассеяния и ρ^- — прицельное расстояние. Например, полагая потенциальную энергию на бесконечности равной нулю, получим

$$E'_0 = \frac{\mu (v^-)^2}{2}. \quad (3.34)$$

Величину кинетического момента относительно системы центра масс можно записать в виде (см. (3.12))

$$M'_0 = \mu r v \sin(\mathbf{r}, \mathbf{v})|_{t \rightarrow -\infty},$$

откуда, учитывая, что

$$r \sin(\mathbf{r}, \mathbf{v})|_{t \rightarrow -\infty} = \rho^- \quad (3.35)$$

(см. рис. 3.3), найдем

$$M'_0 = \mu \rho^- v^-. \quad (3.36)$$

Соотношения (3.36), (3.34) и решение (3.33) дают возможность найти угол Φ_m как функцию заданных величин и тем самым определить углы отклонения скоростей первой и второй частиц в системе центра масс. Эти углы равны между собой, так как в указанной системе импульс двух частиц всегда равен нулю, и, следовательно, скорости обеих частиц в любой момент времени

направлены в противоположные стороны. Таким образом, угол между векторами $\mathbf{v}_1'^+$ и $\mathbf{v}_1'^-$ равен углу между $\mathbf{v}_2'^+$ и $\mathbf{v}_2'^-$. Назовем этот угол углом рассеяния в системе центра масс и обозначим его θ_m . Между углами φ_m и θ_m существует соотношение, которое для центрально-симметричного взаимодействия принимает весьма простой вид. Действительно, в этом случае движение частиц относительно их центра масс происходит в плоскости, а траектории частиц симметричны относительно апсид (см. с. 79), поэтому

$$\theta_m = \pi - 2\varphi_m. \quad (3.37)$$

Соотношения (3.27) и (3.28) с учетом (3.32)—(3.37) приводят к решению задачи о рассеянии двух частиц. Запишем это решение в виде

$$\mathbf{v}_1'^+ = -\frac{m_2}{m} v^- \mathbf{n}_{\theta_m}, \quad \mathbf{v}_2'^+ = \frac{m_1}{m} v^- \mathbf{n}_{\theta_m}, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{v}_1^+ = \mathbf{v}_m^- - \frac{m_2}{m} v^- \mathbf{n}_{\theta_m}, \quad \mathbf{v}_2^+ = \mathbf{v}_m^- + \frac{m_1}{m} v^- \mathbf{n}_{\theta_m}, \quad (3.39)$$

где

$$\mathbf{v}_m^- = \frac{1}{m} (m_1 \mathbf{v}_1^- + m_2 \mathbf{v}_2^-), \quad v^- = |\mathbf{v}_2^- - \mathbf{v}_1^-|,$$

а единичный вектор \mathbf{n}_{θ_m} определен углами ε и θ_m ; один из этих углов ε задает ориентацию плоскости движения относительно системы центра масс при заданных векторах \mathbf{v}_2^- , \mathbf{v}_1^- , а угол θ_m является углом рассеяния частиц в системе центра масс; зависимость угла θ_m от величин ρ^- , v^- и характера взаимодействия определяется интегралом

$$\theta_m = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho^-}{r^2} \frac{dr}{\left[1 - \frac{2U(r)}{\mu (v^-)^2} - \frac{(\rho^-)^2}{r^2} \right]^{1/2}}, \quad (3.40)$$

где r_{\min} является корнем уравнения

$$1 - \frac{2U(r)}{\mu (v^-)^2} - \frac{(\rho^-)^2}{r^2} = 0. \quad (3.41)$$

Итак, формулы (3.39) и (3.40) представляют собой решение задачи об упругом рассеянии двух частиц. Эта задача является частным случаем задачи двух тел, когда интересуются лишь скоростями частиц, после рассеяния. Поэтому в задаче о рассеянии требуется меньшая информация относительно начальных условий по сравнению с задачей двух тел. Подчеркнем еще одну особен-

ность задачи о рассеянии. Так как решение в виде (3.39) получено на основе лишь законов сохранения, то скорости после рассеяния \mathbf{v}_1^+ , \mathbf{v}_2^+ являются одними и теми же функциями скоростей до рассеяния \mathbf{v}_1^- , \mathbf{v}_2^- и углов ε , θ_m при любом центральном взаимодействии частиц. С другой стороны, \mathbf{v}_1^+ и \mathbf{v}_2^+ как функции скоростей \mathbf{v}_1^- , \mathbf{v}_2^- , угла ε и прицельного расстояния ρ^- будут различными для разных взаимодействий, так как зависимость θ_m от ρ^- и v^- определяется видом потенциальной энергии.

Только в одном случае угол отклонения в системе центра масс имеет определенное значение при любой потенциальной энергии взаимодействия $U(r)$. Это случай лобового удара, когда

$$\rho^- = 0 \quad (\varphi_m = 0, \theta_m = \pi) \quad (3.42)$$

и, следовательно, вектор \mathbf{p}_{θ_m} направлен противоположно вектору \mathbf{v}^- :

$$\mathbf{p}_{\theta_m} = -\frac{\mathbf{v}^-}{v^-}. \quad (3.43)$$

Подставляя (3.43) в (3.39), получим решение задачи о рассеянии для случая лобового удара

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^+ &= \frac{m_1 - m_2}{m} \mathbf{v}_1^- + \frac{2m_2}{m} \mathbf{v}_2^-, \\ \mathbf{v}_2^+ &= \frac{2m_1}{m} \mathbf{v}_1^- + \frac{m_2 - m_1}{m} \mathbf{v}_2^-. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Расчет общего случая ($\rho^- \neq 0$) становится более наглядным, если использовать графическое изображение решения (3.39), т. е. так называемую диаграмму скоростей. Прежде всего построим эту диаграмму в системе S_m . Скорости после рассеяния известны из решения (3.38), а скорости до рассеяния получим, устремив в (3.9) $t \rightarrow -\infty$:

$$\mathbf{v}_1'^- = -\frac{m_2}{m} \mathbf{v}^-, \quad \mathbf{v}_2'^- = \frac{m_1}{m} \mathbf{v}^-. \quad (3.45)$$

Используя (3.45) и (3.38), получим диаграмму скоростей в системе S_m (рис. 3.5, а). В этой системе особенно просто выглядит диаграмма импульсов. Умножая скорости точек (см. (3.38) и (3.45)) на соответствующие массы, получим выражения для импульсов точек относительно S_m (рис. 3.5, б)

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1'^- &= -\mu \mathbf{v}^-, \quad \mathbf{p}_2'^- = \mu \mathbf{v}^-, \\ \mathbf{p}_1'^+ &= -\mu \mathbf{v}^+, \quad \mathbf{p}_2'^+ = \mu \mathbf{v}^+. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Из диаграммы видно, что упругое рассеяние двух частиц относительно системы их центра масс сводится к повороту скоростей и импульсов частиц на один и тот же угол рассеяния θ_m ; при этом величины скоростей (и импульсов) сохраняются.

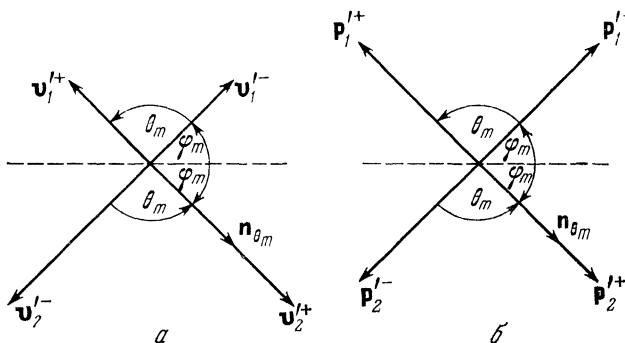


Рис. 3.5

Диаграмма скоростей относительно лабораторной системы отсчета соответствует решению (3.39) (рис. 3.6). Заметим, что в общем случае плоскость, образуемая на диаграмме скоростей векторами \mathbf{v}_1^- и \mathbf{v}_2^- , не совпадает с плоскостью, образуемой векторами \mathbf{v}_1^+ и \mathbf{v}_2^+ . Однако эти плоскости пересекаются и конец вектора скорости центра масс лежит на этой линии пересечения. Плоскость, в которой лежат скорости точек, определенные относительно системы S_m , не совпадает, вообще говоря, ни с плоскостью векторов $\mathbf{v}_1^-, \mathbf{v}_2^-$, ни с плоскостью векторов $\mathbf{v}_1^+, \mathbf{v}_2^+$.

В заключение этого параграфа рассмотрим захват частиц, точнее, рассмотрим падение частиц друг на друга, когда $r \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Исследование этого случая можно провести с помощью условий (2.64) и (2.66). Действительно, заменяя в этих формулах m на приведенную массу μ и учитывая, что

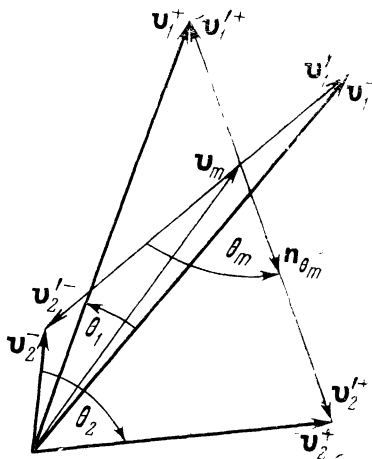


Рис. 3.6

$$E_0' = \frac{\mu (v^-)^2}{2}, \quad M_0' = \mu \rho^- v^-,$$

получим неравенство, определяющее область изменения r в задаче двух тел:

$$\frac{\mu (v^-)^2}{2} \geq U(r) + \frac{\mu (v^-)^2}{2} \cdot \frac{(\rho^-)^2}{r^2}, \quad (3.47)$$

а также *условие падения частиц*

$$0 \geq r^2 U(r) |_{r \rightarrow 0} + \frac{\mu (v^-)^2}{2} (\rho^-)^2. \quad (3.48)$$

Для сил отталкивания условие падения не удовлетворяется ни при каких ρ^- . В случае преобладания быстро убывающих сил притяжения (при $r \rightarrow 0$) падение становится возможным хотя бы для некоторых прицельных расстояний. Если известны потенциальная энергия взаимодействия частиц, их массы и скорости до захвата (т. е. при $t \rightarrow -\infty$), то можно, воспользовавшись соотношениями (3.47) и (3.48), определить, при каких прицельных расстояниях произойдет захват.

Пример 3.1. *Рассеяние двух частиц, одна из которых до рассеяния покоится.*

Частица с массой m_1 до рассеяния покоится, т. е. $v_1^- = 0$, а вторая частица m_2 движется со скоростью v_2^- относительно l -системы. Определить абсолютные величины и направления скоростей обеих частиц после рассеяния относительно l -системы как функции θ_m — угла рассеяния в системе центра масс.

Из условия видно, что скорость центра масс и разность скоростей частиц до рассеяния соответственно равны

$$v_m^- = \frac{m_2}{m} v_2^-, \quad v^- = v_2^-. \quad (1)$$

Отсюда с помощью (3.45) получим скорости точек до рассеяния в системе S_m

$$v_1'^- = -\frac{m_2}{m} v_2^- = -v_m^-, \quad v_2'^- = \frac{m_1}{m} v_2^-, \quad (2)$$

а используя (3.38) и (3.39), найдем скорости частиц после рассеяния

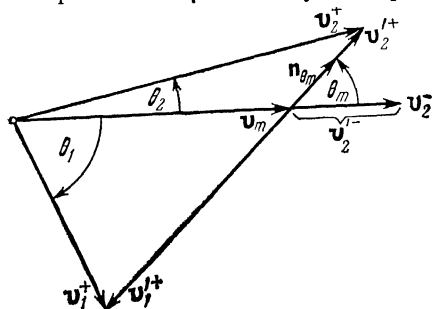


Рис. 37

$$\mathbf{v}_1'^+ = -\frac{m_2}{m} v_2^- \mathbf{n}_{\theta_m}, \quad \mathbf{v}_2'^+ = \frac{m_1}{m} v_2^- \mathbf{n}_{\theta_m}, \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_1^+ = \frac{m_2}{m} \mathbf{v}_2^- - \frac{m_2}{m} v_2^- \mathbf{n}_{\theta_m}, \quad \mathbf{v}_2^+ = \frac{m_2}{m} \mathbf{v}_2^- + \frac{m_1}{m} v_2^- \mathbf{n}_{\theta_m}.$$

В рассматриваемом примере движение является плоским как относительно системы S_m , так и относительно l -системы, причем плоскости движения в обеих системах совпадают друг с другом. Благодаря этому одну из координатных плоскостей l -системы можно совместить с плоскостью движения. Тогда вектор \mathbf{n}_{θ_m} , лежащий в этой плоскости, будет определяться одним параметром, а именно углом рассеяния θ_m . Заметим также, что в системе S_m величина скорости первой точки после рассеяния равна величине скорости центра масс, а отношение $v_1'^+/v_2'^+$ всегда равно обратному отношению масс точек.

Диаграмма скоростей для данного примера приведена на рис. 3.7. Здесь θ_1 и θ_2 — углы рассеяния первой и второй частиц в l -системе; они отсчитываются от направления скорости \mathbf{v}_2^- второй частицы до рассеяния. Пользуясь этой диаграммой, решением (3) и тригонометрическими соотношениями, найдем

$$v_1^+ = \frac{2v_2^- \sin \frac{\theta_m}{2}}{1 + \frac{m_1}{m_2}},$$

$$\theta_1 = \frac{\pi - \theta_m}{2}, \quad (4)$$

$$v_2^+ = \frac{v_2^-}{m} [m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \theta_m]^{1/2},$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\sin \theta_m}{\frac{m_2}{m_1} + \cos \theta_m}.$$

Рассмотрим решение (4) при различных соотношениях между массами частиц, считая для определенности, что между частицами действуют силы отталкивания. Тогда θ_m может изменяться от 0 до π ; причем $\theta_m = 0$ соответствует *бесконечно далеким пролетам* частиц, а $\theta_m = \pi$ — *лобовому удару*.

Пусть, например, $m_1 > m_2$, т. е. масса частицы, покоящейся до рассеяния, больше массы налетающей частицы (рис. 3.8, а). В этом случае с изменением θ_m от 0 до π угол θ_2 изменяется также от 0 до π , т. е. налетающая частица может быть рассеяна по

любому направлению. Соответственно частица, покоящаяся до рассеяния, может быть рассеяна под углом от $\pi/2$ до 0. Угол разлета $\theta_1 + \theta_2$ для любых θ_m будет больше $\pi/2$, а в случае лобового удара скорости частиц после рассеяния \mathbf{v}_1^+ и \mathbf{v}_2^+ взаимно про-

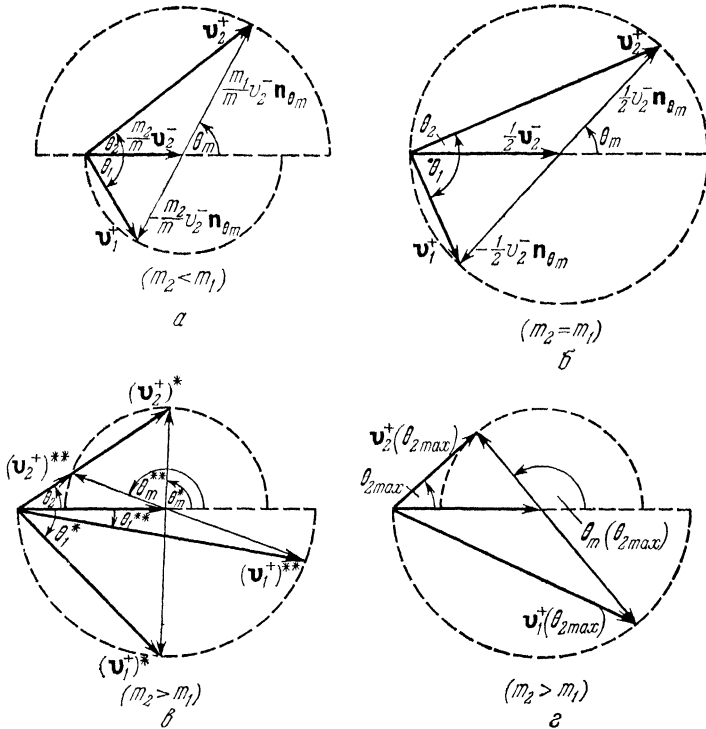


Рис. 3.8

тивоположны. Весьма простой вид принимает решение (4), если $m_1 \gg m_2$:

$$v_1^+ = 0, \quad v_2^+ = v_2^-, \quad \theta_2 = \theta_m. \quad (5)$$

В случае равенства масс налетающей и покоящейся частиц из решения (4) получим (рис. 3.8, б)

$$v_1^+ = v_2^- \sin \frac{\theta_m}{2}, \quad \theta_1 = \frac{\pi - \theta_m}{2}. \quad (6)$$

$$v_2^+ = v_2^- \cos \frac{\theta_m}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\theta_m}{2}.$$

Здесь угол разлета $\theta_1 + \theta_2$ для любого θ_m равен $\pi/2$, а в случае лобового удара происходит «обмен» скоростей.

Пусть теперь $m_2 > m_1$, т. е. масса налетающей частицы больше, чем масса покоящейся до рассеяния частицы (рис. 3.8, в). Из диаграммы скоростей видно, что угол разлета $\theta_1 + \theta_2$ для любого θ_m меньше, чем $\pi/2$, а в результате лобового удара скорости частиц v_1^+ и v_2^+ направлены одинаково. Наиболее интересной особенностью рассматриваемого случая является то, что *данному углу θ_m соответствуют определенные значения v_2^+ и θ_2 , а данному углу θ_2 соответствуют два значения θ_m и v_2^+* . Иначе говоря, функции $v_2^+(\theta_m)$ и $\theta_2(\theta_m)$ являются однозначными функциями, а функции $\theta_m(\theta_2)$ и $v_2^+(\theta_2)$ — двузначными. Это необходимо иметь в виду, так как экспериментально измеряется именно угол θ_2 , а ему соответствуют два возможных значения θ_m и v_2^+ . С этой особенностью связано и то, что угол отклонения θ_2 налетающей частицы изменяется в пределах от 0 до некоторого максимального значения $\theta_{2\max}$ (рис. 3.8, г), определяемого формулой

$$\sin \theta_{2\max} = \frac{m_1}{m_2}. \quad (7)$$

Пользуясь последней из формул (4), найдем, что

$$\cos^2 \theta_m + 2 \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta_2 \cos \theta_m + \left(\frac{m_2}{m_1} \sin \theta_2 \right)^2 - \cos^2 \theta_2 = 0. \quad (8)$$

В решении этого уравнения следует выбрать знак перед радикалом, для чего рассмотрим предельные случаи далекого пролета и лобового удара. Например, если $m_2 < m_1$, то из диаграммы, представленной на рис. 3.8, а, в пределе получим

$$\theta_2 \rightarrow 0, \text{ если } \theta_m \rightarrow 0; \quad \theta_2 \rightarrow \pi, \text{ если } \theta_m \rightarrow \pi. \quad (9)$$

К этим предельным значениям приводит решение уравнения (8) с положительным знаком перед радикалом:

$$\cos \theta_m = + \cos \theta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1} \sin \theta_2 \right)^2} - \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta_2. \quad (10)$$

Если $m_2 > m_1$, то из диаграммы, представленной на рис. 3.8, в, можно увидеть, что

$$\theta_2 \rightarrow 0 \text{ при } \theta_m \rightarrow 0 \text{ и } \theta_m \rightarrow \pi, \quad (11)$$

т. е. решение уравнения (8) будет содержать оба знака:

$$\cos \theta_m = \pm \cos \theta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1} \sin \theta_2 \right)^2} - \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta_2. \quad (12)$$

Первая ветвь этой функции, соответствующая положительному знаку перед радикалом, дает значения θ_m , лежащие в пределах от 0 до $\theta_m(\theta_{2\max})$ (при этом θ_2 изменяется от 0 до $\theta_{2\max}$). Вторая ветвь соответствует значениям θ_m , лежащим в пределах от $\theta_m(\theta_{2\max})$ до π (при этом θ_2 изменяется от $\theta_{2\max}$ до 0).

Пример 3.2. *Рассеяние двух частиц, скорости которых до рассеяния равны по величине и противоположны по направлению.*

Пусть скорости обеих частиц до рассеяния относительно l -системы соответственно равны

$$\mathbf{v}_1^- \neq 0, \quad \mathbf{v}_2^- = -\mathbf{v}_1^-.$$

Определить абсолютные величины и направления скоростей частиц в лабораторной системе как функции угла θ_m .

Согласно условию задачи скорость центра масс частиц, разность их скоростей и скорости частиц относительно системы S_m до рассеяния соответственно равны (см. (3.45))

$$\mathbf{v}_m^- = \frac{m_1 - m_2}{m} \mathbf{v}_1^-, \quad \mathbf{v}^- = -2\mathbf{v}_1^-, \quad (1)$$

$$\mathbf{v}'_1^- = 2 \frac{m_2}{m} \mathbf{v}_1^-, \quad \mathbf{v}'_2^- = -2 \frac{m_1}{m} \mathbf{v}_1^-.$$

Отсюда с помощью (3.39) находим

$$\mathbf{v}_1^+ = \frac{m_1 - m_2}{m} \mathbf{v}_1^- - 2 \frac{m_2}{m} v_1^- \mathbf{n}_{\theta_m}, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}_2^+ = \frac{m_1 - m_2}{m} \mathbf{v}_1^- + 2 \frac{m_1}{m} v_1^- \mathbf{n}_{\theta_m}.$$

Поскольку скорости \mathbf{v}'_1^- и \mathbf{v}'_2^- согласно (1) коллинеарны скорости центра масс, постольку движение является плоским не только в системе центра масс, но и в l -системе. Это дает возможность построить плоскую диаграмму скоростей (рис. 3.9). При построении диаграммы мы учли, что между величинами скоростей v_2^+ и v_1^+ имеет место соотношение

$$\frac{v_2^+}{v_1^+} = \frac{m_1}{m_2}$$

и что $v_m^- < v_1^-$ (см. (1)).

Из решения (2) и диаграммы скоростей получим интересные нас функции:

$$v_1^+ = \frac{v_1^-}{m} [4m_2^2 + (m_1 - m_2)^2 - 4m_2(m_2 - m_1) \cos \theta_m]^{1/2},$$

$$v_2^+ = \frac{v_1^-}{m} [4m_1^2 + (m_1 - m_2)^2 - 4m_1(m_1 - m_2) \cos \theta_m]^{1/2}, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \theta_m}{\frac{m_1 - m_2}{2m_2} + \cos \theta_m}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\sin \theta_m}{\frac{m_2 - m_1}{2m_1} + \cos \theta_m}.$$

Проанализируем это решение. Пусть, например, $m_1 > 3m_2$; тогда из (1) и (2) следует

$$v_2^+ > v_1^- > v_m^- > v_1^+. \quad (4)$$

Таким образом, скорость центра масс по величине больше, чем скорость первой частицы в системе S_m , но меньше скорости второй частицы в той же системе. Поэтому функция $\theta_m(\theta_1)$ будет двузначной, функция $\theta_m(\theta_2)$ — однозначной, а θ_1 будет изменяться в пределах от 0 до $\theta_{1\max}$ (рис. 3.9, а). Угол максимального отклонения первой частицы определяется формулой

$$\sin \theta_{1\max} = \frac{2m_2}{m_1 - m_2}. \quad (5)$$

В предельных случаях далекого пролета и лобового удара согласно диаграмме (рис. 3.9, а) имеем:

$$\begin{aligned} \text{если } \theta_m \rightarrow 0, \text{ то } \theta_1 \rightarrow 0 \text{ и } \theta_2 \rightarrow 0; \\ \text{если } \theta_m \rightarrow \pi, \text{ то } \theta_1 \rightarrow 0, \text{ а } \theta_2 \rightarrow \pi. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя эти предельные значения, а также третью и четвертую функции из формул (3), получим выражения:

$$\cos \theta_m = \pm \cos \theta_1 \left[1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1 \right]^{1/2} - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2} \right) \sin^2 \theta_1, \quad (7)$$

$$\cos \theta_m = \cos \theta_2 \left[1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_1} \right)^2 \sin^2 \theta_2 \right]^{1/2} + \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \sin^2 \theta_2. \quad (8)$$

В случае $m_1 = 3m_2$ общее решение (3) приводит к более простым формулам для первой частицы

$$v_1^+ = v_1^- \cos \frac{\theta_m}{2}, \quad \theta_1 = \frac{\theta_m}{2}. \quad (9)$$

Если же $3m_2 > m_1 > m_2$ (рис. 3.9, б), то

$$v_2^+ > v_1^- > v_1^+ > v_m^-. \quad (10)$$

Поэтому как θ_1 , так и θ_2 изменяются от 0 до π , причем в предельных случаях

$$\begin{aligned} \theta_m \rightarrow 0, \theta_1 \rightarrow 0, \theta_2 \rightarrow 0; \\ \theta_m \rightarrow \pi, \theta_1 \rightarrow \pi, \theta_2 \rightarrow \pi. \end{aligned} \quad (11)$$

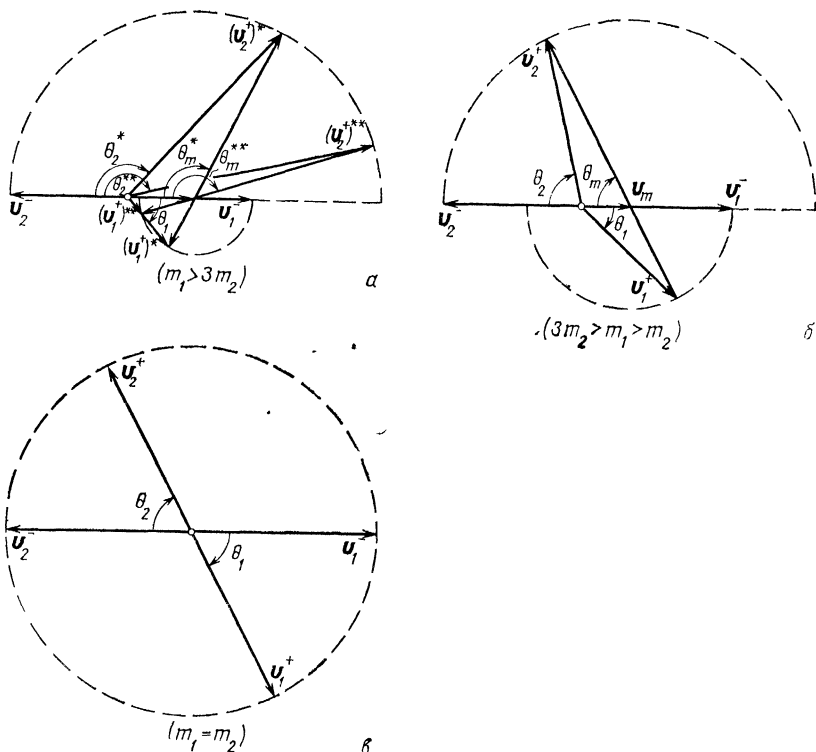


Рис. 3.9

В соответствии с этим из решения (3) аналогично предыдущему получим однозначную функцию $\theta_m(\theta_1)$, которую запишем в виде

$$\cos \theta_m = \cos \theta_1 \left[1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1 \right]^{1/2} - \frac{m_1 - m_2}{2m_2} \sin^2 \theta_1 \quad (12)$$

(меняя здесь индексы 1 и 2 местами, найдем функцию $\cos \theta_m(\theta_2)$).

Наконец, если $m_1 = m_2$, то скорость центра масс равна нулю и, следовательно, с помощью формулы (2) найдем (рис. 3.9, в)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^+ &= \mathbf{v}'_1^+ = -v_1^- \mathbf{n}_{\theta_m}, \\ \mathbf{v}_2^+ &= \mathbf{v}'_1^+ = +v_1^- \mathbf{n}_{\theta_m}. \end{aligned} \quad (13)$$

Соответственно из формулы (3) получим

$$v_1^+ = v_2^+ = v_1^-, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_m. \quad (14)$$

В этом случае решение принимает очень простой вид, так как l -система и система центра масс совпадают.

Пример 3.3. *Рассеяние двух частиц с электростатическим взаимодействием.*

Предполагая, что одна из частиц до рассеяния покоится ($\mathbf{v}_1^- = 0$), а вторая налетает на нее с заданной скоростью \mathbf{v}_2^- относительно l -системы, а также считая известными прицельное расстояние ρ^- и ориентацию плоскости, в которой движутся частицы, определить абсолютные величины и направления скоростей обеих частиц как функции v_2^- и ρ^- .

Часть этой задачи уже решена в примере 3.1. Действительно, формулы (4) этого примера дают интересующие нас величины как функции v_2^- и θ_m — угла рассеяния в l -системе:

$$\begin{aligned} v_1^+ &= v_1^+(v_2^-, \theta_m), \quad \theta_1 = \theta_1(\theta_m), \\ v_2^+ &= v_2^+(v_2^-, \theta_m), \quad \theta_2 = \theta_2(\theta_m). \end{aligned} \quad (1)$$

Теперь нужно найти угол θ_m как функцию скорости v_2^- и прицельного расстояния ρ^- . Эта зависимость определяется интегралом (3.40)

$$\theta_m = \pi - 2 \int_0^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\left(1 + \frac{2\alpha}{\mu\rho^-(v^-)^2} \xi - \xi^2\right)^{1/2}},$$

в котором подставлена потенциальная энергия $U = -\alpha/r$, α — постоянная, характеризующая взаимодействие, $v^- = |\mathbf{v}_2^- - \mathbf{v}_1^-|$ — величина относительной скорости частиц до рассеяния, а ξ_{\max} определяется из уравнения

$$\xi^2 - \frac{2\alpha}{\mu\rho^-(v^-)^2} \xi - 1 = 0$$

(см. (3.41)). Вычисляя этот интеграл, для угла отклонения в l -системе получаем выражение

$$\theta_m = -2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\mu\rho^-(v^-)^2}. \quad (2)$$

В случае сил притяжения ($\alpha > 0$) угол отклонения $\theta_m < 0$, а для сил отталкивания ($\alpha < 0$) этот угол положителен и функция (2) принимает вид

$$\theta_m = 2 \operatorname{arctg} \frac{|\alpha|}{\mu \rho^- (v^-)^2}. \quad (3)$$

В соответствии с условием данного примера в формулах (2) и (3) нужно положить $v^- = v_2^-$.

Совокупность формул (4) примера 3.1 и формул (2), (3) настоящего примера дает решение поставленной задачи. Запишем его в общем виде

$$\begin{aligned} v_1^+ &= v_1^+ [v_2^-, \theta_m(\rho^-, v_2^-)], & \theta_1 &= \theta_1 [\theta_m(\rho^-, v_2^-)], \\ v_2^+ &= v_2^+ [v_2^-, \theta_m(\rho^-, v_2^-)], & \theta_2 &= \theta_2 [\theta_m(\rho^-, v_2^-)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Ввиду громоздкости этого решения приведем более простой частный случай. Пусть, например, массы налетающей и покоящейся до рассеяния частиц равны, тогда, учитывая формулу (6) примера 3.1, получаем

$$v_1^+ = \frac{v_2^-}{\left\{ 1 + \left[\frac{m_2 \rho^- (v_2^-)^2}{2\alpha} \right]^2 \right\}^{1/2}}, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_2, \quad (5)$$

$$v_2^+ = \frac{v_2^-}{\left\{ 1 + \left[\frac{2\alpha}{m_2 \rho^- (v_2^-)^2} \right]^2 \right\}^{1/2}}, \quad \theta_2 = -\operatorname{arctg} \left(\frac{2\alpha}{m_2 \rho^- (v_2^-)^2} \right).$$

Если скорости частиц до рассеяния равны по величине и противоположны по направлению, т. е.

$$\mathbf{v}_2^- = -\mathbf{v}_1^- \quad (v^- = 2v_1^-), \quad (6)$$

то v_1^+ , θ_1 , v_2^+ , θ_2 , как функции v_1^- и ρ^- , будут заданы совокупностью формул (3) примера 3.2 и формул (2), (3) и (6) настоящего примера. В частном случае при $m_1 = 3m_2$ для первой частицы получим (см. формулу (9) примера 3.2)

$$v_1^+ = \frac{v_1^-}{\left\{ 1 + \left[\frac{\alpha}{m_1 \rho^- (v_1^-)^2} \right]^2 \right\}^{1/2}}, \quad \theta_1 = -\operatorname{arctg} \left[\frac{\alpha}{m_1 \rho^- (v_1^-)^2} \right]. \quad (7)$$

Пример 3.4. *Рассеяние двух однородных абсолютно упругих шариков.*

Потенциальная энергия взаимодействия двух указанных частиц с массами m_1 и m_2 имеет вид

$$U(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } r > a, \\ +\infty, & \text{если } r \leq a, \end{cases} \quad (1)$$

где $a = a_1 + a_2$ — сумма радиусов первой и второй частиц-«шариков». Предполагая, что в одном случае вторая частица налетает на первую, покоящуюся до рассеяния, а во втором — обе частицы движутся навстречу друг другу с одинаковой скоростью: Определить абсолютные величины и направления скоростей обеих частиц после рассеяния как функции их скоростей до рассеяния и прицельного расстояния.

Пользуясь (3.40) и (3.41), можно определить угол отклонения θ_m . Однако ввиду обращения U в бесконечность θ_m удобнее определить с помощью графика «эффективной» потенциальной энергии и траекторий частиц в ψ -системе. Действительно, подставляя значение $M'_0 = \mu v^- v^-$ в выражение U_{eff} , получим

$$U_{\text{eff}} = U(r) + E'_0 \left(\frac{\rho^-}{r} \right)^2 \quad \left(E'_0 = \frac{\mu (v^-)^2}{2} \right). \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) дают возможность построить график $U_{\text{eff}}(r)$ (рис. 3.10, а), из которого видно, что

$$\begin{aligned} r_{\min} &= a, & \text{если } E'_0 \geq E'_0 \left(\frac{\rho^-}{a} \right)^2 & \quad (\rho^- \leq a); \\ r_{\min} &= \rho^-, & \text{если } E'_0 \leq E'_0 \left(\frac{\rho^-}{a} \right)^2 & \quad (\rho^- \geq a). \end{aligned} \quad (3)$$

В первом случае происходит столкновение шариков, во втором — нет. Для обоих случаев траектории геометрических центров шариков относительно ψ -системы изображены на рис. 3.10, б и 3.10, в (эти рисунки соответствуют соотношениям $m_1 > m_2$ и $a_1 > a_2$; их полезно сравнить с рис. 2.6 и 3.3). Из рис. 3.10, б и 3.10, в нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \sin \varphi_m &= \frac{\rho^-}{a} & (\rho^- \leq a), \\ \varphi_m &= \frac{\pi}{2} & (\rho^- \geq a). \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда, учитывая соотношение (3.37), найдем

$$\theta_m = \begin{cases} 2 \arccos \left(\frac{\rho^-}{a} \right) & (\rho^- \leq a), \\ 0 & (\rho^- \geq a). \end{cases} \quad (5)$$

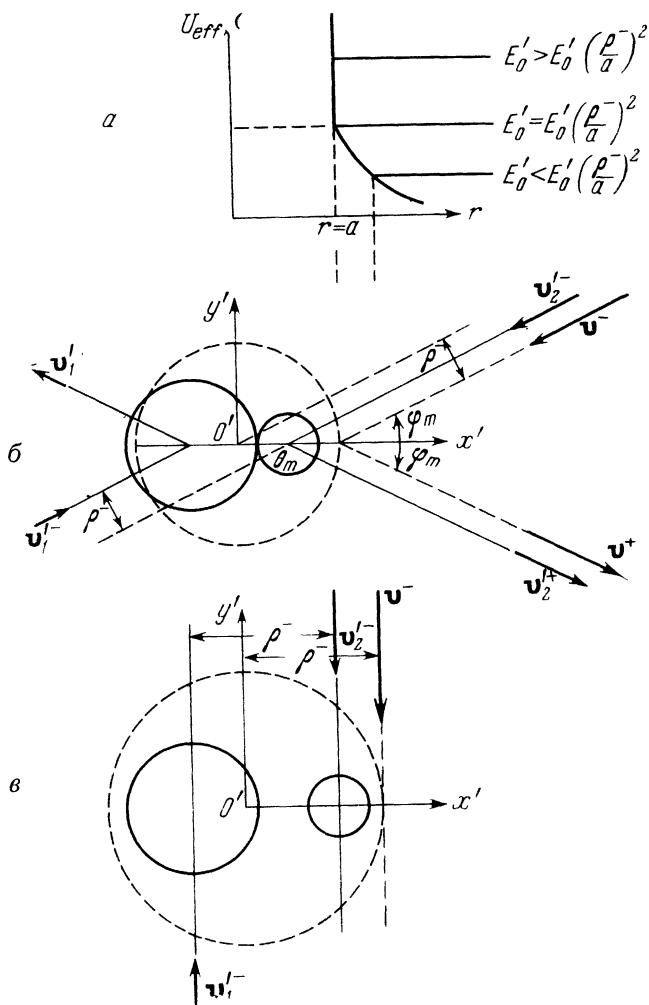


Рис. 3.10

Следовательно, угол θ_m не зависит от разности скоростей и от масс частиц. Он зависит лишь от отношения константы взаимодействия a и прицельного расстояния ρ^- , что связано с особенностью взаимодействия абсолютно упругих шариков. Заметим, что (5) можно получить интегрированием (3.40), определяя r_{\min} из

формулы (3); при этом следует учесть, что потенциальная энергия U в пределах интегрирования от r_{\min} до ∞ равна нулю.

Если скорости обеих частиц до рассеяния относительно l -системы задать так же, как в примерах 3.1 и 3.2, то решение задачи о рассеянии частиц-«шариков» в первом случае определится совокупностью формул (4) примера 3.1 и формулы (5) настоящего примера, а во втором случае — совокупностью формул (3) примера 3.2 и той же формулы (5).

Приведем решение в простейших случаях. Пусть

$$v_1^- = 0, \quad v_2^- \neq 0;$$

тогда, используя формулы (5), (6) примера 3.1 и считая $\rho^- \leq a$, найдем

$$v_1^+ = v_2^- \sqrt{1 - \left(\frac{\rho^-}{a}\right)^2}, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\rho^-}{a}\right), \quad (6)$$

$$v_2^+ = v_2^- \left(\frac{\rho^-}{a}\right), \quad \theta_2 = \arccos\left(\frac{\rho^-}{a}\right) \quad (m_1 = m_2).$$

Решение в случае $v_2^- = -v_1^-$ найдем, используя, например, формулы (9) примера 3.2. Тогда для первой частицы получим

$$v_1^+ = v_1^- \left(\frac{\rho^-}{a}\right), \quad \theta_1 = \arccos\left(\frac{\rho^-}{a}\right), \quad (7)$$

$$(m_1 = 3m_2, \quad \rho^- \leq a).$$

§ 3.3. Поперечные сечения рассеяния

В предыдущем параграфе было изучено рассеяние двух частиц; однако на практике чаще приходится иметь дело не с одним актом рассеяния, а со множеством таких актов. Например, в известных опытах Резерфорда пучок α -частиц рассеивался на ядрах атомов металлической пленки.

Изучим более общий случай рассеяния, а именно рассеяние одного пучка частиц на другом пучке.

Пусть один из пучков, *достаточно разреженный и однородный по сечению, состоит из одинаковых частиц с массами m_1* ; все эти частицы до рассеяния имеют *одинаковые скорости, равные v_1^-* . Второй пучок состоит из других одинаковых частиц с массами m_2 и скоростями до рассеяния v_2^- (в остальном второй пучок удовлетворяет тем же требованиям, что и первый). Процесс рассеяния одного пучка на другом ввиду их разреженности можно свести к рассеянию каждой частицы одного пучка на некоторой части-

це другого пучка, причем рассеяние каждой частицы по той же причине можно считать однократным. Следовательно, в задаче о рассеянии таких пучков нужно учитывать взаимодействие каждой частицы одного пучка с некоторой частицей другого пучка, в то время как взаимодействием частиц данного пучка между собой можно пренебречь. Тогда акты рассеяния разных пар частиц будут независимы друг от друга, причем рассеяние каждой пары характеризуется своим прицельным расстоянием ρ^- и происходит в определенной плоскости относительно системы центра масс пары, т. е. характеризуется своим углом ϵ (см. рис. 3.11, на котором изображены траектории μ -точки для двух различных пар сталкивающихся частиц с одинаковыми ϵ и различными ρ^-).

Центры масс всех пар взаимодействующих частиц покоятся относительно друг друга, поскольку эти центры движутся относительно l -системы с одинаковой скоростью, равной

$$\mathbf{v}_m^- = \frac{1}{m} (m_1 \mathbf{v}_1^- + m_2 \mathbf{v}_2^-).$$

Поэтому угол рассеяния θ_m для каждой данной пары взаимодействующих частиц будет одним и тем же относительно системы отсчета с началом в центре масс любой пары взаимодействующих частиц. Выберем одну из таких систем отсчета и будем называть ее условно системой центра масс или ζ -системой. В этой системе отсчета рассмотрим те μ -точки, прицельные расстояния которых лежат внутри интервала ρ^- , $\rho^- + d\rho^-$, а значение угла ϵ изменяется в пределах от 0 до 2π . В силу *центральной симметрии* взаимодействия между частицами эти μ -точки рассеются на углы от θ_m до $\theta_m + d\theta_m$ каждая в своей плоскости. Следовательно, на достаточном удалении от начала ζ -системы выбранные μ -точки попадут в телесный угол $d\Omega_m$ (рис. 3.11, б). Этот телесный угол ограничен поверхностями конусов с вершинами в начале ζ -системы и углами растворов, равными соответственно $2\theta_m$ и $2(\theta_m + d\theta_m)$; ось конусов параллельна вектору \mathbf{v}_m^- , т. е. параллельна скорости μ -точек до рассеяния. Частицы второго пучка, соответствующие рассмотренным μ -точкам, после рассеяния также попадут в телесный угол $d\Omega_m$, поскольку они движутся по траекториям, подобным траекториям μ -точек. Что касается частиц первого пучка, соответствующих рассмотренным μ -точкам, то они рассеются в телесный угол той же величины, но с раствором конусов, направленным противоположно вектору \mathbf{v}_m^- .

Важной характеристикой процесса рассеяния является дифференциальное эффективное поперечное сечение рассеяния. Например, для частиц первого пучка эта величина определяется как *отношение числа dj_1^+ его частиц, рассеиваемых в телесный угол $d\Omega_m$ за единицу времени, к числу j_1^- час-*

тиц того же пучка, пролетающих за единицу времени через единичную площадку поперечного сечения пучка до рассеяния. Таким образом, дифференциальное сечение рассеяния частиц первого пучка по определению равно

$$d\sigma_1 = \frac{dj_1^+}{j_1^-}. \quad (3.49)$$

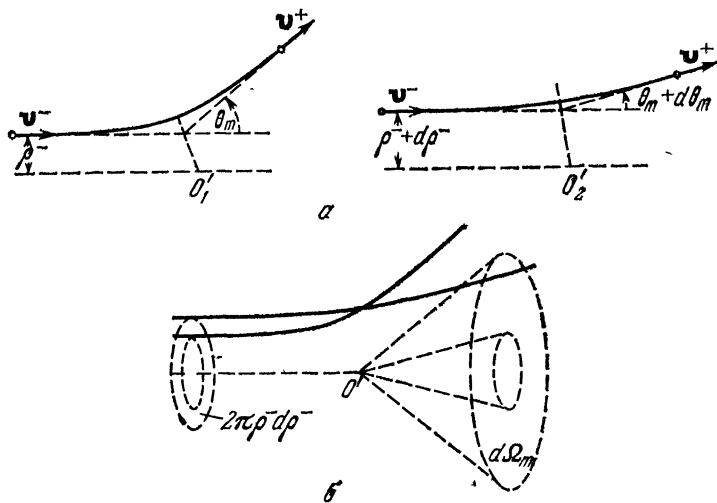


Рис. 3.11

Кроме дифференциального сечения, часто рассматривают полное эффективное сечение рассеяния, равное отношению общего числа Δj_1^+ частиц данного пучка, рассеиваемых за единицу времени под всеми углами $\theta_m \neq 0$, к плотности j_1^- потока этого пучка до рассеяния. Итак, по определению полное сечение рассеяния частиц первого пучка равно

$$\sigma_1 = \frac{\Delta j_1^+}{j_1^-} \quad (3.50)$$

Поскольку до рассеяния пучки однородны по сечению, можно предположить, что поток числа частиц с прицельными расстояниями, лежащими в интервале от ρ^- до $\rho^- + d\rho^-$, равен плотности потока частиц до рассеяния, умноженной на площадь кольца с радиусами, равными ρ^- и $\rho^- + d\rho^-$. Тогда число частиц, рассеиваемых в телесный угол $d\Omega_m$ за единицу времени, равно (для первого пучка)

$$dj_1^+ = j_1^- \cdot 2\pi\rho^- d\rho^- \quad (3.51)$$

Отсюда получим *дифференциальное сечение рассеяния в системе центра масс как функцию прицельного расстояния:*

$$d\sigma = 2\pi\rho^- d\rho^- \quad (3.52)$$

(здесь индекс у $d\sigma$ опущен, так как в ζ -системе две взаимодействующие частицы отклоняются на один и тот же угол θ_m , поэтому сечение рассеяния выражается через прицельное расстояние одинаково как для частиц первого пучка, так и для частиц второго пучка).

Формула (3.52) дает возможность найти наглядное выражение для полного сечения рассеяния в том случае, когда на некотором расстоянии $r=r_{\max}$ между частицами можно пренебречь потенциальной энергией их взаимодействия. Тогда, очевидно, полное сечение будет равно площади круга радиуса r_{\max} :

$$\sigma = \pi (r_{\max})^2. \quad (3.53)$$

На основании (3.52) легко также получить сечение рассеяния как функцию угла θ_m и величины относительной скорости частиц v^- . Действительно, в задаче об упругом рассеянии двух частиц угол θ_m является функцией ρ^- , v^- и масс частиц, причем вид этой функции зависит от характера взаимодействия между частицами. Разрешая функцию (3.40) относительно ρ^- , найдем прицельное расстояние в зависимости от θ_m и v^-

$$\rho^- = \rho^-(\theta_m, v^-), \quad (3.54)$$

а затем, используя (3.52), получим *дифференциальное сечение рассеяния обоих пучков как функцию угла рассеяния в системе центра масс:*

$$d\sigma = 2\pi\rho^- \left| \frac{d\rho^-}{d\theta_m} \right| d\theta_m. \quad (3.55)$$

Знак модуля в (3.55) связан с тем, что производная $\frac{d\rho^-}{d\theta_m}$ может быть отрицательной, а сечение рассеяния по определению является *положительной величиной*. Вместо выражения (3.55) часто используют дифференциальное сечение в виде

$$d\sigma = \frac{\rho^-}{\sin \theta_m} \left| \frac{d\rho^-}{d\theta_m} \right| d\Omega_m, \quad (3.56)$$

где $d\Omega_m = 2\pi \sin \theta_m d\theta_m$.

Экспериментальные исследования процессов рассеяния сводятся к измерению потока частиц до рассеяния и количества частиц, рассеиваемых под различными углами. Тем самым находят

сечения рассеяния в l -системе. Теоретически эти величины можно получить, вычисляя $d\sigma(\theta_m)$ в ζ -системе, а затем определяя функции $\theta_m(\theta_1)$ и $\theta_m(\theta_2)$ из диаграммы скоростей, основанной на решении (3.39) (θ_1 и θ_2 — углы рассеяния частиц первого и второго сорта в l -системе). Дифференциальные сечения рассеяния частиц первого и второго сортов в лабораторной системе можно получить как результат подстановок

$$d\sigma_1 = d\sigma(\theta_m)|_{\theta_m(\theta_1)}, \quad d\sigma_2 = d\sigma(\theta_m)|_{\theta_m(\theta_2)}. \quad (3.57)$$

Формулы (3.57) справедливы, если функции $\theta_m(\theta_1)$ и $\theta_m(\theta_2)$ однозначны; однако примеры 3.1 и 3.2 показывают, что это требование не всегда выполняется. Пусть, например, функция $\theta_m(\theta_2)$ будет двузначной, т. е.

$$\theta_m(\theta_2) = \begin{cases} \theta_m^*(\theta_2), \\ \theta_m^{**}(\theta_2), \end{cases} \quad (3.58)$$

где функции θ_m^* и θ_m^{**} однозначны. Из (3.58) следует, что в l -системе под углом θ_2 рассеиваются все частицы, которые в ζ -системе рассеиваются либо под углом θ_m^* , либо под углом θ_m^{**} . Поэтому в случае двузначной функции $\theta_m(\theta_2)$ для нахождения $d\sigma_2$ следует брать сумму сечений, соответствующих двум ветвям функции. Таким образом, учитывая (3.58), вместо второй из формул (3.57) получим

$$d\sigma_2 = d\sigma(\theta_m)|_{\theta_m^*(\theta_2)} + d\sigma(\theta_m)|_{\theta_m^{**}(\theta_2)}. \quad (3.59)$$

Заметим, что сумма сечений, подобная (3.59), является суммой модулей соответствующих функций, поскольку сечения рассеяния по определению положительны.

Полное сечение захвата σ_s определяется аналогично (3.50) как отношение числа всех частиц данного пучка, захваченных за единицу времени, к плотности потока этого пучка до рассеяния. Если из условий (3.47) и (3.48) вытекает, что прицельные расстояния, при которых происходит захват, удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \rho^- \leq \rho_s^-, \quad (3.60)$$

то, исходя из дифференциального выражения (3.52) и условия (3.60), получим полное сечение захвата

$$\sigma_s = \pi (\rho_s^-)^2. \quad (3.61)$$

Пример 3.5. Дифференциальные сечения рассеяния частиц с электростатическим взаимодействием; формула Резерфорда.

Даны два пучка частиц. Первый пучок состоит из частиц с массой m_1 и зарядом e_1 ; скорость этих частиц до рассеяния относительно l -системы равна \mathbf{v}_1^- . Аналогичные величины для частиц второго пучка равны m_2 , e_2 , \mathbf{v}_2^- . Оба пучка достаточно разрежены и до рассеяния однородны по сечению. Определить дифференциальные сечения рассеяния частиц обоих сортов в l -системе.

Пользуясь формулой (2) примера 3.3, найдем зависимость прицельного расстояния от угла отклонения в ζ -системе:

$$\rho^- = \frac{-\alpha}{\mu (v^-)^2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta_m}{2} \right), \quad (1)$$

где $\alpha = -e_1 e_2$, причем если $\alpha > 0$, то $\theta_m < 0$, если же $\alpha < 0$, то $\theta_m > 0$.

Подставляя эту функцию в (3.56), получим выражение для сечения рассеяния в ζ -системе:

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2\mu (v^-)^2} \right)^2 \frac{d\Omega_m}{\sin^4 \frac{\theta_m}{2}}, \quad (2)$$

где

$$d\Omega_m = 2\pi \sin \theta_m d\theta_m.$$

Для отыскания сечения рассеяния в l -системе нужно знать $\theta_m(\theta_1)$ и $\theta_m(\theta_2)$. Найдем эти функции для двух простых случаев. Пусть, например, частицы первого пучка до рассеяния покоятся, а частицы второго движутся со скоростью \mathbf{v}_2^- . Тогда вторая из формул (4) примера 3.1 дает соотношение

$$\theta_m = \pi - 2\theta_1, \quad (3)$$

где θ_1 изменяется в пределах от 0 до $\pi/2$.

Подставляя (3) в (2), получим дифференциальное сечение рассеяния частиц, которые до рассеяния покоились:

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{\mu (v_2^-)^2} \right)^2 \frac{d\Omega_1}{\cos^3 \theta_1} \left(0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \right), \quad (4)$$

где $d\Omega_1 = 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1$.

Используя формулы (5) и (6) примера 3.1, из формулы (2) данного примера получим дифференциальные сечения рассеяния частиц второго пучка:

$$d\sigma_2 = \left(\frac{\alpha}{2m_2 (v_2^-)^2} \right)^2 \frac{d\Omega_2}{\sin^4 \frac{\theta_2}{2}} (m_2 \ll m_1; 0 \leq \theta_2 \leq \pi), \quad (5)$$

$$d\sigma_2 = \left(\frac{2a}{m_2(v_2^-)^2} \right)^2 \frac{\cos \theta_2 d\Omega_2}{\sin^4 \theta_2} \left(m_2 = m_1; 0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \right), \quad (6)$$

где $d\Omega_2 = 2\pi \sin \theta_2 d\theta_2$. Формула (5) называется формулой Резерфорда. Вывод этой формулы и ее сопоставление с экспериментом по рассеянию быстрых α -частиц на ядрах тяжелых элементов явились в свое время ключом к открытию структуры атома.

Теперь найдем сечение рассеяния частиц второго пучка, если $m_2 > m_1$. В этом случае $\theta_m(\theta_2)$ является двuzначной функцией (см. пример 3.1). Представляя сечение (2) в форме

$$d\sigma = 2\pi \left(\frac{a}{\mu(v^-)^2} \right)^2 \frac{|d \cos \theta_m|}{(1 - \cos \theta_m)^2}, \quad (7)$$

в соответствии с (3.59) получим

$$d\sigma_2 = 2\pi \left(\frac{a}{\mu(v^-)^2} \right)^2 \left\{ \frac{|d \cos \theta_m^*|}{(1 - \cos \theta_m^*)^2} + \frac{|d \cos \theta_m^{**}|}{(1 - \cos \theta_m^{**})^2} \right\}, \quad (8)$$

где $\cos \theta_m^*$ и $\cos \theta_m^{**}$ определяются формулой (12) примера 3.1. Из формулы (12) найдем

$$\begin{aligned} d \cos \theta_m^* &= -(\tau + \eta) \sin \theta_2 d\theta_2, \\ d \cos \theta_m^{**} &= -(\tau - \eta) \sin \theta_2 d\theta_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\tau = \frac{2m_2}{m_1} \cos \theta_2, \quad \eta = \frac{1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 \cos 2\theta_2}{\left[1 - \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 \sin^2 \theta_2 \right]^{1/2}}.$$

Воспользовавшись формулой (7) примера 3.1, найдем пределы изменения угла θ_2

$$0 \leq \theta_2 \leq \theta_{2\max} < \frac{\pi}{2} \quad (m_2 > m_1), \quad (10)$$

определяющего знаки τ и η и их отношение. Из (10) следует, что

$$2 \frac{m_2}{m_1} \geq 2 \frac{m_2}{m_1} \cos \theta_2 \geq 2 \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 - 1} > 0, \quad (11)$$

$$1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 \geq 1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 \cos 2\theta_2 \geq \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 - 1 > 0. \quad (12)$$

Легко также убедиться, что отношение τ/η изменяется от величины, меньшей, чем $+1$, до 0, а производная этого отношения меньше нуля (она равна нулю только при $\theta_2 = 0$).

Учитывая сказанное, из формул (9) получим

$$|d \cos \theta_m^*| = \left\{ \frac{1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cos 2\theta_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2}} + 2 \frac{m_2}{m_1} \cos \theta_2 \right\} \sin \theta_2 d\theta_2, \quad (13)$$

$$|d \cos \theta_m^{**}| = \left\{ \frac{1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cos 2\theta_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2}} - 2 \frac{m_2}{m_1} \cos \theta_2 \right\} \sin \theta_2 d\theta_2,$$

а подставляя (13) в (8), найдем

$$d\sigma_2 = \left(\frac{\alpha}{\mu (v_2^-)^2} \right)^2 \frac{d\Omega_2}{(\zeta_1 \zeta_2)^2} \times \left\{ \frac{1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cos 2\theta_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2}} (\zeta_2^2 + \zeta_1^2) + 2 \frac{m_2}{m_1} \cos \theta_2 (\zeta_2^2 - \zeta_1^2) \right\}, \quad (14)$$

где $\zeta_1 = 1 - \cos \theta_m^*$, $\zeta_2 = 1 - \cos \theta_m^{**}$.

Далее, используя формулы (12) примера 3.1, получим

$$\zeta_1 \zeta_2 = \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)^2 \sin^2 \theta_2, \quad (15)$$

$$\zeta_2^2 + \zeta_1^2 = 2 \left\{ \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta_2 \right)^2 + \cos^2 \theta_2 \left[1 - \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 \sin^2 \theta_2 \right] \right\}, \quad (16)$$

$$\zeta_2^2 - \zeta_1^2 = 4 \cos \theta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 \sin^2 \theta_2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta_2 \right). \quad (17)$$

Наконец, подставляя (15)–(17) в выражение (14), после ряда преобразований найдем дифференциальное сечение рассеяния частиц, налетающих на покоящиеся до рассеяния частицы (при условии $m_2 > m_1$):

$$d\sigma_2 = \left(\frac{\alpha}{m_2 (v_2^-)^2} \right)^2 \frac{1 + \cos^2 \theta_2 - \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 \sin^2 \theta_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 \sin^2 \theta_2}} \frac{d\Omega_2}{\sin^4 \theta_2}. \quad (18)$$

Возьмем другие начальные условия для скоростей. Пусть частицы обоих пучков движутся навстречу друг другу с одинако-

выми скоростями. Тогда функции $\theta_m(\theta_1)$ и $\theta_m(\theta_2)$ определяются третьей и четвертой формулами решения (3) примера 3.2. Например, если $m_1 > 3m_2$, то $\cos \theta_m(\theta_1)$ и $\cos \theta_m(\theta_2)$ заданы формулами (7) и (8) примера 3.2, причем $\cos \theta_m(\theta_1)$ в этом случае является двuzначной функцией, аналогичной функции (12) примера 3.1. Поэтому, используя формулы, аналогичные формулам (7)—(18) настоящего примера, сразу найдем дифференциальное сечение рассеяния частиц первого пучка:

$$d\sigma_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{m_1 (v_1^-)^2} \right)^2 \frac{1 + \cos^2 \theta_1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1}} \frac{d\Omega_1}{\sin^4 \theta_1} \quad (m_1 > 3m_2). \quad (19)$$

Если же $m_1 = m_2$, то из формулы (14) примера 3.2 и формулы (2) настоящего примера следует:

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4m_1 (v_1^-)^2} \right)^2 \frac{d\Omega_1}{\sin^4 \frac{\theta_1}{2}} = d\sigma_2. \quad (20)$$

Все полученные формулы дифференциальных сечений справедливы как в случае сил отталкивания ($\alpha < 0$), так и для сил притяжения ($\alpha > 0$). Нетрудно также убедиться в том, что *полное сечение рассеяния для заряженных частиц равно $+\infty$* . Это связано с бесконечно большим «эффективным радиусом» кулоновских сил: при $\rho^- \rightarrow \infty$ угол отклонения θ_m весьма «медленно» стремится к нулю.

Пример 3.6. *Дифференциальное сечение рассеяния однородных абсолютно упругих шариков.*

Даны два пучка частиц, которые можно представить себе как абсолютно упругие шарики. Первый пучок состоит из частиц массы m_1 и радиуса a_1 , скорость этих частиц до рассеяния относительно l -системы равна v_1^- ; те же величины для частиц второго пучка соответственно равны m_2, a_2, v_2^- . Определить сечения рассеяния частиц в l -системе.

С помощью формулы (5) примера 3.4 найдем прицельное расстояние как функцию угла рассеяния в ζ -системе:

$$\rho^- = a \cos \frac{\theta_m}{2} \quad (a = a_1 + a_2), \quad (1)$$

а затем из (3.55) получим

$$d\sigma = \frac{a^2}{4} d\Omega_m. \quad (2)$$

Следовательно, рассеяние частиц-«шариков» в системе центра масс изотропно. Интегрируя (2) по всем углам, найдем, что полное сечение рассеяния равно $\sigma = \pi a^2$ (см. (3.53)).

Вычислим дифференциальное сечение рассеяния в l -системе. Например, если частицы первого пучка до рассеяния покоятся, а частицы второго движутся со скоростью v_2 , то из формулы (2) настоящего примера и формулы (4) примера 3.1 найдем

$$d\sigma_1 = a^2 \cos \theta_1 d\Omega_1 \quad (3)$$

(при любом соотношении масс частиц). Для вычисления $d\sigma_2$ будем исходить из формул (см. (2), (3.59) и формулы (10), (12) примера 3.1):

$$d\sigma_2 = \frac{\pi a^2}{2} |d \cos \theta_m(\theta_2)|, \quad \text{если } m_2 < m_1, \quad (4)$$

$$d\sigma_2 = \frac{\pi a^2}{2} \{ |d \cos \theta_m^*(\theta_2)| + |d \cos \theta_m^{**}(\theta_2)| \}, \quad \text{если } m_2 > m_1. \quad (5)$$

Тогда, используя анализ функции $d \cos \theta_m(\theta_2)$, проведенный в примере 3.5, из (4) и (5) найдем

$$d\sigma_2 = \frac{a^2}{4} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cos 2\theta_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2}} + 2 \frac{m_2}{m_1} \cos \theta_2 \right\} d\Omega_2 \quad (m_2 < m_1), \quad (6)$$

$$d\sigma_2 = \frac{a^2}{2} \frac{1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cos 2\theta_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2}} d\Omega_2 \quad (m_2 > m_1). \quad (7)$$

Если же частицы первого и второго пучков движутся до рассеяния с одинаковыми скоростями навстречу друг другу, то следует взять функции, полученные в примере 3.2. Используя двузначную функцию (7) и однозначную функцию (12) примера 3.2, а также используя формулы, аналогичные формулам (4) и (5) данного примера и формулам (10)–(12) примера 3.5, найдем дифференциальные сечения рассеяния частиц первого пучка:

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{2} \frac{1 + \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2}\right)^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1}} d\Omega_1 \quad (m_1 > 3m_2), \quad (8)$$

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2} \right)^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1}} + \frac{m_1 - m_2}{m_2} \cos \theta_1 \right\} d\Omega_1$$

($3m_2 > m_1 > m_2$). (9)

Из последнего выражения заменой индексов можно получить сечение рассеяния частиц второго пучка при условии $m_1 > m_2$ (см. формулы (8) и (12) примера 3.2).

Наконец, используя формулу (2) данного примера и формулу (14) примера 3.2, найдем, что в простейшем случае, когда $m_1 = m_2$,

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4} d\Omega_1 = d\sigma_2. \quad (10)$$

Глава IV

ДВИЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

Как отмечалось ранее, уравнения Ньютона справедливы только в инерциальных системах отсчета. Однако на практике часто встречаются и неинерциальные системы. Поэтому необходимо найти уравнения движения относительно таких систем. При этом естественно исходить из уравнений Ньютона, которые, как известно, содержат массы и ускорения материальных точек, а также силы, действующие на них со стороны других тел. Массы точек и время инвариантны относительно перехода от одной системы отсчета к другой, а силы являются функциями положений и скоростей точек. Таким образом, чтобы вывести интересующие нас уравнения движения, прежде всего нужно выяснить, как преобразуются положения, скорости и ускорения при переходе от инерциальной системы к неинерциальной системе отсчета. В свою очередь для решения этого вопроса следует с кинематической точки зрения проанализировать движение одной произвольной системы отсчета относительно другой произвольной системы отсчета. Кстати напомним, что в классической механике системы отсчета мыслятся связанными с твердыми телами, поэтому кинематика движения одной системы отсчета относительно другой эквивалентна кинематике твердого тела.

§ 4.1. Положение системы отсчета

Рассмотрим положение некоторой системы отсчета S' с началом в O' и осями $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$, $\mathbf{n}_{z'}$ относительно системы S с началом в O и осями \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z (рис. 4.1). Положение начала O' относительно системы S определяется вектором \mathbf{r}_O , который на основании (1.1) можно задать в виде разложения по осям системы S :

$$\mathbf{r}_O = x_O \mathbf{n}_x + y_O \mathbf{n}_y + z_O \mathbf{n}_z. \quad (4.1)$$

Ориентацию системы S' относительно системы S можно задать с помощью косинусов углов между осями обеих систем отсчета.

Однако среди девяти направляющих косинусов $a_{i'j}$ только три независимых, поскольку $a_{i'j}$ подчинены шести условиям ортогональности (1.4'').

Часто вместо трех независимых направляющих косинусов используют три угла Эйлера, которые вводятся следующим образом. Построим наряду с системой S' систему S_0 , начало кото-

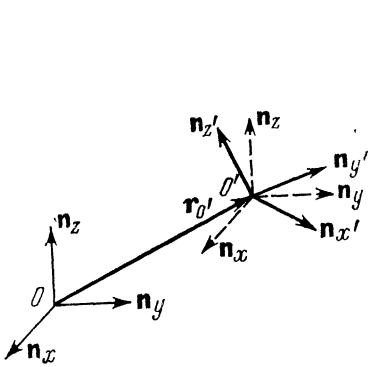


Рис. 4.1

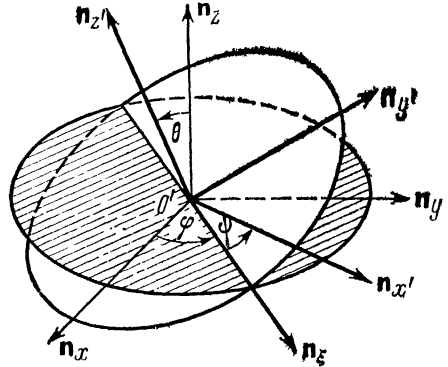


Рис. 4.2

рой совпадает с началом O' , а направления осей — с направлениями соответствующих осей системы S (рис. 4.1 и 4.2). Тогда ориентация системы S' относительно системы S_0 совпадает с ориентацией S' относительно S . Пересечение плоскостей $O'xy$ и $O'x'y'$ определяет прямую $O'\xi$, которая называется линией узлов. Положительное направление на этой линии задается единичным вектором

$$\mathbf{n}_\xi = \frac{[\mathbf{n}_z \mathbf{n}_{z'}]}{|[\mathbf{n}_z \mathbf{n}_{z'}]|}. \quad (4.2)$$

Углами Эйлера называют углы

$$\varphi = \angle(\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_\xi), \quad \theta = \angle(\mathbf{n}_z, \mathbf{n}_{z'}), \quad \psi = \angle(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{n}_{x'}) \quad (4.3)$$

$$(0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi).$$

Положительное направление отсчета углов φ , θ и ψ определяется обычным для правых систем образом с помощью ортов \mathbf{n}_z , \mathbf{n}_ξ и $\mathbf{n}_{z'}$ соответственно. Например, положительным направлением отсчета угла φ считается направление отсчета против часовой стрелки, если смотреть с конца орта \mathbf{n}_z на его основание.

Итак, положение одной произвольной системы отсчета S' относительно другой произвольной системы отсчета S определяется в общем случае шестью независимыми величинами: тремя проекциями радиуса-вектора начала системы S' и тремя углами Эйлера; углы Эйлера определяют ориентацию системы S' относительно системы S . Этот вывод полностью относится к определению положения твердого тела, в чем легко убедиться, жестко скрепляя «штрихованную» систему отсчета с данным твердым телом.

Рассмотрим простейший случай, когда ориентация системы определяется одним углом. Пусть, например, \mathbf{n}_z' параллелен \mathbf{n}_z , т. е. пусть угол $\theta=0$. Тогда плоскость $O'x'y'$ совпадает с плоскостью $O'xy$ и линию узлов можно провести по любой прямой, проходящей через O' в плоскости $O'xy$. Например, совмещая линию узлов с осью $O'x'$ (т. е. полагая $\psi=0$), убеждаемся, что ориентация системы действительно определяется одним углом φ . В этом случае

$$\begin{aligned} a_{x'x} = a_{y'y} = \cos \varphi, \quad a_{x'y} = -a_{y'x} = \sin \varphi, \\ a_{z'z} = 1, \quad a_{x'z} = a_{y'z} = a_{z'y} = 0, \end{aligned}$$

а формулы преобразования ортов сводятся к формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{x'} &= \mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi, \\ \mathbf{n}_{y'} &= -\mathbf{n}_x \sin \varphi + \mathbf{n}_y \cos \varphi, \\ \mathbf{n}_{z'} &= \mathbf{n}_z. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Матрица такого простейшего ортогонального преобразования имеет вид

$$A = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.5)$$

а ее элементы подчинены условиям (см. (1.4'')):

$$\begin{aligned} a_{x'x}^2 + a_{y'x}^2 = 1, \quad a_{x'y}^2 + a_{y'y}^2 = 1, \\ a_{x'x}a_{x'y} + a_{y'x}a_{y'y} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В общем случае матрица A ортогонального преобразования (1.4') определяется тремя углами Эйлера. Выражение коэффициентов $a_{i,j}$ через углы Эйлера нетрудно получить, если заметить, что преобразование от системы S_0 к системе S' может быть выполнено тремя последовательными ортогональными преобразованиями типа (4.4), совершаемыми в определенном порядке, причем соответствующие этим преобразованиям повороты определяются углами Эйлера.

Действительно, перейдем от системы $S_{O'}$ к первой промежуточной системе $O'\xi\eta z$, у которой ось $O'\xi$ совпадает с линией узлов системы S' , а ось $O'z$ совпадает с такой же осью системы $S_{O'}$ (см. рис. 4.3,а). Система $O'\xi\eta z$ может быть получена из системы $S_{O'}$ поворотом последней на угол φ вокруг оси $O'z$ в по-

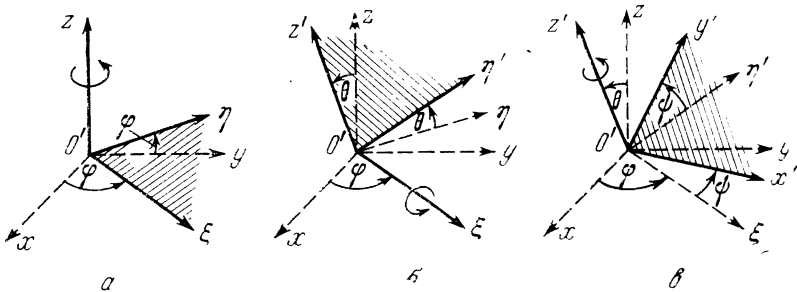


Рис. 4.3

ложительном направлении. Согласно (4.4) преобразование от $S_{O'}$ к $O'\xi\eta z$ и его матрица D определяются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\xi &= \mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi, \\ \mathbf{n}_\eta &= -\mathbf{n}_x \sin \varphi + \mathbf{n}_y \cos \varphi, \\ \mathbf{n}_z &= \mathbf{n}_z, \end{aligned} \quad D = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теперь перейдем от системы $O'\xi\eta z$ ко второй промежуточной системе $O'\xi\eta'z'$, у которой ось $O'z'$ совпадает с той же осью системы S' , а ось $O'\xi$ совпадает с той же осью первой промежуточной системы $O'\xi\eta z$ (рис. 4.3,б). Вторая промежуточная система $O'\xi\eta'z'$ может быть получена из первой системы $O'\xi\eta z$ поворотом на угол θ вокруг оси $O'\xi$ (в положительном направлении). Преобразование от первой ко второй промежуточной системе согласно (4.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\xi'} &= \mathbf{n}_\xi, \\ \mathbf{n}_{\eta'} &= \mathbf{n}_\eta \cos \theta + \mathbf{n}_z \sin \theta, \\ \mathbf{n}_{z'} &= -\mathbf{n}_\eta \sin \theta + \mathbf{n}_z \cos \theta, \end{aligned}$$

а матрица C этого преобразования равна

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}.$$

Наконец, перейдем к системе S' . Она может быть получена поворотом второй промежуточной системы $O'\xi\eta'z'$ на угол θ вокруг оси $O'z'$ в положительном направлении (рис. 4.3,б). Орты системы S' связаны с ортами предыдущей системы соотношениями

$$\begin{aligned}n_{x'} &= n_{\xi} \cos \psi + n_{\eta} \sin \psi, \\n_{y'} &= -n_{\xi} \sin \psi + n_{\eta} \cos \psi, \\n_{z'} &= n_z,\end{aligned}$$

а матрица этого преобразования равна

$$B = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Все приведенные формулы дают возможность выразить $n_{x'}$, $n_{y'}$, $n_{z'}$ через n_x , n_y , n_z и углы Эйлера и тем самым определить матрицу преобразования (1.4') через независимые величины. Эта матрица может быть также получена перемножением матриц B , C , D в порядке, соответствующем последовательности поворотов на углы φ , θ , ψ :

$$A = BCD.$$

Запишем в окончательном виде матрицу преобразования от системы S_0 к системе S' :

$$A = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{vmatrix}. \quad (4.7)$$

Обратное преобразование от системы S' к системе S_0 выражается формулами (1.5''). Матрицу этого преобразования, обратную по отношению к A , обозначают символом A^{-1} . Матрица A^{-1} получается из матрицы A заменой строк на столбцы, т. е. является транспонированной по отношению к A . Транспонированную матрицу обозначают символом \tilde{A} . Таким образом, для ортогональной матрицы A имеем $A^{-1} = \tilde{A}$.

§ 4.2. Поступательное движение и изменение ориентации системы отсчета

Из предыдущего видно, что положение «штрихованной» системы относительно «нештрихованной» будет определено в любой момент времени, если g_0' , φ , θ , ψ заданы как функции времени.

Рассмотрим два вида движения системы: поступательное движение и изменение ориентации. В случае поступательного движения ориентация системы S' относительно системы S остается неизменной. Это означает, что остаются неизменными направления ортов $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$, $\mathbf{n}_{z'}$, т. е. сохраняют постоянное значение косинусы $a_{i'j}$ (или углы Эйлера). Следовательно,

$$\dot{\mathbf{n}}_{x'} = \dot{\mathbf{n}}_{y'} = \dot{\mathbf{n}}_{z'} = 0. \quad (4.8)$$

Таким образом, поступательное движение системы S' определяется движением ее начала O' , т. е. функцией $\mathbf{r}_{O'}(t)$, а все точки твер-

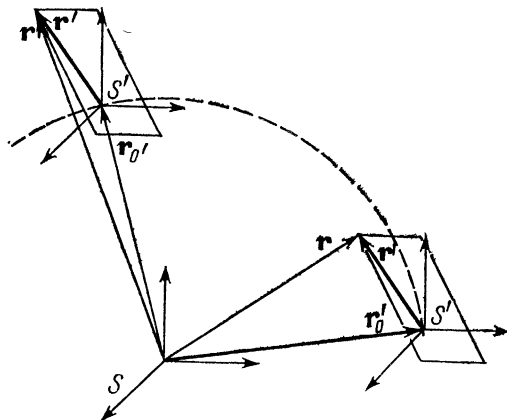


Рис. 44

дого тела, скрепленного с системой S' , движутся с одинаковыми скоростями и ускорениями по траекториям, которые могут быть получены друг из друга параллельным смещением. Действительно, радиусы-векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}' любой точки твердого тела относительно систем S и S' связаны соотношением (1.6), причем абсолютная величина вектора \mathbf{r}' постоянна при произвольных перемещениях твердого тела, а его направление относительно системы S неизменно только при поступательном движении тела (см. рис. 4.4, на котором изображены два положения твердого тела при поступательном движении). Дифференцируя (1.6) по времени и учитывая постоянство \mathbf{r}' , получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_{O'}. \quad (4.9)$$

Другим частным случаем движения системы отсчета (твердого тела) является *изменение ориентации при неизменном положении*

начала системы S' . В этом случае $\mathbf{r}_{O'}$ — постоянный вектор, а орты «штрихованной» системы (косинусы $a_{i'j}$ и углы Эйлера) являются функциями времени. Анализ этого вида движения основывается на простой, но важной теореме Эйлера, в которой утверждается: *если относительно некоторой системы отсчета S твердое*

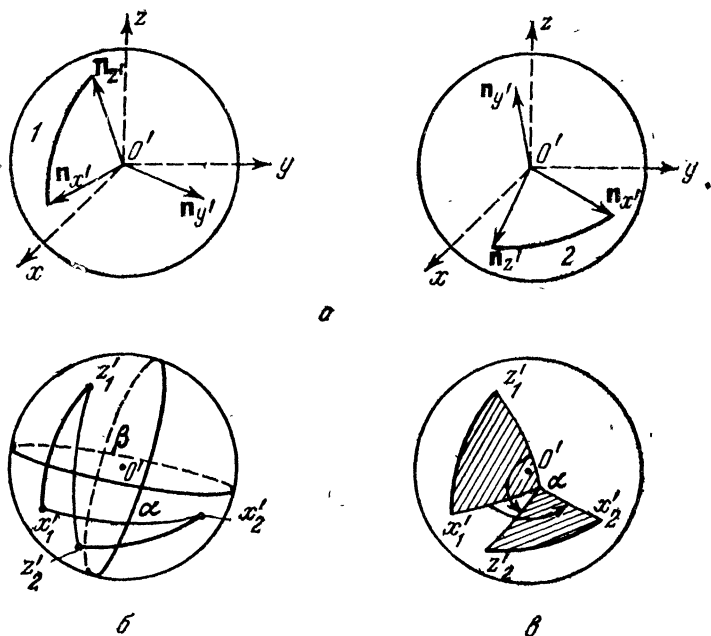


Рис. 4.5

тело имеет одну неподвижную точку, то перемещение твердого тела из любого положения в любое другое положение может быть совершенно одним поворотом на определенный угол вокруг определенной оси, проходящей через неподвижную точку тела.

Доказательство этой теоремы основано на неизменности расстояний между всеми точками твердого тела. Пусть система S' жестко соединена с твердым телом, а ее начало O' находится в неподвижной точке тела. Очертим вокруг точки O' жестко соединенную с твердым телом сферу единичного радиуса, отметив на ней концы ортов $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{z'}$ и соединив эти концы дугой $x'z'$ большого круга. Положение этой дуги определяет положение твердого тела (или системы S'). Следовательно, произвольные положения 1 и 2 тела можно задать двумя положениями $x''_1z''_1$ и $x''_2z''_2$ дуги $x'z'$ (рис. 4.5, а и б).

Чтобы доказать теорему Эйлера, нужно убедиться в том, что дуга x_1z_1 может быть совмещена с дугой x_2z_2 одним поворотом, указать способ нахождения оси и угла поворота. Соединим точки x_1, x_2 и точки z_1, z_2 дугами больших кругов (рис. 4.5, б), а через середины дуг x_1x_2 и z_1z_2 проведем перпендикулярные к ним дуги больших кругов до пересечения их друг с другом в точках α и β . Стороны x_1z_1 и x_2z_2 сферических треугольников $\triangle(x_1z_1\alpha)$ и $\triangle(x_2z_2\alpha)$ (рис. 4.5, в) равны, так как это одна и та же дуга в различных положениях, а стороны $x_1\alpha$ и $x_2\alpha$ равны по построению точки α , лежащей на дуге, проведенной через середину основания x_1x_2 треугольника $\triangle(x_1x_2\alpha)$. Равны друг другу также стороны $z_1\alpha$ и $z_2\alpha$. Таким образом, сферические треугольники $\triangle(x_1z_1\alpha)$ и $\triangle(x_2z_2\alpha)$ равны и, следовательно, равны углы $\angle x_1\alpha z_1$ и $\angle x_2\alpha z_2$. Поэтому угол между дугами $z_1\alpha$ и $z_2\alpha$ равен углу между дугами $x_1\alpha$ и $x_2\alpha$. Итак, если твердое тело (систему S') повернуть из положения 1 вокруг оси $O'\alpha$ на определенный угол $\angle x_1\alpha x_2$ (или равный ему $\angle z_1\alpha z_2$), то твердое тело (система отсчета) переместится в положение 2. Поскольку положения 1 и 2 выбраны произвольно, теорема Эйлера доказана.

Подчеркнем, что теорема Эйлера справедлива для поворотов как на конечные, так и на бесконечно малые углы. Однако сами эти повороты отличаются друг от друга: *результат двух поворотов на конечные углы, вообще говоря, зависит от последовательности этих поворотов*, в то время как *результат двух любых бесконечно малых поворотов с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка не зависит от их последовательности*. Проиллюстрируем это на примере поворотов твердой квадратной пластинки (рис. 4.6). Сначала повернем ее вокруг оси $O'z'$ на $\pi/2$, а затем вокруг оси $O'x'$ также на $\pi/2$ (рис. 4.6, а). После этого изменим последовательность поворотов: повернем пластинку сначала вокруг оси $O'x'$ на $\pi/2$, а затем вокруг $O'z'$ на $\pi/2$ (рис. 4.6, б). Как видно, результат одних и тех же поворотов на конечные углы является различным в зависимости от последовательности поворотов*.

Теперь проанализируем бесконечно малый поворот. Пусть твердое тело (система S') обладает одной неподвижной точкой O' . Положение этого тела в момент времени t определяется углами

* В связи с этим говорят: операция поворота на конечный угол некоммутативна. Этому соответствует некоммутативность умножения матриц конечных поворотов. Например, на с. 154 преобразование A от системы S_0 к системе S' было получено как результат трех ортогональных преобразований B, C и D , примененных в определенном порядке. Соответственно A равняется некоммутативному произведению BCD .

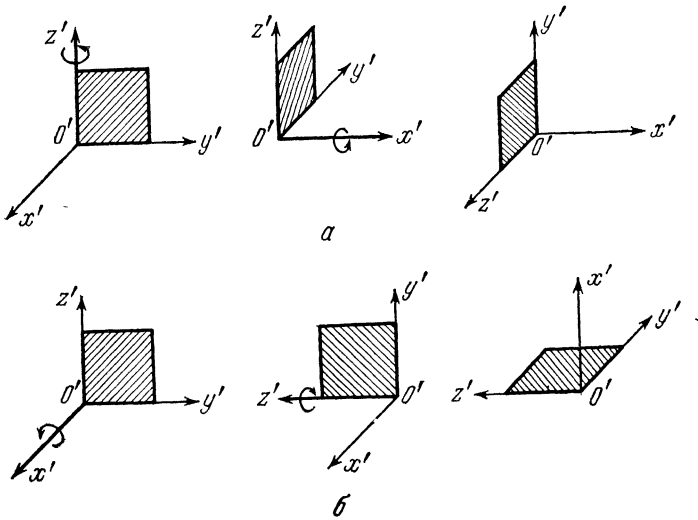


Рис. 4.6

Эйлера φ, θ, ψ , а положение того же тела в момент времени $t+dt$ — углами $\varphi+d\varphi, \theta+d\theta, \psi+d\psi$. Это означает, что орты $\mathbf{n}_{x'}, \mathbf{n}_{y'}, \mathbf{n}_{z'}$, т. е. орты системы S' , занимающие в момент t соответствующие положения, в момент $t+dt$ получают определенные приращения $d\mathbf{n}_{x'}, d\mathbf{n}_{y'}, d\mathbf{n}_{z'}$ (рис. 4.7). Согласно теореме Эйлера перемещение тела (системы S') из первого положения во второе можно совершить одним поворотом на определенный угол $d\chi$ вокруг определенной оси, проходящей через O' . Рассматриваемый бесконечно малый поворот в отличие от конечного поворота можно задать вектором

$$d\chi = d\chi \cdot \mathbf{n}_\chi; \tag{4.10}$$

модуль этого вектора равен углу поворота $d\chi$; прямая, на которой расположен вектор, является осью вращения, а направления вектора $d\chi$ и соответствующего единичного вектора \mathbf{n}_χ выбраны так, чтобы поворот казался совершаемым против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $d\chi$ на неподвижную точку O' . В общем случае величина и направление вектора $d\chi$ могут изменяться со временем. Поэтому ось бесконечно малого поворота, определяемую вектором $d\chi$, называют мгновенной осью вращения.

Нетрудно найти приращение любого жестко связанного с системой S' вектора, которое он получает в результате поворота системы

S' на угол $d\chi$ вокруг \mathbf{n}_χ . Например, учитывая, что приращение орта $\mathbf{n}_{x'}$ перпендикулярно к плоскости, образуемой $d\chi$ и $\mathbf{n}_{x'}$, величина приращения $d\mathbf{n}_{x'}$ равна $d\chi \cdot \sin(\mathbf{n}_\chi, \mathbf{n}_{x'})$ (см. рис. 4.7), приращение $d\mathbf{n}_{x'}$ можно представить в виде

$$d\mathbf{n}_{x'} = [d\chi \mathbf{n}_{x'}], \quad (4.11)$$

Аналогично для приращений $d\mathbf{n}_{y'}$ и $d\mathbf{n}_{z'}$, [полученных в результате того же поворота, имеем

$$d\mathbf{n}_{y'} = [d\chi \mathbf{n}_{y'}], \quad d\mathbf{n}_{z'} = [d\chi \mathbf{n}_{z'}]. \quad (4.12)$$

Для любого вектора \mathbf{r}' , жестко скрепленного с системой S' , найдем

$$d\mathbf{r}' = [d\chi \mathbf{r}']. \quad (4.13)$$

Формула (4.13) позволяет непосредственно убедиться в том, что результат двух бесконечно малых поворотов не зависит от их последовательности. В самом деле, совершая два поворота радиуса-вектора \mathbf{r}' какой-либо точки твердого тела в разной последовательности, для вектора конечного положения выбранной точки получим

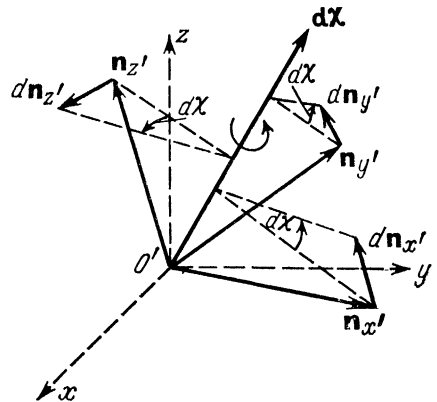


Рис. 4.7

$$\mathbf{r}' + [(d\chi_1 + d\chi_2) \mathbf{r}'] + [d\chi_2 [d\chi_1 \mathbf{r}']]$$

или

$$\mathbf{r}' + [(d\chi_2 + d\chi_1) \mathbf{r}'] + [d\chi_1 [d\chi_2 \mathbf{r}']],$$

где $d\chi_1$ и $d\chi_2$ —векторы рассматриваемых поворотов. Два последних выражения совпадают с точностью до бесконечно малых высшего порядка по величинам $d\chi_1$ и $d\chi_2$. В связи с этим еще раз подчеркнем, что для конечного поворота нельзя написать определение, аналогичное (4.10), так как конечный поворот некоммутативен, а сложение векторов должно быть коммутативной операцией. Поэтому вектор бесконечно малого поворота был обозначен $d\chi$, а не $d\chi$ (вектора χ не существует!).

Угловую скорость или скорость изменения ориентации системы S' относительно системы S

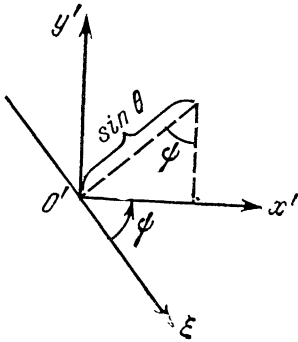


Рис. 4.8

определим как вектор ω , равный отношению вектора $d\chi$ к приращению времени:

$$\omega = \frac{d\chi}{dt}. \quad (4.14)$$

Если система S' (твердое тело) вращается с угловой скоростью ω , то концы базисных векторов $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$ и $\mathbf{n}_{z'}$ движутся относительно системы S с линейными скоростями, соответственно равными (см. (4.11) и (4.12))

$$\dot{\mathbf{n}}_{x'} = [\omega \mathbf{n}_{x'}], \quad \dot{\mathbf{n}}_{y'} = [\omega \mathbf{n}_{y'}], \quad \dot{\mathbf{n}}_{z'} = [\omega \mathbf{n}_{z'}]. \quad (4.15)$$

Угловая скорость ω связана со значениями углов Эйлера и их производными по времени. Установим эту связь, учитывая прежде всего, что в результате поворота, который изображается вектором $d\chi$, углы Эйлера получают приращения $d\varphi$, $d\theta$ и $d\psi$, а указанное изменение ориентации может быть получено также тремя поворотами, осуществленными в любой последовательности, а именно поворотами вокруг \mathbf{n}_z на $d\varphi$, вокруг \mathbf{n}_ξ на $d\theta$ и вокруг $\mathbf{n}_{z'}$ на $d\psi$. Следовательно, вектор поворота $d\chi$ равняется сумме трех векторов:

$$d\chi = \mathbf{n}_z d\varphi + \mathbf{n}_\xi d\theta + \mathbf{n}_{z'} d\psi, \quad (4.16)$$

а угловая скорость может быть задана в виде

$$\omega = \dot{\varphi} \mathbf{n}_z + \dot{\theta} \mathbf{n}_\xi + \dot{\psi} \mathbf{n}_{z'}. \quad (4.17)$$

Найдем разложение ω по ортам системы S' . Для этого умножим (4.17) скалярно на $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$ и $\mathbf{n}_{z'}$ соответственно и выразим необходимые скалярные произведения ортов через углы Эйлера. Например, проектируя орт \mathbf{n}_z на плоскость $O'x'y'$, получим отрезок, перпендикулярный к линии узлов и равный по величине $\sin \theta$ (см. рис. 4.2 и 4.8). Проектируя далее этот отрезок на ось $O'x'$ и ось $O'y'$ соответственно, найдем (см. также матрицу (4.7))

$$\mathbf{n}_z \mathbf{n}_{x'} = \sin \theta \sin \psi, \quad \mathbf{n}_z \mathbf{n}_{y'} = \sin \theta \cos \psi.$$

Кроме того, из определений углов Эйлера (4.3) и линии узлов (4.2) вытекает (см. рис. 4.2), что

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_z \mathbf{n}_{z'} &= \cos \theta, & \mathbf{n}_\xi \mathbf{n}_{z'} &= 0, \\ \mathbf{n}_\xi \mathbf{n}_{x'} &= \cos \psi, & \mathbf{n}_\xi \mathbf{n}_{y'} &= -\sin \psi. \end{aligned}$$

Используя полученные выражения, а также то, что базис системы S' ортонормирован, находим проекции угловой скорости на оси системы S' :

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_{y'} &= \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Аналогично, умножая (4.17) скалярно на \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z соответственно и учитывая, что базис S ортонормирован, получим разложение $\boldsymbol{\omega}$ по осям системы S :

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta.\end{aligned}\quad (4.19)$$

Формулы (4.18) и (4.19) называются кинематическими формулами Эйлера; они устанавливают связь угловой скорости со значениями углов Эйлера и их производными по времени.

Угловая скорость, так же как и вектор $d\mathbf{x}$ бесконечно малого поворота, в общем случае изменяется и по величине, и по направлению. Приведем выражения модуля угловой скорости

$$\omega = (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta)^{1/2} \quad (4.20)$$

и одного из направляющих косинусов мгновенной оси вращения

$$a_{x'\omega} = \frac{\dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi}{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta)^{1/2}}. \quad (4.21)$$

Пример 4.1. *Регулярная прецессия твердого тела.*

Углы Эйлера, определяющие положение твердого тела (системы S') относительно системы S , заданы как функции времени:

$$\varphi = \dot{\varphi}_0 t, \quad \theta = \theta_0, \quad \psi = \dot{\psi}_0 t.$$

Определить законы движения оси $O'z'$ и мгновенной оси вращения твердого тела.

Используя условие и формулы (4.18), (4.19) и (4.20), получим

$$\omega_{x'} = \dot{\varphi}_0 \sin \theta_0 \sin \dot{\psi}_0 t, \quad \omega_x = \dot{\psi}_0 \sin \theta_0 \sin \dot{\varphi}_0 t,$$

$$\begin{aligned}\omega_{y'} &= \dot{\varphi}_0 \sin \theta_0 \cos \dot{\psi}_0 t, & \omega_y &= -\dot{\psi}_0 \sin \theta_0 \cos \dot{\varphi}_0 t, \\ \omega_{z'} &= \dot{\varphi}_0 \cos \theta_0 + \dot{\psi}_0, & \omega_z &= \dot{\varphi}_0 + \dot{\psi}_0 \cos \theta_0. \\ \omega^2 &= \dot{\varphi}_0^2 + \dot{\psi}_0^2 + 2\dot{\varphi}_0 \dot{\psi}_0 \cos \theta_0 = \omega_0^2.\end{aligned}$$

Отсюда ясно, что в рассматриваемом примере величина угловой скорости и ее проекции на оси $O'z$, $O'z'$ сохраняются и, следовательно, углы между ω и этими осями постоянны. Кроме того, мгновенная ось вращения все время находится в плоскости $O'zz'$ или, иначе говоря, ω и линия узлов все время перпендикулярны друг другу. Действительно, из определений углов Эйлера и линии узлов следует, что

$$\mathbf{n}_\xi = \mathbf{n}_{x'} \cos \psi - \mathbf{n}_{y'} \sin \psi$$

(см. также рис. 4.2). Используя это разложение и разложение ω по осям системы S' , убедимся, что скалярное произведение $\omega \mathbf{n}_\xi$ равно нулю.

Таким образом, система S' изменяет свою ориентацию относительно S с постоянной (по величине) угловой скоростью (рис. 4.9). Мгновенная ось вращения системы S' сама вращается вокруг оси $O'z$ с угловой скоростью $\dot{\varphi}_0$ будучи наклоненной под постоянным углом θ_1 к этой оси; косинус угла θ_1 равен (ср. с (4.21)):

$$\cos \theta_1 = \frac{\dot{\varphi}_0 + \dot{\psi}_0 \cos \theta_0}{(\dot{\varphi}_0^2 + \dot{\psi}_0^2 + 2\dot{\varphi}_0 \dot{\psi}_0 \cos \theta_0)^{1/2}}.$$

Ось $O'z'$ также вращается с угловой скоростью $\dot{\varphi}_0$ вокруг оси $O'z$, так как она в любой момент времени находится в одной плоскости с вектором ω и осью $O'z$. Описанное движение твердого тела (или системы отсчета, жестко связанной с ним) называется регулярной прецессией, а угловая скорость $\dot{\varphi}_0$ — скоростью прецессии.

§ 4.3. Общий случай движения системы отсчета

В случае произвольного движения твердого тела и жестко связанной с ним системы отсчета как радиус-вектор ее начала $\mathbf{r}_{O'}$,

так и ее орты (косинусы a_{ij} и углы Эйлера) являются функциями времени. Покажем, что любое перемещение твердого тела и жестко связанной с ним системы S' всегда можно представить как совокупность поступательного перемещения и изменения ориентации с осью поворота, проходящей через начало системы S' .

Действительно, рассмотрим положения 1 и 2 системы S' в моменты времени t и $t+dt$ соответственно (см. рис. 4.1 и 4.10, а).

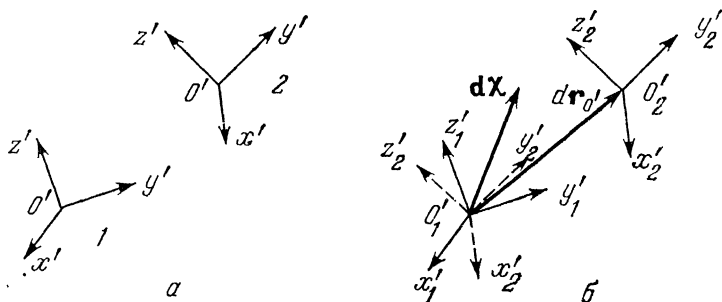


Рис. 4.10

Перемещение системы из положения 1 в положение 2 мысленно можно произвести двояким образом. Например, можно «сначала» совершить такой поворот dX вокруг оси, проходящей через O_1 , в результате которого орты S' будут ориентированы так же, как и в положении 2 (такой поворот по теореме Эйлера всегда возможен); «затем» эту сориентированную систему следует перенести поступательно до совмещения с положением 2 (это перемещение характеризуется dr_{O_1} — перемещением начала системы S' — см. рис. 4.10, б). Изменяя последовательность этих операций, можно «сначала» поступательно перенести систему до совмещения O_1 с O_2 , а «затем» совершить тот же поворот dX вокруг оси, параллельной оси поворота в первом случае, но проходящей через O_2 (слова «сначала» и «затем» не имеют здесь временного смысла).

Учтем далее, что при поступательном движении приращения $dn_x = dn_y = dn_z = 0$ (см. (4.8)). Поэтому из вышесказанного следует, что в общем случае изменение ортов системы S' относительно системы S связано с вектором поворота dX так же, как в том случае, когда начало O' остается неподвижным относительно системы S . Таким образом, выражения (4.15) для производных от единичных векторов и разложения угловой скорости (4.17), (4.18) и (4.19) имеют место и в общем случае.

Указанное выше разложение движения тела на поступательное и вращательное можно осуществить бесконечным числом способов: любую точку твердого тела можно взять за начало O' ,

а ортам системы S' можно задать любую ориентацию, лишь бы все эти «штрихованные» системы были жестко связаны с данным твердым телом. Однако у разных точек твердого тела различное положение и, вообще говоря, различные перемещения по отношению к определенной системе S . Следовательно, функция $\gamma_O(t)$, характеризующая поступательное движение твердого тела, зависит

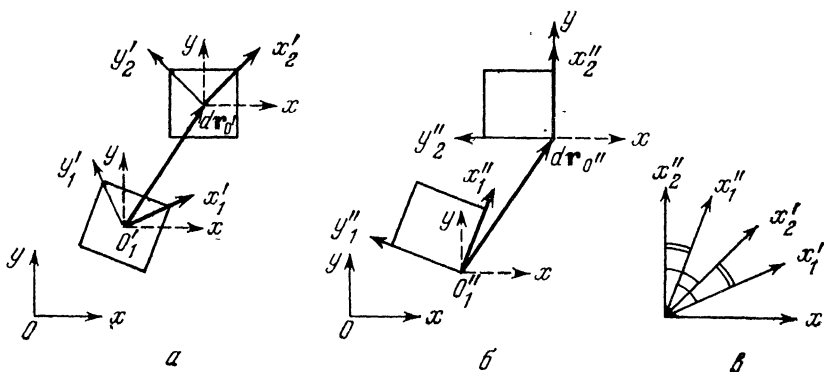


Рис. 4.11

от выбора начала системы S' ; что касается вектора поворота $d\chi(t)$ и угловой скорости $\omega(t)$, то эти функции для данного твердого тела в его движении относительно данной системы отсчета S не зависят от выбора системы S' , жестко связанной с телом, причем ось поворота всегда будет проходить через выбранное начало «штрихованной» системы, т. е.

$$\gamma_O(t) \neq \gamma_{O'}(t), \quad \omega_O(t) = \omega_{O'}(t). \quad (4.22)$$

Проиллюстрируем (4.22) на примере квадратной пластинки, перемещающейся параллельно своей плоскости из положения 1 в положение 2 (см. рис. 4.11, на котором плоскость пластинки совпадает с плоскостью Oxy). Это перемещение можно разложить на отличающиеся друг от друга поступательные перемещения и, как убедимся, одно и то же вращение вокруг параллельных осей, проходящих через различные точки. В самом деле, введем системы S' и S'' , жестко связанные с пластинкой. Ориентация системы S'' относительно S' неизменна. Следовательно, угол между осями $O'x'$ и $O''x''$ при любом положении пластинки остается постоянным и, таким образом, $\angle x'_1 x'_1 = \angle x'_2 x'_2$ (рис. 4.11, в). Поэтому угол поворота $\angle x'_1 x'_2$ равен углу поворота $\angle x''_1 x''_2$. Что касается осей поворота, то они совпадают с осями $O'z'$ и $O''z''$, т. е. параллельны между собой и проходят через O' и O''

соответственно. Итак, в частном случае свойство (4.22) действительно имеет место. Нетрудно провести и аналитическое доказательство (4.22) в общем случае, основываясь на том, что все «штрихованные» системы, жестко связанные с данным твердым телом, сохраняют ориентацию по отношению друг к другу.

§ 4.4. Положение, скорость и ускорение материальной точки относительно разных систем отсчета

Выводы последних трех параграфов позволяют ответить на вопрос: как связаны между собой положения, скорости и ускорения материальной точки, рассматриваемые относительно различных произвольных систем отсчета? В свою очередь ответ на этот вопрос необходим для вывода уравнений движения относительно неинерциальной системы.

Пусть \mathbf{r} является радиусом-вектором материальной точки относительно системы S , а \mathbf{r}' — радиусом-вектором той же точки относительно системы S' . Зададим \mathbf{r} в виде разложения (1.1) по осям системы S . Вектор \mathbf{r}_0' также разложим по осям этой системы:

$$\mathbf{r}_0' = x_0 \mathbf{n}_x + y_0 \mathbf{n}_y + z_0 \mathbf{n}_z, \quad (4.23)$$

а \mathbf{r}' — по осям системы S' :

$$\mathbf{r}' = x' \mathbf{n}_{x'} + y' \mathbf{n}_{y'} + z' \mathbf{n}_{z'}. \quad (4.24)$$

В классической механике между векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' имеет место соотношение (1.6), которое с учетом (1.1), (4.23) и (4.24) можно записать в виде

$$(x - x_0) \mathbf{n}_x + (y - y_0) \mathbf{n}_y + (z - z_0) \mathbf{n}_z = x' \mathbf{n}_{x'} + y' \mathbf{n}_{y'} + z' \mathbf{n}_{z'}. \quad (4.25)$$

Подставляя (1.5'') в (4.25), получим выражения «штрихованных» координат через «нештрихованные», т. е. выражения вида (1.4') с матрицей коэффициентов A . Если же в (4.25) выразить $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$, $\mathbf{n}_{z'}$ через \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z , то найдем преобразование

$$\begin{aligned} x - x_0 &= a_{x'x} x' + a_{y'x} y' + a_{z'x} z', \\ y - y_0 &= a_{x'y} x' + a_{y'y} y' + a_{z'y} z', \\ z - z_0 &= a_{x'z} x' + a_{y'z} y' + a_{z'z} z', \end{aligned} \quad (4.26)$$

определяемое матрицей A^{-1} , обратной по отношению к матрице A .

Теперь рассмотрим движение материальной точки. В общем случае точка движется как относительно системы S , так и относительно системы S' , причем сами системы S и S' также могут

двигаться относительно друг друга. Для определенности будем рассматривать движение относительно S . Тогда орты системы S следует считать постоянными, т. е. не зависящими от времени, а радиус-вектор \mathbf{r}_0 и орты $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$ следует считать функциями времени. В связи с этим систему, относительно которой рассматривается движение, часто называют «неподвижной», а движущуюся относительно нее систему — «подвижной» (условность этой терминологии очевидна).

Получим соотношение между скоростью точки, с которой она движется относительно системы S , и скоростью той же точки, с которой она движется относительно системы S' .

Как известно, скорость точки относительно S равна производной по времени от радиуса-вектора точки при постоянных ортах этой системы (см. (1.9) и (1.12)). Если же продифференцировать по времени \mathbf{r}' при постоянных «штрихованных» ортах, то получим скорость той же точки, но относительно системы S' :

$$\mathbf{v}' = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = \dot{x}'\mathbf{n}_y' + \dot{y}'\mathbf{n}_x' + \dot{z}'\mathbf{n}_z', \quad (4.27)$$

где

$$\dot{x}' = \frac{dx'}{dt}, \quad \dot{y}' = \frac{dy'}{dt}, \quad \dot{z}' = \frac{dz'}{dt}.$$

Используемые в (4.27) символы $\frac{d'}{dt}$ и $\frac{d}{dt}$ означают производные по времени при постоянных «штрихованных» и «нештрихованных» ортах соответственно.

Дифференцируя соотношение (1.6) по времени при постоянных ортах $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$, найдем

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}. \quad (4.28)$$

Согласно (1.9) $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ является скоростью точки относительно S , а $\frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$ — скоростью начала системы S' относительно S . Производная же $\frac{d\mathbf{r}'}{dt}$ не является скоростью точки относительно системы S' , так как ее следует брать, учитывая зависимость $\mathbf{n}_x', \mathbf{n}_y', \mathbf{n}_z'$ от времени, т. е. учитывая вращение S' относительно S :

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = x'\dot{\mathbf{n}}_x' + y'\dot{\mathbf{n}}_y' + z'\dot{\mathbf{n}}_z' + \dot{x}'\mathbf{n}_x + \dot{y}'\mathbf{n}_y + \dot{z}'\mathbf{n}_z. \quad (4.29)$$

Первые три члена правой части (4.29) связаны с изменением ориентации системы S' относительно S . Используя (4.15), их сумму можно представить в виде

$$[\omega(x'n_x + y'n_y + z'n_z)] = [\omega r']. \quad (4.30)$$

Сумма вторых трех членов правой части (4.29) согласно (4.27) равна скорости точки относительно S' . Таким образом, «нештрихованная» производная от r' по времени равна

$$\frac{dr'}{dt} = [\omega r'] + \frac{d'r'}{dt}. \quad (4.31)$$

Подставляя (4.31) в (4.28), получим интересующее нас соотношение между v — скоростью материальной точки относительно системы S и v' — скоростью той же точки относительно системы S' :

$$v = v_0 + [\omega r'] + v'. \quad (4.32)$$

Здесь v_0 и ω — скорость начала и угловая скорость системы S' относительно системы S соответственно, а r' — радиус-вектор материальной точки относительно системы S' . Сумму $v_0 + [\omega r']$ называют переносной скоростью v^h точки. Она представляет собой скорость точки, жестко связанной с системой S' и совпадающей в данный момент времени с рассматриваемой материальной точкой. В самом деле, для такой скрепленной с S' точки скорость $v' = 0$, а скорость относительно S равна

$$v = v_0 + [\omega r']. \quad (4.33)$$

В связи с этим соотношение (4.32) можно представить в виде

$$v = v^h + v'. \quad (4.34)$$

Если точка жестко скреплена с системой S' , движущейся поступательно, то $v' = 0$, $\omega = 0$ и, следовательно, (4.32) перейдет в первое из соотношений (4.9). Если точка жестко скреплена с системой S' , начало которой покоится относительно системы S , то, полагая $v' = 0$ и $v_0 = 0$, из (4.32) получим

$$v = [\omega r'] \quad (4.35)$$

(ср. с. (4.13)).

Найдем соотношение между ускорениями точки относительно систем S и S' . Ускорение w точки относительно системы S получим, дифференцируя по времени скорость точки при постоянных «нештрихованных» ортах (см. (1.10) и (1.13)). Если же продифференцировать (4.27) по времени при постоянных «штрихованных» ортах, то получим ускорение той же точки, но относительно системы S' :

$$w' = \frac{d'v'}{dt} = \ddot{x}'n_x + \ddot{y}'n_y + \ddot{z}'n_z, \quad (4.36)$$

где

$$\ddot{x}' = \frac{d^2x'}{dt^2}, \quad \ddot{y}' = \frac{d^2y'}{dt^2}, \quad \ddot{z}' = \frac{d^2z'}{dt^2}.$$

Связь ускорений \mathbf{w} и \mathbf{w}' найдем, продифференцировав (4.32) при постоянных ортах $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} + \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \mathbf{r}' \right] + \left[\boldsymbol{\omega} \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right] + \frac{d\mathbf{v}'}{dt}. \quad (4.37)$$

Здесь согласно (1.10) $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ и $\frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt}$ есть ускорения точки и начала O' относительно системы S .

Теперь заметим, что для любого вектора \mathbf{a}' , заданного в виде разложения по ортам системы S' , вращающейся относительно системы S , имеет место следующее соотношение между «штрихованной» и «нештрихованной» производными:

$$\frac{d\mathbf{a}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}'] + \frac{d'\mathbf{a}'}{dt} \quad (4.38)$$

(вывод этого соотношения аналогичен выводу (4.31), так как в (4.31) не предполагалось, что \mathbf{r}' является именно радиусом-вектором точки)*.

Полагая в (4.38) вектор \mathbf{a}' равным $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{v}' , получим

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} &= \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt}, \\ \frac{d\mathbf{v}'}{dt} &= [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] + \frac{d'\mathbf{v}'}{dt}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Наконец, из соотношения (4.37), подставляя в него (4.31), (4.39) и используя определения

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \mathbf{v}' = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} \quad \text{и} \quad \mathbf{w}' = \frac{d'\mathbf{v}'}{dt},$$

* Из (4.38) следует, что различие «штрихованной» и «нештрихованной» производных исчезает при поступательном движении «штрихованной» системы. Действительно, если $\boldsymbol{\omega}=0$, то

$$\frac{d\mathbf{a}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{a}'}{dt}.$$

Отметим еще одно следствие, вытекающее из (4.38): проекция производной вектора на подвижное направление не равна производной от проекции вектора на то же направление, например

$$\left(\frac{d\mathbf{a}'}{dt} \right)_{x'} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}']_{x'} + \frac{d\mathbf{a}'_{x'}}{dt} \neq \frac{d\mathbf{a}'_{x'}}{dt}.$$

найдем искомое соотношение между \mathbf{w} и \mathbf{w}' — ускорениями точки относительно систем отсчета S и S' соответственно:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_O + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']] + 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] + \mathbf{w}'; \quad (4.40)$$

здесь, \mathbf{w}_O , $\boldsymbol{\omega}$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ — ускорение начала O' , угловая скорость и угловое ускорение системы S' относительно системы S соответственно; \mathbf{r}' и \mathbf{v}' — радиус-вектор и скорость материальной точки относительно системы S' . Сумму первых трех членов правой части (4.40) называют переносным ускорением \mathbf{w}^h точки. Оно представляет собой ускорение точки, жестко связанной с системой S' и совпадающей в данный момент времени с рассматриваемой материальной точкой. Действительно, для такой связанной с S' точки $\mathbf{v}'=0$ и $\mathbf{w}'=0$, т. е. ее ускорение относительно S равно

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_O + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]. \quad (4.41)$$

Часть $[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}']$ переносного ускорения отлична от нуля лишь при неравномерном вращении, другая же часть $[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]$ всегда направлена перпендикулярно к мгновенной оси вращения и по величине равна $\omega^2\rho$, где ρ — расстояние от оси вращения до точки.

Итак, переносное ускорение связано с ускоренным движением системы S' относительно системы S , а ускорение \mathbf{w}' связано с движением точки относительно S' . Что касается ускорения $2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}']$, то оно появляется в результате как изменения ориентации S' относительно S , так и движения точки относительно S' . Это ускорение называется кориолисовым (или поворотным) ускорением и обозначается \mathbf{w}^c . Оно исчезает в трех случаях: 1) при жестком скреплении точки с системой S' ($\mathbf{v}'=0$); 2) при поступательном движении S' ($\boldsymbol{\omega}=0$) и 3) при движении точки параллельно угловой скорости ($\boldsymbol{\omega}\parallel\mathbf{v}'$).

В заключение, используя введенные обозначения, представим соотношение (4.40) в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^h + \mathbf{w}^c + \mathbf{w}', \quad (4.42)$$

где

$$\mathbf{w}^h = \mathbf{w}_O + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']], \quad \mathbf{w}^c = 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'].$$

Пример 4.2. Положение, скорость и ускорение точки относительно движущейся системы отсчета.

Относительно системы S материальная точка движется в плоскости Oxy по окружности радиуса a_2 с угловой скоростью ω_1 . Определить закон движения точки относительно системы S' , если начало O' этой системы движется по окружности радиуса a_1 с постоянной угловой скоростью ω_1 относительно системы S (плоскость окружности совпадает с плоскостью Oxy , оси Oz и $O'z'$

параллельны), а угол φ между осями $O'x'$ и $O'x$ равняется ωt , где ω постоянно; см. рис. 4.12, а.

Согласно условию движение системы S' относительно S описывается функциями (см. (4.17))

$$\mathbf{r}_O = a_1 (\mathbf{n}_x \cos \omega_1 t + \mathbf{n}_y \sin \omega_1 t),$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}_z, \quad \varphi = \omega t, \quad \theta = 0, \quad \psi = 0,$$

а законом движения точки относительно S является

$$\mathbf{r} = a_2 (\mathbf{n}_x \cos \omega_1 t + \mathbf{n}_y \sin \omega_1 t).$$

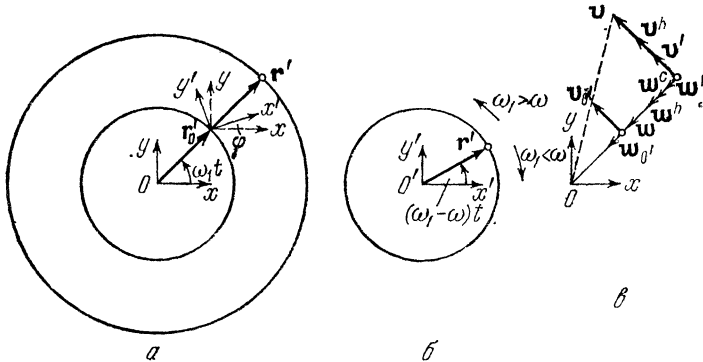


Рис. 4.12

Используя соотношение $\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \mathbf{r}'$, получим разложение вектора \mathbf{r}' по ортам системы S :

$$\mathbf{r}' = (a_2 - a_1) (\mathbf{n}_x \cos \omega_1 t + \mathbf{n}_y \sin \omega_1 t).$$

Отсюда с помощью преобразования

$$\mathbf{n}_x = \mathbf{n}_{x'} \cos \omega t - \mathbf{n}_{y'} \sin \omega t, \quad \mathbf{n}_y = \mathbf{n}_{x'} \sin \omega t + \mathbf{n}_{y'} \cos \omega t$$

найдем разложение вектора \mathbf{r}' по ортам системы S' :

$$\mathbf{r}' = x' \mathbf{n}_{x'} + y' \mathbf{n}_{y'},$$

где

$$x' = (a_2 - a_1) \cos (\omega_1 - \omega) t, \quad y' = (a_2 - a_1) \sin (\omega_1 - \omega) t.$$

Из этих формул видно, что относительно S' точка движется по окружности радиуса $a_2 - a_1$ с постоянной угловой скоростью $\omega' = \omega_1 - \omega$ (рис. 4.12, б). Дифференцируя \mathbf{r}' по времени при постоянных ортах $\mathbf{n}_{x'}$ и $\mathbf{n}_{y'}$, получим скорость \mathbf{v}' точки и ее ускорение \mathbf{w}' относительно S' :

$$\mathbf{v}' = (a_2 - a_1)(\omega_1 - \omega) [-\mathbf{n}_x \sin(\omega_1 - \omega)t + \mathbf{n}_y \cos(\omega_1 - \omega)t],$$

$$\mathbf{w}' = -(\omega_1 - \omega)^2 \mathbf{r}'.$$

Для сопоставления приведем формулы для скорости \mathbf{v} точки и ее ускорения \mathbf{w} относительно S :

$$\mathbf{v} = a_2 \omega_1 [-\mathbf{n}_x \sin \omega_1 t + \mathbf{n}_y \cos \omega_1 t],$$

$$\mathbf{w} = -\omega_1^2 \mathbf{r}.$$

Нетрудно убедиться, что скорости точки относительно S и S' и ее переносная скорость направлены по линии, перпендикулярной радиусу-вектору точки \mathbf{r} , а ускорения точки относительно S и S' , ее переносное и кориолисово ускорения направлены вдоль радиуса-вектора (рис. 4.12, в).

§ 4.5. Уравнение движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета; силы инерции

Пусть некоторая система отсчета S является инерциальной системой, а некоторая другая система S' движется относительно S произвольным, но известным образом. Получим уравнение движения точки относительно системы S' .

Относительно инерциальной системы S движение точки подчинено уравнению движения Ньютона:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}.$$

Здесь \mathbf{w} — ускорение точки относительно S , а \mathbf{F} — сила, действующая на точку со стороны других тел. Подставляя сюда вместо \mathbf{w} его выражение (4.42), преобразуем уравнение движения к виду

$$m\mathbf{w}^h + m\mathbf{w}^c + m\mathbf{w}' = \mathbf{F}.$$

Переносим $m\mathbf{w}^c$ и $m\mathbf{w}^h$ направо и вводя обозначения

$$\mathcal{J}^h = -m\mathbf{w}^h = -m\{\mathbf{w}_O' + [\dot{\omega}'\mathbf{r}'] + [\omega[\omega\mathbf{r}']]\},$$

$$\mathcal{J}^c = -m\mathbf{w}^c = -2m[\omega\mathbf{v}'],$$

получим

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{F} + \mathcal{J}^h + \mathcal{J}^c. \quad (4.43)$$

Векторы \mathcal{J}^h и \mathcal{J}^c называются переносной и кориолисовой силами инерции соответственно, а часть переносной силы, равная $-m[\omega[\omega\mathbf{r}']]$, называется центробежной силой инерции (о свойствах этого вектора см. с. 169).

Уравнение (4.43) является уравнением движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета S' . В самом деле, будем считать си-

лу \mathbf{F} известной функцией радиуса-вектора и скорости точки относительно системы S' , а движение S' относительно S заданным. Следовательно, известны радиус-вектор \mathbf{r}_O начала системы S' и ее угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, а \mathbf{w}_O — ускорение начала O' — и угловое ускорение $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ могут быть определены как функции времени дифференцированием. В этом случае вся правая часть уравнения (4.43) является заданной функцией \mathbf{r}' , \mathbf{v}' и t . Далее, пусть система S' движется ускоренно по отношению к инерциальной системе, т. е. выполняется хотя бы одно из условий

$$\mathbf{w}_O \neq 0, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} \neq 0. \quad (4.44)$$

Тогда какая-либо из сил инерции \mathcal{J}^h или \mathcal{J}^c или обе они вместе будут отличны от нуля и, следовательно, будет отлично от нуля ускорение изолированной точки относительно S' (см. определение неинерциальной системы на с. 36). Таким образом, уравнение (4.43) действительно является уравнением движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета.

Ускорение материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета возникает под действием силы \mathbf{F} со стороны определенного тела (или тел), а также в результате *ускоренного движения системы S' по отношению к инерциальной системе S* . Ускорение материальной точки, связанное с ускорением неинерциальной системы отсчета по отношению к инерциальной системе, можно трактовать как результат действия сил инерции. Для этих сил нельзя указать источник в виде определенного тела, действующего на данную материальную точку. Поэтому данная сила инерции не имеет соответствующей ей противодействующей силы, иначе говоря, силы инерции, в отличие от сил взаимодействия, не подчинены третьему закону Ньютона.

Рассматривая уравнение движения Ньютона, уравнение (4.43) и принцип относительности Галилея, можно убедиться в том, что *инерциальные системы являются преимущественными по сравнению с неинерциальными системами*. В самом деле, силы инерции определены, если известны векторы \mathbf{w}_O и $\boldsymbol{\omega}$, характеризующие движение неинерциальной системы *относительно инерциальной*. Кроме того, уравнение движения точки под действием сил со стороны определенных тел справедливо в *любой инерциальной системе отсчета*, т. е. уравнения движения относительно инерциальной системы в указанном смысле имеют абсолютный характер. С другой стороны, уравнения движения точки под действием сил со стороны определенных тел, вообще говоря, различны в разных неинерциальных системах отсчета (поскольку для этих систем различны ускорение начала \mathbf{w}_O и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$).

Пример 4.3. Уравнение движения точки относительно Земли.

Найти уравнение движения точки около поверхности Земли относительно Земли.

Пренебрегая воздействием планет солнечной системы на движение Солнца (см. пример 2.9), примем в качестве инерциальной системы отсчета систему S с началом O в центре инерции Солнца и осями, направленными на «неподвижные» звезды. Относительно этой системы центр инерции Земли движется по эллипсу под действием силы притяжения со стороны Солнца. Кроме того, Земля изменяет свою ориентацию относительно S с угловой скоростью ω , которую можно считать практически постоянной и равной по величине $2\pi/(24 \cdot 3600)$ рад в звездную секунду или приближенно равной $7,3 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ [41, § 12, 16].

Введем жестко связанную с Землей систему S' с началом O' в центре инерции Земли. Уравнение движения точки относительно этой системы имеет вид

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{F} - m\mathbf{w}_O - m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}']] - 2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'].$$

Теперь учтем, что на точку действуют силы притяжения со стороны Земли и Солнца, а также другие силы, например сила сопротивления атмосферы Земли. Обозначим указанные силы через $\mathbf{F}_{O'}$, \mathbf{F}_O и Φ . Тогда

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{O'} + \mathbf{F}_O + \Phi,$$

где силы притяжения Земли и Солнца соответственно равны

$$\mathbf{F}_{O'} = -\gamma \frac{mm_{O'}}{(r')^3} \mathbf{r}', \quad \mathbf{F}_O = -\gamma \frac{mm_O}{r^3} \mathbf{r}$$

(здесь $m_{O'}$ — масса Земли, m_O — масса Солнца, \mathbf{r}' и \mathbf{r} — радиусы-векторы точки относительно S' и S). Учитывая, что ускорение центра инерции Земли относительно S равно

$$\mathbf{w}_{O'} = -\gamma \frac{m_O}{r_{OO'}^3} \mathbf{r}_{OO'}$$

(здесь $\mathbf{r}_{OO'}$ — вектор, начало и конец которого находятся в точках O и O' соответственно), запишем уравнение движения относительно S' в виде

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{F}_{O'} - \gamma \frac{mm_O}{r^3} \mathbf{r} + \gamma \frac{mm_O}{r_{OO'}^3} \mathbf{r}_{OO'} - m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}']] - 2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] + \Phi.$$

Ограничиваясь случаем движения точки около поверхности Земли, можно считать, что r' порядка R , где R — радиус Земли. Тогда величина r' подчинена условию $r' \ll r_{OO'}$, поскольку радиусы-векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}' связаны соотношением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{OO'} + \mathbf{r}'$, а $R \ll r_{OO'}$. При таком ограничении часть переносной силы инерции $-m\mathbf{w}_{O'}$ и сила притяжения Солнца \mathbf{F}_O компенсируют друг

друга и уравнение движения точки около поверхности Земли примет вид

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{F}_O - m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']] - 2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] + \Phi. \quad (1)$$

Заметим, что пренебрежение разницей между силой инерции $-m\mathbf{w}_O'$ и силой притяжения \mathbf{F}_O исключает объяснение приливных явлений, вызываемых Солнцем на поверхности Земли.

Легко оценить влияние сил инерции, если сопоставить центробежное и кориолисово ускорения с ускорением силы тяготения на поверхности Земли, по величине равным

$$\left. \frac{F_O}{m} \right|_{r'=R} = \gamma \frac{m_O}{R^2} \approx 9,8 \text{ м/с}^2.$$

Отношения максимальных величин центробежного и кориолисова ускорений к ускорению силы тяготения будут соответственно равны

$$\frac{\omega^2 R^3}{\gamma m_O} \approx 0,003; \quad \frac{2\omega R^2}{\gamma m_O} v' \approx 1,5 \cdot 10^{-5} v'. \quad (R \approx 6,4 \cdot 10^6 \text{ м})$$

(здесь v' следует подставлять в м/с).

Отсюда видно, что влияние кориолисовой силы по сравнению с центробежной мало, если скорость $v' \ll \frac{\omega R}{2} \approx 2,3 \cdot 10^2 \text{ м/с}$.

В свою очередь, центробежная сила мала по сравнению с силой тяготения. Однако несмотря на малую величину сил инерции относительно геоцентрической системы отсчета, эти силы в ряде задач необходимо учитывать.

Например, рассмотрим движение точки около поверхности Земли в некоторой малой области по сравнению с радиусом Земли R . Для изучения такого движения удобно ввести систему отсчета S'' с началом O'' на поверхности Земли. Эта система так же жестко связана с Землей, как и система S' . Радиусы-векторы, скорости и ускорения точки относительно систем S' и S'' весьма просто выражаются друг через друга, поскольку система S'' не движется относительно S' . Действительно, применяя соотношения (1.6), (4.32) и (4.40) к этим системам, найдем

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_{O'O''} + \mathbf{r}'', \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}'', \quad \mathbf{w}' = \mathbf{w}'',$$

где $\mathbf{r}_{O'O''} = R\mathbf{n}_R$, а \mathbf{n}_R — единичный вектор, направленный от центра Земли к началу O'' . Используя эти соотношения и условие малости области движения ($r'' \ll R$), приведем уравнение движения точки к виду

$$m\mathbf{w}'' = \mathbf{F}_O - mR[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{n}_R]] - 2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}''] + \Phi,$$

где

$$\mathbf{F}_O = -\gamma \frac{mm_{O'}}{R^2} \mathbf{n}_R.$$

Два первых члена в правой части этого уравнения пропорциональны массе точки и не зависят от положения и скорости точки в системе S'' . Обозначим сумму этих членов вектором \mathcal{P} :

$$\mathcal{P} = mg, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{g} = -\gamma \frac{m_{O'}}{R^2} \mathbf{n}_R + \omega^2 R \cos \theta \cdot \mathbf{n}_p,$$

\mathbf{n}_p — единичный вектор, перпендикулярный к оси вращения Земли и направленный от этой оси; θ — геоцентрическая широта, т. е. угол между экваториальной плоскостью и направлением от центра Земли на O'' — начало системы S'' (рис. 4.13). Используя обозначения (2), приходим к *уравнению движения точки около поверхности Земли*

$$m\mathbf{w}'' = m\mathbf{g} - 2m[\omega\mathbf{v}''] + \Phi, \quad (3)$$

справедливому в достаточно малой области на заданной широте.

Отсюда видно, что сила, измеряемая при взвешивании тела, равна сумме силы притяжения Земли и центробежной силы инерции. Действительно, пусть взвешивание происходит с помощью динамометра. Тогда Φ является упругой силой, действующей на взвешиваемое тело со стороны пружины динамометра. Изменяя длину пружины и положение прикрепленного к ней тела, можно достичь состояния покоя этого тела относительно Земли, т. е. состояния, в котором $\mathbf{v}'' = 0$ и $\mathbf{w}'' = 0$. С другой стороны, сила Φ , с которой пружина покоящегося динамометра действует на тело, по величине равна весу тела, т. е. силе, с которой покоящееся тело действует на пружину динамометра. Следовательно, если и весы, и взвешиваемое тело покоятся относительно Земли, то вес тела равняется \mathcal{P} — сумме силы тяжести и центробежной силы инерции. Линия действия \mathcal{P} называется вертикалью, а угол между вертикалью и плоскостью экватора — географической широтой ψ .

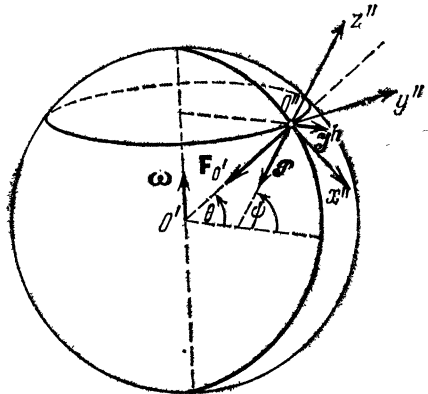


Рис. 4.13

Как мы видели, для достаточно малых скоростей можно пренебречь силой Кориолиса по сравнению с центробежной силой. Если же, кроме того, пренебречь и сопротивлением атмосферы, то *ускорение любого свободно падающего тела относительно Земли будет одинаково на данной широте и равно вектору g* . Следовательно, ускорение свободно падающего тела, как и вес тела (см. (2)), зависит от географической широты ψ . Однако *отношение веса к этому ускорению равно постоянной для данного тела величине, т. е. равно массе тела*:

$$\frac{P(\psi)}{g(\psi)} = m. \quad (4)$$

Отсюда, учитывая независимость ускорения $g(\psi)$ от свойств тела, получим, что *отношение весов двух тел равно отношению масс этих тел*:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (5)$$

Это соотношение обычно используется в практике измерения масс*.

Пример 4.4. *Отклонение падающего (или взлетающего) тела от вертикали.*

Рассмотрим два случая движения свободной материальной точки относительно Земли: падение с нулевой начальной скоростью и движение с начальной скоростью, направленной вверх по вертикали. Будем считать, что движение в обоих случаях происходит в достаточно малой области на географической широте ψ , а сопротивлением атмосферы можно пренебречь. Тогда уравнением движения точки является уравнение (3) предыдущего примера, где $\Phi=0$. Начало системы S'' , жестко связанной с Землей, поместим на поверхности Земли на одной вертикали с материальной точкой в ее начальном положении; ось $O''z''$ направим вверх по вертикали, ось $O''x''$ — на юг, а ось $O''y''$ — на восток (рис. 4.13). В этой системе проекции постоянных векторов, входящих в уравнение движения, соответственно равны

$$g = (0, 0, -g), \quad \omega = (-\omega \cos \psi, 0, \omega \sin \psi).$$

Опуская для удобства штрихи у переменных, из уравнения

* Независимость ускорения свободного падения от свойств тела была экспериментально установлена Галилеем [2, с. 158], а утверждение (4), также основанное на опыте, было одним из важнейших утверждений, положенных Ньютоном в основу понятия о массе.

(3) примера 4.3 получим уравнения движения точки относительно системы S'' :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\omega\dot{y} \sin \psi, \\ \ddot{y} &= -2\omega(\dot{x} \sin \psi + \dot{z} \cos \psi), \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega\dot{y} \cos \psi.\end{aligned}\quad (1)$$

Одно интегрирование системы (1) после подстановки начальных условий дает

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}_0 + 2\omega(y - y_0) \sin \psi, \\ \dot{y} &= \dot{y}_0 - 2\omega[(x - x_0) \sin \psi + (z - z_0) \cos \psi], \\ \dot{z} &= -gt + \dot{z}_0 + 2\omega(y - y_0) \cos \psi.\end{aligned}\quad (2)$$

Подставим решение (2) в уравнения движения (1) и пренебрежем членами порядка ω^2 . Тогда придем к системе уравнений, правые части которых являются либо постоянными, либо функциями только времени:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\omega\dot{y}_0 \sin \psi, \\ \ddot{y} &= -2\omega[\dot{x}_0 \sin \psi + (-gt + \dot{z}_0) \cos \psi], \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega\dot{y}_0 \cos \psi.\end{aligned}$$

Отсюда нетрудно получить приближенное решение для проекций радиуса-вектора точки:

$$\begin{aligned}x &= \omega\dot{y}_0 t^2 \sin \psi + \dot{x}_0 t, \\ y &= \omega g \frac{t^3}{3} \cos \psi - \omega(\dot{x}_0 \sin \psi + \dot{z}_0 \cos \psi) t^2 + \dot{y}_0 t, \\ z &= (-g + 2\omega\dot{y}_0 \cos \psi) \frac{t^2}{2} + \dot{z}_0 t + z_0\end{aligned}\quad (3)$$

(здесь учтено, что в силу выбора системы отсчета $x_0 = y_0 = 0$).

В случае падения точки с высоты z_0 с нулевой начальной скоростью

$$\begin{aligned}x &= 0, \quad y = \frac{1}{3} g \omega t^3 \cos \psi, \\ z &= -\frac{gt^2}{2} + z_0.\end{aligned}$$

Эти функции определяют время падения точки на поверхность

Земли и величину отклонения точки на восток:

$$\Delta t = \left(\frac{2z_0}{g} \right)^{1/2},$$

$$\Delta y = \frac{1}{3} \left(\frac{2z_0}{g} \right)^{3/2} g \omega \cos \psi.$$

В случае вертикального взлета точки с поверхности Земли ($z_0 = 0$, $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 > 0$) решение (3) имеет вид

$$x = 0, \quad y = \omega \cos \psi \left(\frac{gt^3}{3} - z_0 t^2 \right), \quad z = -\frac{gt^2}{2} + z_0 t.$$

Отсюда для полного времени полета точки и ее западного склонения соответственно находим

$$\Delta t = \frac{2z_0}{g}, \quad \Delta y = -\frac{4}{3} \frac{z_0^3}{g^2} \omega \cos \psi.$$

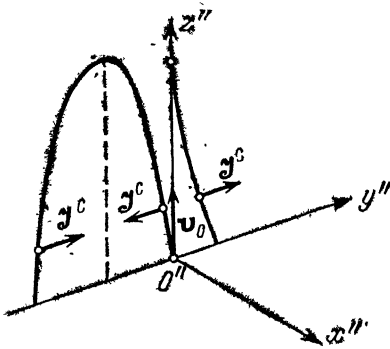


Рис. 4.14

Итак, в обоих случаях точка остается в плоскости, перпендикулярной меридиану; однако в первом случае она отклоняется на восток, а во втором — на запад (имеется в виду движение в северном полушарии). Причиной отклонения с точки зрения земного наблюдателя является кориолисова сила инерции \mathcal{F}^c (траектории точки и направления сил инерции изображены на рис. 4.14).

Пример 4.5. Состояние невесомости.

Рассмотрим поведение тела, находящегося в спутнике, который движется под действием притяжения Земли вне ее атмосферы с выключенным двигателем. Допустим, что спутник изменяет ориентацию относительно инерциальной системы отсчета с постоянной угловой скоростью ω (в качестве инерциальной системы с достаточной степенью точности можно принять систему S , начало которой помещено в центр инерции Земли, а оси направлены на «неподвижные» звезды). Определить силу, с которой стенка спутника действует на материальную точку, соприкасающуюся со стенкой.

На любую материальную точку, находящуюся в спутнике, действует \mathbf{F}^e — сила притяжения со стороны Земли и, кроме того, может отличаться от нуля \mathbf{R} — сила, с которой на точку действует оболочка спутника или скрепленные с оболочкой тела. Уравнение движения точки массы m относительно системы S' с началом в центре масс спутника и осями, жестко связанными со спутником, имеет вид (см. (4.43))

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{R} + \mathbf{F}^e - m\mathbf{w}_M - m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']] - 2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'].$$

Ускорение \mathbf{w}_M центра масс спутника нетрудно определить, учитывая силу притяжения спутника Землей и пренебрегая воздействием материальной точки на движение центра масс.

Используя уравнение (2.102), получим

$$\mathbf{w}_M = -\frac{\gamma m_3}{M} \sum_j \frac{m_j}{r_j^3} \mathbf{r}_j, \quad (1)$$

где m_3 — масса Земли; \mathbf{r}_j , m_j — радиус-вектор и масса j -той достаточно малой части спутника, а $M = \sum_j m_j$ — масса спутника.

В уравнении (1) векторы \mathbf{r}_j можно заменить на радиус-вектор \mathbf{r}_M центра масс спутника, поскольку *размеры спутника исчезающе малы по сравнению с расстоянием от центра Земли до любой точки спутника*. Поэтому

$$\mathbf{w}_M = -\gamma \frac{m_3}{r_M^3} \mathbf{r}_M.$$

По той же причине *сила притяжения \mathbf{F}^e и сила инерции $-m\mathbf{w}_M$ компенсируют друг друга*:

$$\mathbf{F}^e - m\mathbf{w}_M = \gamma m m_3 \left(\frac{\mathbf{r}_M}{r_M^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \approx 0;$$

здесь \mathbf{r} — радиус-вектор материальной точки относительно S . Таким образом, приходим к уравнению движения точки относительно спутника

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{R} - m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']] - 2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'].$$

Если материальная точка, соприкасающаяся со стенкой спутника или с поверхностью тела, скрепленного со спутником, находится в покое, то сила, с которой стенка или тело действует на точку, отлична от нуля и равна

$$\mathbf{R} = m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']].$$

Следовательно, и точка действует на стенку с силой, равной по величине $m\omega^2\rho$ (ρ — расстояние точки до оси вращения, проходящей через центр масс спутника). Эта сила и является весом точки во вращающемся спутнике (ср. с определением веса на с. 175). Если точка соприкасается с достаточно малым телом, скрепленным со спутником и размещенным на оси вращения, проходящей через центр масс спутника, то $\mathbf{r}'\|\boldsymbol{\omega}$ и вес точки равняется нулю, т. е. точка невесома $\dot{\mathbf{a}}$ (она не давит на «подставку»).

Если же $\boldsymbol{\omega} = 0$ (т. е. спутник движется *поступательно относительно инерциальной системы отсчета*), то в любом месте спутника точка невесома. В состоянии невесомости точка либо покоится относительно спутника, либо движется равномерно и прямолинейно до столкновения с другими телами*.

§ 4.6. Законы изменения кинетического момента и кинетической энергии относительно поступательно движущейся системы центра масс

Система S_m или поступательно движущаяся система центра масс характеризуется тем, что *ее начало O' находится в центре масс механической системы, а ее угловая скорость относительно инерциальной системы S равна нулю*, т. е.

$$\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{r}_m, \quad \boldsymbol{\omega} = 0, \quad (4.45)$$

где \mathbf{r}_m — радиус-вектор центра масс механической системы. Если ускорение центра масс отлично от нуля, то поступательно движущаяся система центра масс является неинерциальной системой (см. условие (4.44)), однако по сравнению с другими неинерциальными системами она обладает рядом особых свойств. Например, соотношения между положениями, скоростями и ускорениями точек, взятыми относительно S и S_m , согласно (1.6), (4.32), (4.40) и (4.45) имеют вид

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_m + \mathbf{r}'_i, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_m + \mathbf{v}'_i, \quad \mathbf{w}'_i = \mathbf{w}'_m + \mathbf{w}'_i \quad (4.46)$$

(здесь $i = 1, 2, \dots, N$; N — число точек механической системы). Отсюда видно, что все величины \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i и \mathbf{w}_i являются суммами двух членов: один из них характеризует движение центра масс относительно инерциальной системы S , а другой — движение точек относительно системы S_m .

* «Инерциальность» невращающейся системы S' связана не с поведением точки в отсутствие прочих тел (см. определение на с. 35), а с тем, что гравитационное поле в достаточно малой пространственной области одинаково ускоряет все тела. Поэтому системы, подобные S' , называются локально-инерциальными.

Из первого условия (4.45) вытекает, что радиус-вектор, скорость и ускорение центра масс относительно системы S_m равны нулю:

$$\dot{\mathbf{r}}_m = 0, \quad \dot{\mathbf{v}}_m = 0, \quad \dot{\mathbf{w}}_m = 0. \quad (4.47)$$

Следовательно, в системе центра масс существуют зависимости между радиусами-векторами, скоростями и ускорениями всех точек соответственно. Действительно, пользуясь определениями (2.89), (2.90), (2.91) в системе S_m и учитывая (4.47), найдем, что

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{w}}_i = 0. \quad (4.48)$$

Второе из этих соотношений означает, что \mathbf{P}' — импульс механической системы относительно S_m — равен нулю. Итак, *импульсы механической системы относительно S и S_m соответственно равны* (см. (2.93))

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_m, \quad \mathbf{P}' = 0. \quad (4.49)$$

Используя определения кинетического момента и момента внешних сил (см. с. 103), а также используя соотношения (4.46), получим

$$\mathbf{M} = \sum_i m_i [\mathbf{r}_m \mathbf{v}_m] + \sum_i m_i [\mathbf{r}'_i \mathbf{v}_m] + \sum_i m_i [\mathbf{r}_m \mathbf{v}'_i] + \mathbf{M}',$$

$$\mathbf{L}^e = \sum_i [\mathbf{r}_m \mathbf{F}_i^e] + (\mathbf{L}^e)',$$

где $\mathbf{M}' = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}'_i \mathbf{v}'_i]$ — кинетический момент системы относительно S_m ,

$(\mathbf{L}^e)' = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}'_i \mathbf{F}_i^e]$ — сумма моментов внешних сил относительно S_m .

Отсюда, учитывая (4.48), найдем

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_m \mathbf{P}] + \mathbf{M}', \quad (4.50)$$

$$\mathbf{L}^e = [\mathbf{r}_m \mathbf{F}^e] + (\mathbf{L}^e)', \quad (4.51)$$

где \mathbf{F}^e — сумма всех внешних сил, действующих на точки системы. Из (4.50) видно, что *кинетический момент механической системы относительно инерциальной системы отсчета S равен сумме взятого относительно S момента импульса центра масс, в котором как бы сосредоточена вся масса системы, и кинетического момента системы относительно поступательно движущейся*

системы центра масс S_m . Соотношение (4.51) показывает, что векторы \mathbf{L}^e и $(\mathbf{L}^e)'$ отличаются на момент суммы внешних сил, действующих на точки и мысленно приложенных к центру масс.

Соотношения для кинетических энергий и мощностей получим аналогично, воспользовавшись определениями этих величин (см. с. 65, 107) и формулами (4.46):

$$T = \frac{mv_m^2}{2} + T', \quad (4.52)$$

$$\frac{dA}{dt} = \mathbf{F}^e \mathbf{v}_m + \frac{(dA)'}{dt}, \quad (4.53)$$

где $T' = \sum_{i=1}^N \frac{m_i (v_i')^2}{2}$ — кинетическая энергия в системе S_m ,

$\frac{(dA)'}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{in}} \mathbf{v}_i' + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^e \mathbf{v}_i'$ — мощность всех сил относительно S_m

(в соотношении (4.53) учтено, что внутренние силы подчинены закону действия и противодействия). Следовательно, кинетическая энергия механической системы относительно инерциальной системы отсчета равна сумме кинетической энергии центра масс, в котором как бы сосредоточена вся масса системы, и кинетической энергии относительно поступательно движущейся системы центра масс. В свою очередь, мощность всех сил относительно системы S равна сумме мощности всех внешних сил, мысленно приложенных к центру масс, и мощности всех сил относительно системы S_m *

Теперь найдем законы изменения кинетического момента и кинетической энергии относительно системы S_m . Подставляя выражения (4.50) и (4.51) в уравнение для кинетического момента относительно инерциальной системы (см. (2.111)), получим

$$[\dot{\mathbf{r}}_m \mathbf{P}] + [\mathbf{r}_m \dot{\mathbf{P}}] + \frac{d\mathbf{M}'}{dt} = [\mathbf{r}_m \mathbf{F}^e] + (\mathbf{L}^e)'$$

Здесь член $[\dot{\mathbf{r}}_m \mathbf{P}]$ равен нулю, поскольку он пропорционален векторному произведению скорости центра масс самой на себя, а

$$[\mathbf{r}_m \dot{\mathbf{P}}] = [\mathbf{r}_m \mathbf{F}^e], \quad (4.54)$$

* Заметим, что соотношения (4.46) и (4.50)—(4.53) справедливы при любом выборе системы S , относительно которой система S_m движется поступательно. Система S может быть как инерциальной, так и неинерциальной, поскольку соотношения (1.6), (4.32) и (4.40) справедливы для любых двух систем отсчета.

что вытекает из уравнения (2.103). Следовательно, закон изменения кинетического момента относительно поступательно движущейся системы центра масс имеет вид

$$\frac{d\mathbf{M}'}{dt} = (\mathbf{L}^e)'. \quad (4.55)$$

Подставляя (4.52) и (4.53) в уравнение для кинетической энергии относительно инерциальной системы (см. (2.116)), получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_m^2}{2} \right) + \frac{dT'}{dt} = \mathbf{F}^e \mathbf{v}_m + \frac{(dA)'}{dt}.$$

Первые члены обеих частей этого уравнения равны друг другу, что следует из уравнения движения центра масс (2.102). Действительно, скалярно умножая (2.102) на \mathbf{v}_m , найдем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_m^2}{2} \right) = \mathbf{F}^e \mathbf{v}_m \quad (4.56)$$

(см. вывод (2.17) на с. 65). Учитывая (4.56), приходим к закону изменения кинетической энергии относительно поступательно движущейся системы центра масс:

$$\frac{dT'}{dt} = \frac{(dA^{in})'}{dt} + \frac{(dA^e)'}{dt}, \quad (4.57)$$

где $\frac{(dA^{in})'}{dt}$ и $\frac{(dA^e)'}{dt}$ — мощности внутренних и внешних сил относительно S_m .

Итак, законы изменения кинетического момента и кинетической энергии относительно поступательно движущейся системы центра масс по форме совпадают с соответствующими законами относительно инерциальной системы отсчета. Это свойство системы S_m связано с тем, что сумма моментов и сумма мощностей сил инерции в рассматриваемой системе равны нулю. Действительно, в системе S_m могут отличаться от нуля только переносные силы инерции ($\boldsymbol{\omega} = 0$)

$$\mathcal{J}_i^h = -m_i \mathbf{w}_m \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (4.58)$$

а сумма моментов и сумма мощностей этих сил с учетом (4.47) равны нулю:

$$\sum_i [\mathbf{r}'_i \mathcal{J}_i^h] = -m [\mathbf{r}'_m \mathbf{w}_m] = 0, \quad (4.59)$$

$$\sum_i \mathcal{J}_i^h \mathbf{v}_i = -m \mathbf{v}'_m \mathbf{w}_m = 0.$$

Пример 4.6. Система N точек в однородном поле тяжести.

Найти закон движения системы N материальных точек, которые движутся в однородном постоянном поле тяжести напряженности \mathbf{g} ; внутренними силами системы являются силы притяжения, прямо пропорциональные расстоянию между точками и произведению масс соответствующих точек (коэффициент пропорциональности κ).

Уравнениями движения системы относительно инерциальной системы S являются уравнения

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^e \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

где

$$\mathbf{F}_{ji} = -\kappa m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad \mathbf{F}_i^e = m_i \mathbf{g}.$$

Прежде всего найдем закон движения центра масс относительно S , для чего используем уравнение (см. (2.102))

$$m \ddot{\mathbf{r}}_m = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{g},$$

где $m = \sum_{i=1}^N m_i$. Отсюда

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{g} \frac{t^2}{2} + \mathbf{v}_{m0} t + \mathbf{r}_{m0}. \quad (2)$$

Итак, относительно S центр масс движется по параболе с постоянным ускорением \mathbf{g} и, следовательно, система S_m будет неинерциальной. В этой системе единственными отличными от нуля силами инерции будут переносные силы

$$\mathcal{J}_i^h = -m_i \mathbf{w}_m = -m_i \mathbf{g} \quad (3)$$

($i = 1, 2, \dots, N$), а уравнения движения имеют вид

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^e + \mathcal{J}_i^h \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Подставляя сюда выражения сил (см. (1) и (3)) и имея в виду, что $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j$, найдем

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\kappa \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_j (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Правые части этих уравнений зависят только от радиуса-вектора соответствующей точки. Действительно,

$$(m - m_i) \mathbf{r}'_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_j \mathbf{r}'_j = m \mathbf{r}'_i - \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}'_j,$$

где последняя сумма равна нулю в силу (4.48). Таким образом, уравнения движения сводятся к системе уравнений

$$\ddot{\mathbf{r}}'_i = -\kappa m \mathbf{r}'_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4)$$

Отсюда видно, что каждая материальная точка движется так, как будто на нее действует сила притяжения со стороны точки, находящейся в центре масс и обладающей массой, равной массе всей системы. Эти силы центральны, и моменты импульса каждой точки относительно S_m сохраняются:

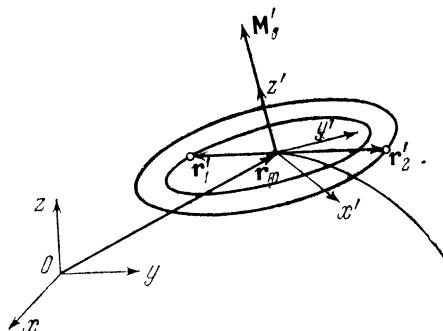


Рис. 4.15

$$\mathbf{M}'_i = \mathbf{M}'_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

а движение точек происходит по плоским траекториям.

Общее решение $\mathbf{r}'_i(t)$ каждого из уравнений (4) в декартовых координатах имеет вид

$$x'_i = a_i \cos(\omega t + \alpha_i),$$

$$y'_i = b_i \cos(\omega t + \beta_i),$$

$$z'_i = c_i \cos(\omega t + \gamma_i), \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где амплитуды и фазы определяются начальными условиями.

Из приведенных результатов следует, что центр масс механической системы движется по параболе относительно инерциальной системы отсчета; относительно системы S_m точки движутся по эллипсам с общим центром в центре масс и одинаковым периодом, равным $2\pi/(\kappa m)^{1/2}$; орбиты точек лежат в плоскостях, проходящих через центр масс; ориентация этих плоскостей постоянна, но может быть различной для разных точек (только в случае $N=2$ точки относительно S_m движутся в одной и той же плоскости, см. рис. 4.15).

Что касается законов изменения момента, то из уравнений (2.111), (4.55) вытекает

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}^e = m [\mathbf{r}_m \mathbf{g}] \neq 0,$$

$$\dot{\mathbf{M}}' = (\mathbf{L}^e)' = m [\mathbf{r}'_m \mathbf{g}] = 0.$$

Следовательно, момент \mathbf{M} относительно инерциальной системы S не сохраняется, в то время как момент \mathbf{M}' относительно S_m сохраняется. Энергия системы относительно S , как видно из (2.133) и (2.134), сохраняется:

$$T + U^{\text{in}} + U^e = E_0,$$

где

$$U^{\text{in}} = \sum_{i < j} \kappa m_i m_j r_{ij}^2 / 2, \quad U^e = - \sum_i m_i \mathbf{g} \mathbf{r}_i = - m \mathbf{g} \mathbf{r}_m.$$

Используя (4.52), этот интеграл можно представить в виде

$$\frac{mv_m^2}{2} + T' + U^{\text{in}} + U^e = E_0.$$

Ввиду потенциальности суммы сил \mathbf{F}^e из уравнения (4.56) следует сохранение «энергии центра масс», т. е.

$$\frac{mv_m^2}{2} - m \mathbf{g} \mathbf{r}_m = \text{const.}$$

Таким образом, из последних двух интегралов вытекает, что энергия E' относительно системы S_m сохраняется:

$$T' + U^{\text{in}} = E'_0$$

(этот интеграл можно получить также из (4.57)).

§ 4.7. Законы изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии относительно произвольных неинерциальных систем отсчета

Рассмотрим соотношения важнейших динамических величин, характеризующих механическую систему и отнесенных к произвольным системам отсчета S и S' . Пусть движение системы S' относительно S известно, т. е. \mathbf{r}_O — радиус-вектор начала системы S' и $\boldsymbol{\omega}$ — ее угловая скорость заданы как функции времени; будем также считать, что все векторы, характеризующие механическую систему относительно S , заданы в виде разложений по ортам S , а векторы, характеризующие систему относительно S' , — в виде разложения по ортам S' .

Найдем, например, соотношение между \mathbf{P} — импульсом системы относительно S и \mathbf{P}' — импульсом той же системы относительно S' . Для этого используем определение импульса и связь скоростей любой точки относительно систем S и S' (см. (2.92) и (4.32)). Тогда

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_{O'} + \sum_{i=1}^N m_i [\omega \mathbf{r}'_i] + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i.$$

В первой и второй суммах этого выражения множители $\mathbf{v}_{O'}$ и ω не зависят от номера точки, а третья сумма является импульсом \mathbf{P}' относительно S' . Учитывая это, приходим к соотношению между импульсами \mathbf{P} и \mathbf{P}' (одной и той же механической системы) относительно систем отсчета S и S' :

$$\mathbf{P} = m \mathbf{v}_{O'} + m [\omega \mathbf{r}'_m] + \mathbf{P}', \quad (4.60)$$

где m — масса системы, \mathbf{r}'_m — радиус-вектор центра масс относительно S' . Отсюда следует, что скорость центра масс системы относительно S равна (см. (2.90))

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_{O'} + [\omega \mathbf{r}'_m] + \mathbf{v}'_m, \quad (4.61)$$

где \mathbf{v}'_m — скорость центра масс относительно S' .

Аналогично найдем соотношения кинетических моментов и моментов внешних сил. В самом деле, используя определения кинетического момента и момента внешних сил (см. с. 103), а также соотношения (1.6) и (4.32) для каждой точки системы, получим

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_{O'} \mathbf{P}] + m [\mathbf{r}'_m \mathbf{v}_{O'}] + \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}'_i [\omega \mathbf{r}'_i]] + \mathbf{M}', \quad (4.62)$$

$$\mathbf{L}^e = [\mathbf{r}_{O'} \mathbf{F}^e] + (\mathbf{L}^e)', \quad (4.63)$$

где \mathbf{M}' и $(\mathbf{L}^e)'$ — кинетический момент системы и сумма моментов внешних сил относительно S' .

Соотношения для кинетических энергий и мощностей всех сил, действующих на точки, найдем, используя определения этих величин (см. с. 107), формулы (4.32) и третий закон Ньютона. В результате получим

$$T = \frac{m v_{O'}^2}{2} + m \mathbf{v}_{O'} [\omega \mathbf{r}'_m] + m \mathbf{v}_{O'} \mathbf{v}'_m + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} [\omega \mathbf{r}'_i]^2 + \omega \mathbf{M}' + T', \quad (4.64)$$

$$\frac{dA}{dt} = \mathbf{F}^e \mathbf{v}_{O'} + \omega (\mathbf{L}^e)' + \frac{(dA)'}{dt}, \quad (4.65)$$

где T' — кинетическая энергия относительно S' , $\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$ —

мощность сил относительно S , $\frac{(dA)'}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{d'\mathbf{r}_i}{dt}$ — мощность сил

относительно S' . Заметим, что соотношения (4.60) — (4.65) справедливы для *любых* двух систем отсчета S и S' .

Чтобы установить законы изменения \mathbf{P}' , \mathbf{M}' и T' относительно S' , систему S будем считать инерциальной, а систему S' — неинерциальной и исходить из уравнений движения относительно неинерциальной системы отсчета (см. (4.43)). Например, суммируя эти уравнения по всем точкам, найдем

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{w}'_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^N \mathcal{J}_i^h + \sum_{i=1}^N \mathcal{J}_i^c. \quad (4.66)$$

Левая часть этого уравнения согласно определению равна произведению $m \mathbf{w}'_m$, а ускорение любой точки относительно S' согласно (4.36) есть производная скорости этой точки относительно S' , взятая при постоянных «штрихованных» ортах. Следовательно, $\mathbf{w}'_m = \frac{d'\mathbf{v}'_m}{dt}$, а

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{w}'_i = \frac{d'\mathbf{P}'}{dt}.$$

Сумма всех сил \mathbf{F}_i из уравнения (4.66) равна сумме только внешних сил \mathbf{F}^e , поскольку внутренние силы взаимодействия подчинены третьему закону Ньютона. Суммируя переносные силы инерции, найдем

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{J}_i^h = -m \{ \mathbf{w}_O + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}'_m] + [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_m]] \}. \quad (4.67)$$

Отсюда видно, что сумма переносных сил инерции, «приложенных» к точкам системы, равна переносной силе инерции, «приложенной» к центру масс. Аналогично для суммы кориолисовых сил инерции получим

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{J}_i^c = -2m [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}'_m]. \quad (4.68)$$

Таким образом, уравнение (4.66) представляет собой закон изменения импульса относительно неинерциальной системы отсчета:

$$\frac{d' \mathbf{P}'}{dt} = \mathbf{F}^e + \mathcal{J}_m^h + \mathcal{J}_m^c, \quad (4.69)$$

где

$$\mathcal{J}_m^h = -m \{ \mathbf{w}_O' + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}'_m] + [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_m]] \}, \quad \mathcal{J}_m^c = -2m [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}'_m].$$

Как мы видим, вывод и содержание этого закона аналогичны выводу и содержанию закона изменения импульса относительно инерциальной системы отсчета (2.103). Однако в неинерциальной системе кроме сил, действующих на точки со стороны различных тел, имеются *силы инерции, которые не подчинены закону действия и противодействия*. Эти силы играют роль внешних сил и также изменяют импульс системы.

Вывод закона изменения момента \mathbf{M}' аналогичен выводу уравнения (2.111) для момента \mathbf{M} . Действительно, умножим обе части уравнения (4.43), взятого для i -той точки, векторно слева на \mathbf{r}'_i и просуммируем полученные выражения по всем точкам. Затем учтем, что \mathbf{v}'_i — скорость i -той точки относительно S' — равна производной от \mathbf{r}'_i по времени при постоянных «штрихованных» ортах. Тогда, исключая внутренние силы взаимодействия с помощью третьего закона, получим закон изменения кинетического момента относительно неинерциальной системы отсчета:

$$\frac{d' \mathbf{M}'}{dt} = (\mathbf{L}^e)' + \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}'_i \mathcal{J}_i^h] + \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}'_i \mathcal{J}_i^c]. \quad (4.70)$$

Умножая каждое из уравнений (4.43), взятых для различных точек системы, скалярно на скорость соответствующей точки относительно системы S' , в результате простых преобразований найдем закон изменения кинетической энергии относительно неинерциальной системы отсчета:

$$\frac{d' T'}{dt} = \frac{(dA)'}{dt} + \sum_{i=1}^N \mathcal{J}_i^h \mathbf{v}'_i, \quad (4.71)$$

где $\frac{(dA)'}{dt}$ — мощность всех сил \mathbf{F}_i относительно S' . При выводе (4.71) следует иметь в виду, что производная кинетической энергии по времени при постоянных ортах системы S равна производной той же функции при постоянных ортах системы S' , т. е.

$$\frac{dT'}{dt} = \frac{d' T'}{dt}, \quad (4.72)$$

поскольку

$$\mathbf{v}_i' \frac{d\mathbf{v}_i'}{dt} = \mathbf{v}_i' \left\{ [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_i'] + \frac{d'\mathbf{v}_i'}{dt} \right\} = \mathbf{v}_i' \frac{d'\mathbf{v}_i'}{dt}.$$

Кроме того, нужно также учитывать, что работа кориолисовых сил относительно S' равна нулю:

$$-2m_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_i'] d' \mathbf{r}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4.73)$$

Итак, согласно закону (4.71) изменение кинетической энергии относительно S' определяется работой внутренних и внешних сил, а также работой переносных сил инерции. Рассмотрим подробнее этот закон, предполагая, что внешние силы заданы как функции положений и скоростей точек относительно S' , а также предполагая, что среди этих сил есть потенциальные, диссипативные и гироскопические силы; относительно внутренних сил взаимодействия предположим, что среди них могут быть потенциальные и диссипативные силы.

Указанные предположения аналогичны тем, которые были сделаны при выводе закона (2.132) изменения энергии относительно инерциальной системы отсчета (см. с. 107—109). Для потенциальной энергии U' относительно S' аналогично (2.128) и (2.129) получим

$$U' = (U^e)' + U^{\text{in}}, \quad (4.74)$$

где

$$(U^e)' = \sum_{i=1}^N U_i'(\mathbf{r}_i', t) \quad U^{\text{in}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N U_{ij}(|\mathbf{r}_i' - \mathbf{r}_j'|);$$

а для гироскопических сил будем иметь (ср. с (2.120))

$$\mathbf{F}_i^{\text{e,g}} d' \mathbf{r}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4.75)$$

Учитывая (4.74), (4.75) и соотношения типа (2.117) — (2.127), закон (4.71) можно записать в виде, аналогичном (2.132):

$$\frac{d'}{dt} (T' + U') = \frac{\partial (U^e)'}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{d}} \mathbf{v}_i' + \sum_{i=1}^N \mathcal{J}_i^{\text{h}} \mathbf{v}_i', \quad (4.76)$$

где $\mathbf{F}_i^{\text{d}} = \mathbf{F}_i^{\text{d,e}} + \mathbf{F}_i^{\text{d,in}}$.

Изучим свойства переносных сил инерции, имея в виду, что эти силы заданы как функции времени и координат точек, поскольку $\boldsymbol{\omega}_0$ — ускорение начала системы S' и $\boldsymbol{\omega}$ — ее угловая скорость считаются известными функциями времени. Вычисляя

ротор от каждого из трех слагаемых переносной силы инерции, убеждаемся в потенциальности части сил:

$$\operatorname{rot} \mathbf{w}_O = 0, \operatorname{rot} [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']] = 0, \operatorname{rot} [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}'] = 2\dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (4.77)$$

(здесь дифференцирование производится по координатам точки пространства в системе S' при фиксированном времени). Таким образом, сила инерции, возникающая за счет поступательного ускорения, и центробежная сила являются потенциальными силами. Поэтому можно ввести U_i^h — потенциальную энергию i -той точки, соответствующую указанным двум силам, и согласно (2.122) записать эту функцию в виде

$$U_i^h = m_i \int \{ \mathbf{w}_O + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i] \} d' \mathbf{r}'_i. \quad (4.78)$$

Учитывая, что

$$[\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i]] = \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i) - \omega^2 \mathbf{r}'_i,$$

получим

$$U_i^h = m_i \left\{ \mathbf{w}_O \mathbf{r}'_i + \int (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i) (\boldsymbol{\omega} d' \mathbf{r}'_i) - \frac{\omega^2}{2} (r'_i)^2 \right\},$$

где

$$\int \omega_x^2 x'_i dx'_i = \frac{\omega_x^2}{2} (x'_i)^2; \quad \int \omega_x \omega_y x'_i dy'_i = \omega_x \omega_y x'_i y'_i$$

и т. д. Таким образом,

$$\int (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i) (\boldsymbol{\omega} d' \mathbf{r}'_i) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i)^2.$$

Затем, используя векторное тождество

$$[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i]^2 = \omega^2 (r'_i)^2 - (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i)^2,$$

окончательно получим

$$U_i^h = m_i \left\{ \mathbf{w}_O \mathbf{r}'_i - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i]^2 \right\}. \quad (4.79)$$

Суммируя это выражение по всем точкам, найдем потенциальную энергию U^h системы в поле переносных сил инерции:

$$U^h = m \mathbf{r}'_m \mathbf{w}_O - \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i]^2 \quad (4.80)$$

(подчеркнем, что эта потенциальная энергия соответствует не всем переносным силам инерции, а только потенциальной ее части).

Учитывая свойства сил инерции \mathcal{J}_i^h (см. (4.43) и (4.77)), запишем мощность этих сил в виде, аналогичном (2.123):

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{J}_i^h \mathbf{v}_i = - \frac{d' U^h}{dt} + \frac{\partial U^h}{\partial t} - \sum_{i=1}^N m_i [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}_i'] \mathbf{v}_i. \quad (4.81)$$

Затем, используя (4.80), найдем частную производную:

$$\frac{\partial U^h}{\partial t} = m \mathbf{r}'_m \dot{\boldsymbol{\omega}}_O - \sum_{i=1}^N m_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i'] [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}_i']. \quad (4.82)$$

Наконец, из (4.76), учитывая (4.81) и (4.82), получим закон изменения полной энергии относительно неинерциальной системы отсчета:

$$\frac{d' E'}{dt} = \frac{\partial (U^e)'}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^d \mathbf{v}_i + m \mathbf{r}'_m \dot{\boldsymbol{\omega}}_O - \dot{\boldsymbol{\omega}} \left\{ \mathbf{M}' + \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}_i' [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i']] \right\}, \quad (4.83)$$

где $E' = T' + U' + U^h$ — полная механическая энергия относительно неинерциальной системы отсчета; U' , U^h определены в (4.74) и (4.80), а $\boldsymbol{\omega}'_O$ и $\boldsymbol{\omega}$ являются заданными функциями времени.

Законы сохранения относительно неинерциальных систем отсчета аналогичны соответствующим законам для инерциальных систем; однако для сохранения какой-либо проекции импульса или момента необходимо большее число требований, включающее в себя требования на соответствующие проекции сил инерции или момента сил инерции. Например, из (4.69) следует:

$$\text{если } F_{z'}^e = \mathcal{J}_{mz'}^h = \mathcal{J}_{mz'}^c = 0, \quad (4.84)$$

$$\text{то } P_{z'}' = P_{z'}^0;$$

а из (4.70) получим:

$$\text{если } (L^e)_{z'}' = \sum_i [\mathbf{r}_i' \mathcal{J}_i^h]_{z'} = \sum_i [\mathbf{r}_i' \mathcal{J}_i^c]_{z'} = 0, \quad (4.85)$$

$$\text{то } M_{z'}' = M_{z'}^0.$$

В случае изолированной механической системы ($\mathbf{F}_i^e = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$) ее импульс и кинетический момент относительно инерциальной системы отсчета сохраняются; если же движение механической системы отнесено к неинерциальной системе отсчета, то импульс и кинетический момент механической системы

сохраняться не будут, так как и в случае изолированной системы на нее «действуют» силы инерции.

Наконец (см. (4.83)), если потенциальная энергия механической системы во внешних полях стационарна, диссипативные силы (внутренние и внешние) отсутствуют, а неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальной с постоянной угловой скоростью и постоянным ускорением начала, то полная энергия механической системы относительно неинерциальной системы отсчета будет сохраняться, т. е.

$$\text{если } \frac{\partial (U^e)'}{\partial t} = 0, \mathbf{F}_i^d = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

то

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{w}_{O'} = (\mathbf{w}_{O'})_0, \\ E' = T' + U' + U^h = E'_0. \quad (4.86)$$

Пример 4.7. Задача двух тел в неинерциальной системе отсчета.

Рассмотрим движение двух взаимодействующих точек относительно поступательно движущейся системы S' с началом в одной из точек (рис. 4.16). Поместим начало этой системы в точку 1, т. е. потребуем, чтобы $\mathbf{r}'_1 = 0$. Учитывая, что движение S' относительно инерциальной системы S поступательно, т. е. $\boldsymbol{\omega} = 0$, и что $\mathbf{w}'_1 = 0$, получим из уравнений вида (4.43) уравнения движения относительно S' :

$$0 = \mathbf{F}_{21} - m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}'_2 = \mathbf{F}_{12} - m_2 \ddot{\mathbf{r}}_1. \quad (1)$$

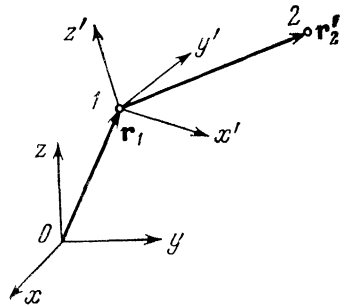


Рис. 4.16

Первое из этих уравнений по существу является уравнением движения начала системы S' относительно S , а второе — уравнением движения точки 2 относительно S' . Это движение точка 2 совершает под действием силы \mathbf{F}_{12} и силы инерции — $m_2 \ddot{\mathbf{r}}_1$. Исключая $\ddot{\mathbf{r}}_1$ из второго уравнения с помощью первого уравнения, получим уравнение движения второй точки в виде

$$\mu \ddot{\mathbf{r}}'_2 = \mathbf{F}_{12} (|\mathbf{r}'_2|), \quad (2)$$

$$\text{где } \mu = \frac{m_1 m_2}{m}.$$

Сопоставляя (2) с (3.11), приходим к выводу, что точка 2 движется относительно неинерциальной системы S' так же, как воображаемая « μ -точка» движется относительно инерциальной системы центра масс.

Интересно рассмотреть законы сохранения относительно неинерциальной системы S' .

Закон изменения момента (4.70) в данной задаче принимает вид

$$\frac{d\mathbf{M}'}{dt} = [\mathbf{r}'_2 \mathcal{J}_2^h], \quad (3)$$

где $\mathbf{M}' = m_2 [\mathbf{r}'_2 \mathbf{v}'_2]$, $\mathcal{J}_2^h = -m_2 \mathbf{r}'_1$. Из первого уравнения (1) следует, что переносная сила инерции равна

$$\mathcal{J}_2^h = \frac{m_2}{m_1} \mathbf{F}_{12}(|\mathbf{r}'_2|) \quad (4)$$

и является центральной силой; момент силы \mathcal{J}_2^h относительно точки I равен нулю, а значит, момент \mathbf{M}' сохраняется:

$$m_2 [\mathbf{r}'_2 \mathbf{v}'_2] = \mathbf{M}'_0. \quad (5)$$

Закон изменения энергии относительно S' используем в форме (4.76), поскольку в рассматриваемом случае ускорение начала системы S' является не заданной функцией времени, а заданной функцией координат. Тогда

$$d(T' + U') = \mathcal{J}_2^h d\mathbf{r}'_2, \quad (6)$$

где

$$T' = \frac{m_2 (v'_2)^2}{2}, \quad U' = - \int \mathbf{F}_{12}(|\mathbf{r}'_2|) d\mathbf{r}'_2.$$

Теперь учтем, что переносная сила инерции (4) потенциальна, а соответствующая ей потенциальная энергия равна

$$U^h = - \frac{m_2}{m_1} \int \mathbf{F}_{12}(|\mathbf{r}'_2|) d\mathbf{r}'_2. \quad (7)$$

Таким образом, используя (6) и (7), приходим к интегралу энергии

$$\frac{m_2}{2} (v'_2)^2 + U' + U^h = E'_0.$$

Отметим также, что в предельном случае $m_2 \ll m_1$ центр масс двух точек совпадает с точкой I , а система S' становится инерциальной.

Пример 4.8. *Возмущение эллиптической орбиты.*

Как известно, под действием силы гравитационного притяжения (1.49) точка может двигаться по эллиптической орбите относительно инерциальной системы отсчета. Определить центральную силу, которую необходимо добавить к силе (1.49) с тем, чтобы орбита стала вращаться относительно инерциальной системы без изменения своего вида, т. е. чтобы точка в некоторой вращающейся системе отсчета двигалась по эллиптической орбите с фокусом в центре сил (центры добавочной и гравитационной сил совпадают).

Начало O инерциальной системы S поместим в центр сил, а плоскость Oxy совместим с плоскостью орбиты (орбита будет плоской, так как и сила гравитационного притяжения \mathbf{F} , и возмущающая сила Φ центральны). Введем также неинерциальную систему S' с началом O' , совпадающим с O , а координатную плоскость $O'x'y'$ этой системы совместим с плоскостью Oxy .

Если на точку действует только сила \mathbf{F} , то относительно S эта точка движется по эллипсу. Если же на точку действует сила $\mathbf{F} + \Phi$, то по условию задачи точка также будет двигаться по эллипсу, но относительно S' ; причем относительно S точка будет двигаться, вообще говоря, по незамкнутой орбите между двумя концентрическими окружностями (см. рис. 2.6).

Уравнение движения точки относительно S' получим (см. (4.43)), учитывая, что $\mathbf{w}_{O'} = 0$:

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{F} + \Phi + \mathcal{J}^h + \mathcal{J}^c; \quad (1)$$

здесь

$$\mathcal{J}^h = -m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] - m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']], \quad \mathcal{J}^c = -2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'];$$

кроме того, по условию $m\mathbf{w}' = \mathbf{F}$. Таким образом, для неизвестной силы Φ получаем уравнение

$$\Phi + \mathcal{J}^h + \mathcal{J}^c = 0, \quad (2)$$

в котором угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ также неизвестна. Векторы $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{r}' и \mathbf{v}' , входящие в это уравнение, можно записать в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{n}_z', \quad \mathbf{r}' = r\mathbf{n}_r, \quad \mathbf{v}' = \dot{r}\mathbf{n}_r + r\dot{\varphi}'\mathbf{n}_\varphi, \quad (3)$$

поскольку система S' вращается относительно S только вокруг оси Oz , а движение точки происходит в плоскости $O'x'y'$ (координаты r и φ' являются полярными координатами точки в этой плоскости). Используя (3), найдем выражения для сил инерции:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^h &= -mr\dot{\omega}\mathbf{n}_\varphi + mr\omega^2\mathbf{n}_r, \\ \mathcal{J}^c &= -2m\omega(\dot{r}\mathbf{n}_\varphi - r\dot{\varphi}'\mathbf{n}_r). \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая (4) и центральность силы Φ , из уравнения (2) получим

$$r\dot{\omega} + 2\omega\dot{r} = 0, \quad (5)$$

$$\Phi(r) + mr\omega^2 + 2m\omega r\dot{\varphi}' = 0. \quad (6)$$

Интегрируя (5), найдем ω как функцию r :

$$\omega = \frac{\text{const}}{r^2}. \quad (7)$$

Так как сила \mathbf{F} центральна, а сумма сил инерции и добавочной силы Φ равна нулю, имеет место сохранение момента импульса точки относительно S' :

$$mr^2\dot{\varphi}' = M'_0. \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в уравнение (6), получим

$$\Phi(r) = \frac{\text{const}}{r^3}.$$

Глава V

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

§ 5.1. Основная задача динамики несвободной системы и понятие о связях

Многие задачи механики (например, такие, которые были рассмотрены в гл. I—IV) сводятся к решению уравнений движения

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где силы считаются известными функциями положений и скоростей точек, а также времени (такие силы будем для краткости называть заданными); при этом начальные условия можно задавать произвольно: на них никаких ограничений не налагается. Однако в механике существует и другой класс задач, в которых наряду с заданными силами рассматриваются силы, не известные нам как функции положений, скоростей точек и времени. Метод решения таких задач был намечен д'Аламбером в 1743 г. в его трактате «Динамика» [5, с. 108—109] и окончательно сформулирован Лагранжем в 1788 г. в «Аналитической механике» [6, т. 1, отд. 1, 2 и 4].

Рассмотрим постановку задач такого класса на примере сферического маятника (рис. 5.1). Пусть тело весьма малых размеров колеблется вблизи земной поверхности, будучи подвешенным на нерастяжимой нити длины l , а сопротивлением воздуха можно пренебречь; тогда на материальную точку массы m действует заданная сила mg и неизвестное натяжение нити \mathbf{R} . Следовательно, согласно (1.58) уравнение движения маятника имеет вид

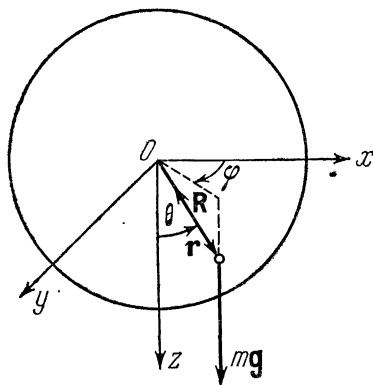


Рис. 5.1

$$m\ddot{\mathbf{r}} = mg + \mathbf{R}.$$

Это векторное уравнение эквивалентно системе трех дифференциальных уравнений в координатах и содержит шесть неизвестных функций — проекции радиуса-вектора материальной точки и проекции натяжения нити; в декартовых координатах неизвестными являются $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $R_x(t)$, $R_y(t)$, $R_z(t)$. Для отыскания решения приведенного уравнения необходимы дополнительные сведения. В поставленной задаче такие сведения есть: во-первых, в любой момент времени материальная точка находится на сферической поверхности радиуса l (если нить натянута) и, следовательно, координаты точки должны удовлетворять условию $r^2 = l^2$; во-вторых, натяжение нити направлено вдоль нити, в связи с чем можно написать, что $\mathbf{R} = 2\lambda \mathbf{r}$, где λ — неизвестная скалярная функция. Таким образом, условия задачи приводят к системе

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + 2\lambda \mathbf{r}, \quad r^2 - l^2 = 0,$$

т. е. к системе четырех дифференциальных уравнений в координатах с четырьмя неизвестными функциями, например функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ и $\lambda(t)$. С помощью приведенных уравнений можно найти закон движения точки по сфере и натяжение нити, необходимое для того, чтобы точка двигалась именно по сфере. Начальные условия в этой задаче не произвольны: точка и в начальный момент времени должна находиться на поверхности сферы радиуса l , а вектор скорости — в плоскости, касательной к сфере. При этом допускается, что длина нити остается неизменной, т. е. допускается, что жесткость нити бесконечно велика, изменение длины нити исчезающе мало, а ее натяжение конечно.

Как видим, в рассматриваемой задаче положение точки и ее скорость удовлетворяют определенным условиям, не вытекающим из уравнений движения. В этом смысле говорят, что *материальная точка несвободна, на нее наложена связь*.

В общем случае *под связями понимают не вытекающие из уравнений движения ограничения, налагаемые на положения, скорости и ускорения точек механической системы*. Связи реализуются посредством поверхностей различных тел, стержней, нитей и т. п.; аналитически связи выражаются уравнениями связей, т. е. соотношениями между радиусами-векторами точек, их скоростями и ускорениями. *Силы, с которыми тела, осуществляющие связи, действуют на точки системы, называются реакциями связей*. Если на систему N точек наложено k связей, то, обозначая через R_{ai} реакцию связи с номером a на i -тую точку, согласно (1.39) получим, что реакция всех k связей на i -тую точку равна

$$R_i = \sum_{\alpha=1}^k R_{\alpha i}. \quad (5.1)$$

Различают следующие виды связей: голономные и неголономные, удерживающие и неудерживающие, стационарные и нестационарные. Голономными (или интегрируемыми) связями и называются связи, уравнения которых всегда можно свести к уравнениям вида

$$f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad (5.2)$$

где f является функцией только координат точек и времени. Эти связи налагают ограничение не только на положение, но и на скорости и ускорения точек системы. Действительно, дифференцируя (5.2) по времени, получим ограничение, налагаемое голономной связью на скорости:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^N (\nabla_i f) \mathbf{v}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (5.3)$$

а продифференцировав (5.3) по времени, найдем ограничение на ускорения точек:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \sum_{i=1}^N (\nabla_i f) \mathbf{w}_i + \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} (\nabla_i f) \right] \mathbf{v}_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = 0. \quad (5.4)$$

Однако характерным для голономных связей является то, что ограничения на ускорения и скорости сводятся к ограничению только на положения точек; иначе говоря, уравнения связей, заданные в виде (5.3) или (5.4), могут быть проинтегрированы.

Например, пусть одна точка движется на горизонтальной плоскости, перемещающейся с постоянной скоростью u в вертикальном направлении (рис. 5.2, а). Такая связь реализуется, если шарик исчезающих размеров движется между двумя жестко скрепленными друг с другом телами с параллельными поверхностями, причем расстояние между поверхностями исчезающе мало, а их деформациями можно пренебречь (рис. 5.2, б). Направляя ось Oz по вертикали, запишем уравнение связи в виде

$$f = z - ut = 0,$$

откуда следует, что рассматриваемая связь голономна, а на положение точки, ее скорость и ускорение налагаются ограничения: $z = ut$, $\dot{z} = u$, $\ddot{z} = 0$.

Неголономными (или неинтегрируемыми) связями называются такие связи, уравнения которых нельзя свести к урав-

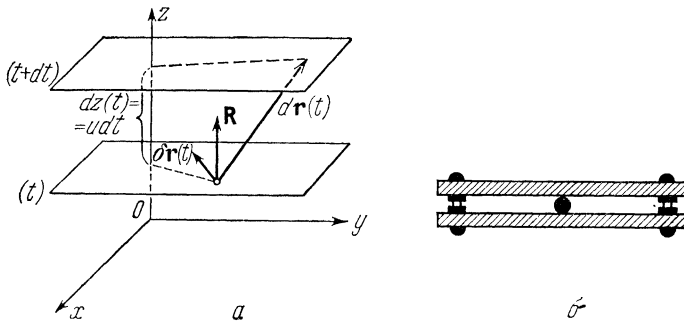


Рис 5.2

нениям, содержащим только координаты точек и время. Наиболее изученными являются неголономные связи первого порядка, линейные относительно скоростей, т. е. неинтегрируемые связи вида

$$\sum_{i=1}^N a_i v_i + b = 0, \quad (5.5)$$

где a_i и b могут зависеть от положений точек и времени. Например, неголономной связью является, вообще говоря, связь, налагаемая на шар, катящийся по шероховатой поверхности (см. с. 381). Большое практическое значение имеют неголономные условия, встречающиеся в задачах об оптимальных траекториях различных тел.

В дальнейшем мы будем рассматривать главным образом голономные связи, поскольку задачи о движении систем с неголономными связями, как правило, очень сложны в математическом отношении и редко встречаются в современных физических приложениях механики*.

Удерживающими связями называются связи, задаваемые равенствами. Соответственно неудерживающие связи задаются неравенствами; например, неудерживающую связь можно реализовать с помощью гибкой нерастяжимой нити, соединяющей две материальные точки. Однако в этом случае движение точек сводится либо к свободному движению (когда связь, как говорят, не напряжена), либо к движению несвободных точек (когда связь напряжена). Неудерживающие связи мы также рассматривать не будем.

* Уравнения движения систем с линейными неголономными связями будут кратко рассмотрены в § 8.5 гл. VIII.

Если уравнение связи явно от времени не зависит, то связь называется стационарной (например, связь, имеющая место в задаче о сферическом маятнике). В противном случае связь называется нестационарной (см. приведенный выше пример с движущейся плоскостью).

Введение понятий о связях и их реакциях позволяет сформулировать основную задачу механики несвободной системы N точек с голономными связями как задачу об отыскании закона движения системы и реакций связей по заданным силам \mathbf{F}_i ($i=1, 2, \dots, N$) и заданным k уравнениям голономных связей. Эта задача сводится к совместному решению уравнений движения и уравнений связей

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (5.6)$$

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k)$$

с начальными условиями, заданными в соответствии с уравнениями связей.

Система (5.6) представляет собой систему $3N+k$ скалярных уравнений, содержащих $6N$ неизвестных функций — проекций векторов $\mathbf{r}_i(t)$ и $\mathbf{R}_i(t)$ на координатные оси ($i=1, 2, \dots, N$), причем наиболее интересным является случай, когда число связей $k < 3N$. Действительно, если $k=3N$, то уравнения связей полностью определяют движение системы. С другой стороны, если $k < 3N$, то рассматриваемая задача является определенной только в том случае, когда известны $6N - (3N+k) = 3N - k$ независимых соотношений между положениями точек и реакциями связей. Забегая вперед, скажем, что основная задача динамики несвободной системы является определенной для так называемых идеальных связей. Однако введение этого понятия требует знакомства с некоторыми свойствами связей.

§ 5.2. Действительные, возможные и виртуальные перемещения; идеальные связи

Определим действительные, возможные и виртуальные перемещения на примере одной точки, подчиненной одной голономной удерживающей связи

$$f(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (5.7)$$

Действительным перемещением $d\mathbf{r}$ точки называется бесконечно малое перемещение этой точки под действием как заданных сил, так и реакций связи; действительное перемещение происходит за время dt в соответствии с уравнением движения и уравнением связи.

Возможным перемещением назовем «перемещение» dr точки, допускаемое связью; в отличие от действительных перемещений возможные перемещения удовлетворяют только уравнению связи. Действительное перемещение всегда является одним из возможных. Дифференциальное уравнение, которому подчинены возможные перемещения точки, получим, взяв дифференциал от левой части уравнения (5.7) и приравняв его нулю*:

$$df = \nabla f dr + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0. \quad (5.8)$$

Наконец, виртуальным перемещением δr называется воображаемое бесконечно малое «перемещение» точки, допускаемое связью в данный фиксированный момент времени; в этот момент времени связь «застывает», т. е. ее изменение со временем мысленно прекращается. Виртуальные перемещения не происходят под действием сил и не обладают длительностью. Представление о виртуальных перемещениях можно получить, если сделать мгновенную фотографию движущейся поверхности и рассмотреть возможные перемещения точки по изображению этой поверхности на фотографии. Дифференциальное уравнение, которому подчинены виртуальные перемещения точки, получим, вычисляя дифференциал левой части уравнения (5.7) при фиксированном времени, т. е. вычисляя вариацию $f(\mathbf{r}, t)$ и приравнивая ее нулю [46, гл. 6, § 1]:

$$\delta f = \nabla f \delta r = 0. \quad (5.9)$$

Здесь приращение δr радиуса-вектора точки также «происходит» при фиксированном времени, т. е. является вариацией радиуса-вектора. Из (5.8) и (5.9) видно, что совокупность виртуальных перемещений совпадает с возможными перемещениями только в случае стационарных связей, когда $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

Проиллюстрируем уравнения (5.8) и (5.9) на примере точки, движущейся по горизонтальной плоскости (см. рис. 5.2). В этом случае уравнения для возможных и виртуальных перемещений точки имеют вид

$$dz(t) - udt = 0, \quad \delta z(t) = 0.$$

Легко обобщить рассмотренные определения на систему N точек, подчиненных k голономным связям

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k), \quad (5.10)$$

* В силу равенства нулю функции f дифференциал любого порядка от этой функции равен нулю.

и получить уравнения для механической системы, аналогичные уравнениям (5.8) и (5.9). В самом деле, вычисляя дифференциалы и вариации левых частей уравнений (5.10) и приравнявая их нулю, найдем

$$\sum_{i=1}^N \nabla_i f_\alpha dr_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k), \quad (5.11)$$

$$\sum_{i=1}^N \nabla_i f_\alpha \delta r_i = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k). \quad (5.12)$$

Понятие о виртуальных перемещениях позволяет определить очень важный класс связей. Пусть сумма работ всех реакций связей на виртуальных перемещениях точек системы равна нулю; иначе говоря, пусть δA_R — виртуальная работа реакций связей — равна нулю:

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (5.13)$$

где N — число точек системы. Связи, удовлетворяющие условию (5.13), называются идеальными. Этот класс связей обладает достаточной общностью, причем физические причины идеальности связей могут быть различными. Убедимся в этом на двух примерах.

Еще раз рассмотрим точку, движущуюся по горизонтальной плоскости, допуская, что плоскость абсолютно гладкая. Тогда реакция плоскости на точку в любой момент времени перпендикулярна плоскости (рис. 5.2), т. е. $R_x = R_y = 0$, $R_z \neq 0$. Следовательно, виртуальная работа, совершаемая реакцией связи, равна нулю:

$$\delta A_R = \mathbf{R} \delta \mathbf{r} = R_z \delta z = 0,$$

поскольку для рассматриваемой связи $\delta z = 0$. Поэтому гладкая плоскость, покоящаяся или движущаяся, является идеальной связью: и в том, и в другом случаях виртуальная работа равна нулю. Заметим, что работа dA_R , совершаемая реакцией гладкой плоскости на действительных перемещениях, равна нулю только в том случае, когда плоскость покоится. Если же плоскость движется, то действительная работа отлична от нуля:

$$dA_R = R_z dz = R_z u dt \neq 0.$$

Таким образом, понятие виртуальной работы, «совершаемой» на воображаемых перемещениях, отражает физическое свойство по-

верхности — ее гладкость. Ясно, что любые гладкие поверхности и кривые (неподвижные и подвижные) также являются идеальными голономными связями.

В качестве другого примера идеальной связи рассмотрим прямолинейный стержень длины l и исчезающей массы, который соединяет материальные точки 1 и 2, движущиеся, например, по параболической поверхности (рис. 5.3, а). На точки действуют

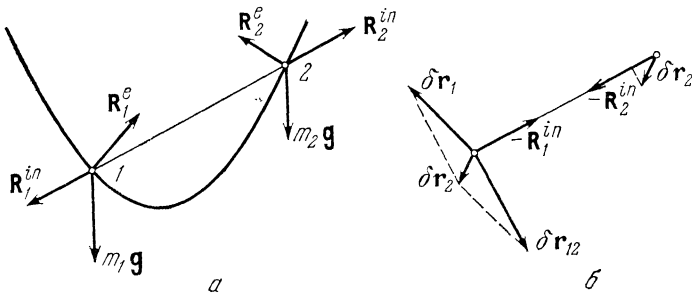


Рис. 5 3

заданные внешние силы $m_1\mathbf{g}$ и $m_2\mathbf{g}$, реакции поверхности \mathbf{R}_1^e и \mathbf{R}_2^e , а также реакции стержня \mathbf{R}_1^{in} и \mathbf{R}_2^{in} . Для системы «точки — стержень» силы тяжести и реакции поверхности являются внешними силами (величина и направление реакций поверхности зависят от характера поверхности), а реакции стержня являются внутренними силами. Для системы «стержень» внешними силами являются силы $-\mathbf{R}_1^{in}$ и $-\mathbf{R}_2^{in}$, с которыми точки действуют на концы стержня, а также силы тяжести. Поэтому законы изменения импульса и кинетического момента стержня конечной массы имеют вид

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{стержня}}}{dt} = -\mathbf{R}_1^{in} - \mathbf{R}_2^{in} + \sum_i m_i \mathbf{g};$$

$$\frac{d\mathbf{M}_{\text{стержня}}}{dt} = -[\mathbf{r}_1 \mathbf{R}_1^{in}] - [\mathbf{r}_2 \mathbf{R}_2^{in}] + \sum_i [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{g}],$$

где m_i — масса достаточно малой части стержня, а суммирование ведется по всем его частям. Отсюда, устремляя все m_i к нулю, для стержня исчезающей массы получим соотношения*

$$\mathbf{R}_1^{in} + \mathbf{R}_2^{in} = 0, \quad [\mathbf{r}_1 \mathbf{R}_1^{in}] + [\mathbf{r}_2 \mathbf{R}_2^{in}] = 0,$$

* Этот предельный переход совершается в предположении, что ускорение центра масс стержня и его угловое ускорение остаются конечными величинами.

из которых следует, что реакции \mathbf{R}_1^{in} и \mathbf{R}_2^{in} равны по величине и направлены по стержню в противоположные стороны:

$$\mathbf{R}_1^{\text{in}} = \lambda(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{R}_2^{\text{in}} = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

(здесь λ — некоторая скалярная функция). Используя эти выражения, найдем, что виртуальная работа реакций стержня равна нулю:

$$\delta A_R^{\text{in}} = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{\lambda}{2} \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = 0,$$

поскольку длина стержня задана: $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = l$.

К тому же результату можно прийти, замечая, что виртуальное перемещение $\delta \mathbf{r}_{12}$ перпендикулярно к $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, так как длина стержня задана (рис. 5.3, б). Следовательно, проекции векторов $\delta \mathbf{r}_1$ и $\delta \mathbf{r}_2$ на направление стержня одинаковы, а работа $\mathbf{R}_1 \delta \mathbf{r}_1$ равна по величине и противоположна по знаку работе $\mathbf{R}_2 \delta \mathbf{r}_2$ ($\mathbf{R}_2^{\text{in}} = -\mathbf{R}_1^{\text{in}}$). Таким образом, стержень заданной длины и исчезающей массы действительно является идеальной голономной связью. Кроме того, эта связь стационарна и, следовательно, совокупности виртуальных и возможных перемещений точек 1 и 2 совпадают. Учитывая также, что действительное перемещение всегда является одним из возможных, приходим к выводу о равенстве нулю работы реакций стержня и на действительных перемещениях точек 1 и 2:

$$dA_R^{\text{in}} = \mathbf{R}_1^{\text{in}} d\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2^{\text{in}} d\mathbf{r}_2 = 0. \quad (5.14)$$

Приведенные примеры показывают сравнительно большую общность класса идеальных связей. Например, любое сочетание гладких связей со связями, состоящими из тонких стержней исчезающей массы и заданной длины, является идеальной связью, если в местах соединения связей отсутствует трение. Все абсолютно шероховатые поверхности, по которым происходит качение тел без проскальзывания, также представляют собой идеальные связи (как голономные, так и неголономные). Действительно, поскольку в точке касания тела и поверхности отсутствует проскальзывание, виртуальное перемещение точки тела, совпадающей с точкой касания, равно нулю, в силу чего и виртуальная работа реакции поверхности равна нулю*.

* Подробнее см. пример о шаре на с. 381.

§ 5.3. Уравнения Лагранжа с реакциями связей; законы изменения импульса, кинетического момента и энергии для систем со связями

Выше отмечалось, что основная задача механики голономных систем становится определенной для класса идеальных связей. Действительно, пусть на систему из N точек наложено k голономных идеальных связей. Число проекций виртуальных перемещений точек на координатные оси, или, иначе говоря, *число вариаций координат точек, равно $3N$* . Так как вариации координат подчинены уравнениям (5.12), то k вариаций являются зависимыми, а $3N - k$ вариаций — независимыми. Зависимые вариации могут быть единственным образом выражены через независимые, поскольку детерминант из коэффициентов при зависимых вариациях в системе (5.12) по предположению отличен от нуля (в противном случае среди связей будут такие, которые являются следствием остальных). Учтем далее, что кроме требования голономности связей выполняется требование их идеальности (см. (5.13)). В этом условии k зависимых вариаций с помощью (5.12) можно выразить через $3N - k$ независимых вариаций. После такой подстановки (для того чтобы удовлетворить требованию идеальности) следует приравнять нулю коэффициенты при независимых вариациях. Тем самым можно получить $3N - k$ соотношений между реакциями связей и радиусами-векторами точек. Таким образом, основная задача динамики несвободной системы с голономными идеальными связями является определенной, поскольку число уравнений и число неизвестных функций в этом случае совпадают.

Рассмотренное сейчас непосредственное исключение зависимых вариаций координат можно в общем случае провести методом неопределенных множителей Лагранжа. Изложим существо этого метода. В силу идеальности и голономности связей из условий (5.13) и (5.12) имеем

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^N (\nabla_i f_\alpha) \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k). \quad (5.15)$$

Умножая каждое из k последних соотношений на соответствующий неопределенный скалярный множитель — λ_α ($\alpha = 1, 2, \dots, k$), и складывая все полученные результаты с условием идеальности, придем к соотношению

$$\sum_{i=1}^N \left\{ R_i - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \nabla_i f_{\alpha} \right\} \delta r_i = 0; \quad (5.16)$$

в котором k вариаций координат являются зависимыми, а $3N - k$ — независимыми. Подберем k множителей λ_{α} так, чтобы коэффициенты при k зависимых вариациях в (5.16) обратились в нуль. Этот подбор можно провести единственным образом, так как детерминант из коэффициентов при зависимых вариациях в системе (5.12) отличен от нуля (по предположению о связях). С другой стороны, коэффициенты при независимых вариациях в (5.16) должны равняться нулю в силу условия идеальности.

Итак, коэффициенты при всех δr_i должны быть приравнены нулю. В результате приходим к заключению, что *между реакциями идеальных голономных связей и функциями f_{α} , определяющими уравнения связей, имеют место соотношения*

$$R_i = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \nabla_i f_{\alpha} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (5.17)$$

Соотношения (5.17) являются необходимым условием обращения в нуль виртуальной работы реакций связей, т. е. необходимым условием идеальности голономных связей. Можно непосредственно убедиться и в достаточности этого условия.

Проиллюстрируем исключение зависимых вариаций координат на примере точки, движущейся по гладкой окружности, наклоненной под углом α к горизонту. Эта кривая представляет собой пересечение сферы и наклонной плоскости. Следовательно, на точку наложены две голономные связи (см. (5.10))

$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0, \quad f_2 = z - y \operatorname{tg} \alpha = 0$$

(начало координат помещено в центр сферы, ось Oz направлена по вертикали вверх, а плоскость проходит через центр сферы и ось Ox и наклонена к оси Oy под углом α). Так как кривая гладкая, то условие идеальности (5.13) выполняется:

$$R_x \delta x + R_y \delta y + R_z \delta z = 0.$$

Виртуальное перемещение точки подчинено системе двух уравнений (см. (5.12))

$$\begin{aligned} \nabla_x f_1 \cdot \delta x + \nabla_y f_1 \cdot \delta y + \nabla_z f_1 \cdot \delta z &= 0, \\ \nabla_x f_2 \cdot \delta x + \nabla_y f_2 \cdot \delta y + \nabla_z f_2 \cdot \delta z &= 0; \end{aligned}$$

поэтому одна из вариаций координат, например δx , является независимой. Выразим зависимые вариации δy и δz через независимую δx , что можно осуществить, поскольку соответствующий детерминант отличен от нуля:

$$\left| \begin{array}{cc} \nabla_y f_1 & \nabla_z f_1 \\ \nabla_y f_2 & \nabla_z f_2 \end{array} \right| = 2(y + z \operatorname{tg} \alpha) \neq 0.$$

Используя полученные выражения

$$\delta y = -\frac{x}{y + z \operatorname{tg} \alpha} \delta x, \quad \delta z = -\frac{x \operatorname{tg} \alpha}{y + z \operatorname{tg} \alpha} \delta x$$

и исключая из условия идеальности зависимые вариации, найдем

$$\left(R_x - \frac{x}{y + z \operatorname{tg} \alpha} R_y - \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{y + z \operatorname{tg} \alpha} R_z \right) \delta x = 0.$$

Отсюда видно, что между проекциями реакции связей и радиуса-вектора точки имеет место соотношение

$$R_x (y + z \operatorname{tg} \alpha) = x (R_y + R_z \operatorname{tg} \alpha).$$

Это же соотношение можно получить методом неопределенных множителей. Действительно, умножая уравнения для вариаций координат на $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$ соответственно и складывая результаты умножения с условием идеальности связей, находим (см. (5.16))

$$(\mathbf{R} - \lambda_1 \nabla f_1 - \lambda_2 \nabla f_2) \delta \mathbf{r} = 0.$$

Затем подберем множители λ_1 и λ_2 так, чтобы коэффициенты этого уравнения при зависимых вариациях δy и δz обратились в нуль; тогда

$$R_y = \lambda_1 \nabla_y f_1 + \lambda_2 \nabla_y f_2, \quad R_z = \lambda_1 \nabla_z f_1 + \lambda_2 \nabla_z f_2.$$

Указанный подбор множителей можно осуществить единственным способом, так как два последних соотношения являются системой, которую можно разрешить относительно λ_1 и λ_2 , поскольку соответствующий детерминант отличен от нуля:

$$\left| \begin{array}{cc} \Delta_y f_1 & \nabla_y f_2 \\ \nabla_z f_1 & \nabla_z f_2 \end{array} \right| = 2(y + z \operatorname{tg} \alpha) \neq 0$$

(этот детерминант равен детерминанту, использованному выше).

После указанного подбора λ_1 и λ_2 следует приравнять нулю коэффициент при независимой вариации δx , т. е. положить

$$R_x = \lambda_1 \nabla_x f_1 + \lambda_2 \nabla_x f_2.$$

В результате придем к соотношению (см. (5.17))

$$\mathbf{R} = \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2,$$

которое в декартовых координатах имеет вид

$$R_x = 2\lambda_1 x, \quad R_y = 2\lambda_1 y - \lambda_2 \operatorname{tg} \alpha, \quad R_z = 2\lambda_1 z + \lambda_2.$$

Исключая отсюда λ_1 и λ_2 , найдем ранее полученное соотношение между проекциями векторов \mathbf{R} и \mathbf{r} .

Итак, реакции идеальных голономных связей являются линейными формами отношений градиентов функций f_α ($\alpha=1, 2, \dots, k$), определяющих уравнения связей (5.10). Подставляя (5.17) в (5.6), получим уравнения движения механической системы с голономными идеальными связями, т. е. уравнения Лагранжа с реакциями связей или уравнения Лагранжа первого рода*:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k).$$
(5.18)

Здесь силы \mathbf{F}_i являются заданными функциями \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i и t ($i=1, \dots, N$). Неизвестными в этих уравнениях являются все радиус-векторы точек $\mathbf{r}_i(t)$ и множители Лагранжа $\lambda_\alpha(t)$ ($\alpha=1, 2, \dots, k$). Число уравнений и число неизвестных функций совпадают и равны $3N+k$.

Подчеркнем, что реакции связей определяются в результате решения уравнений (5.18) и, следовательно, зависят от заданных сил, поэтому заданные силы часто называют активными силами, а реакции связей — пассивными. Такая зависимость одних сил от других появляется в результате упрощения представлений о реальном взаимодействии тел: само наложение связей на систему представляет собой по существу такое упрощение (например, в задаче о сферическом маятнике мы пренебрегаем упругими свойствами нити подвеса и тем самым налагаем связь).

При применении уравнений Лагранжа возникает также вопрос о выполнении условия идеальности связей. Выше мы видели, что это требование связано с определенными физическими допущениями, которые не всегда выполняются, например наличие сил трения на голономных связях делает их неидеальными. Однако всегда можно выделить нормальные составляющие реакций, которые будут удовлетворять условию идеальности (5.13); тогда остальные составляющие реакций должны быть заданы как функции положений, скоростей точек и времени.

Законы изменения импульса, кинетического момента и энергии системы при наличии связей могут быть получены из уравнений Лагранжа (5.18) так же, как аналогичные законы для свободных систем были получены из уравнений движения Ньюто-

* Вывод уравнений Лагранжа первого рода для систем с неголономными связями см. на с. 379—380.

на с помощью закона действия — противодействия. В самом деле, учитывая, что по отношению к исследуемой системе связи могут быть как внутренними, так и внешними, найдем

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^e + \mathbf{R}^e, \quad (5.19)$$

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}_R^e, \quad (5.20)$$

$$\dot{E} = \frac{\partial U^e}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^d \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \mathbf{v}_i, \quad (5.21)$$

где $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i^{\text{in}} + \mathbf{R}_i^e$ — сумма реакций внутренних и внешних связей на i -тую точку; $\mathbf{R}^e = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i^e$ — сумма реакций внешних связей; $\mathbf{L}_R^e = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \mathbf{R}_i^e]$ — сумма моментов реакций внешних связей. По сравнению с законами изменения импульса, кинетического момента и энергии для свободных систем (см. (2.103), (2.111) и (2.132)) здесь появились дополнительные члены: сумма внешних реакций и их моменты, а также мощность как внутренних, так и внешних реакций.

Мощность реакций можно представить и в другом виде, используя идеальность и голономность связей. Действительно, имея в виду (5.17) и (5.11), получим

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \mathbf{v}_i = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^N (\nabla_i f_{\alpha}) \mathbf{v}_i \right) = - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}. \quad (5.22)$$

Это выражение позволяет записать уравнение (5.21) в виде

$$\dot{E} = \frac{\partial U^e}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^d \mathbf{v}_i - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}. \quad (5.23)$$

Законы сохранения импульса и момента при наличии связей должны быть сформулированы в соответствии с законами для свободных систем (см. (2.104) и (2.112)), только к требованиям на заданные внешние силы добавятся аналогичные требования к реакциям внешних связей. Что касается закона сохранения энергии при наличии связей, то он имеет место при условиях (2.133) и *стационарности* идеальных голономных связей, когда

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k). \quad (5.24)$$

Во многих случаях применение законов сохранения упрощает решение задач о движении несвободных систем. В свою очередь, законы сохранения могут быть связаны с симметрией заданных силовых полей и связей. Поэтому выбор координат целесообразно осуществлять с учетом этой симметрии.

Рассмотрим некоторые примеры на составление и решение уравнений Лагранжа с реакциями связей.

Пример 5.1. Точка на колеблющейся горизонтальной плоскости.

Точка массы m движется по колеблющейся горизонтальной гладкой плоскости. Найти положение точки и реакцию связи как функции времени, если плоскость колеблется в направлении, перпендикулярном плоскости, с амплитудой a и частотой ω , а напряженность поля тяжести равна g .

Выберем систему координат так, как это показано на рис. 5.2, а, т. е. направим ось Oz коллинеарно вектору \mathbf{g} ; тогда систему уравнений (5.18) можно записать в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg + R_z, \\ z - a \sin \omega t &= 0. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что плоскость является гладкой, поскольку составляющие реакции R_x и R_y приравнены нулю.

Из первых двух уравнений движения находим

$$x = \dot{x}_0 t + x_0, \quad y = \dot{y}_0 t + y_0,$$

а из третьего уравнения движения и уравнения связи получим, что

$$z = a \sin \omega t, \quad R_z = m(g - a\omega^2 \sin \omega t).$$

Проекция импульса точки на оси Ox , Oy сохраняются, так как проекции заданной силы и реакции связи на эти оси равны нулю; кроме того, сохраняется проекция момента импульса точки на ось Oz , поскольку проекции момента заданной силы и момента реакции на эту ось равны нулю. Что касается энергии, то она изменяется со временем согласно уравнению

$$\dot{E} = R_z \dot{z} = ma\omega \cos \omega t (g - a\omega^2 \sin \omega t).$$

Обратим внимание на то, что $R_z > 0$, если частота колебаний плоскости достаточно мала ($a\omega^2 < g$). Если же $a\omega^2 > g$, то R_z будет отрицательной на интервалах времени

$$2n\pi + \omega t_1 < \omega t < (2n + 1)\pi - \omega t_1,$$

где $\omega t_1 = \arcsin(g/a\omega^2)$, а n — целые неотрицательные числа. Это связано с тем, что на указанных интервалах времени z -я компо-

нента ускорения точки отрицательна и достигает большой величины.

Пример 5.2. Точка на расширяющейся цилиндрической поверхности.

Точка массы m движется в поле тяжести по расширяющейся гладкой цилиндрической поверхности с вертикальной осью. Найти закон движения точки, если напряженность поля тяжести равна g , а радиус цилиндра увеличивается с постоянной скоростью $\dot{\rho}_0$.

Учитывая симметрию связи, совместим ось Oz с осью цилиндра, а ось Ox (или Oy) направим произвольно (рис. 5.4). Из тех

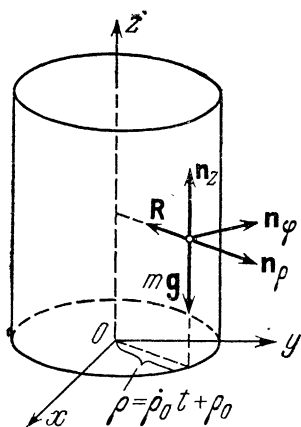


Рис. 5.4

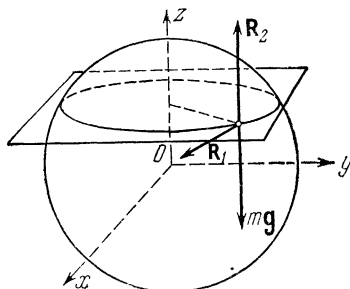


Рис. 5.5

же соображений симметрии будем использовать цилиндрические координаты. Тогда, разлагая обе части уравнения (5.18) по ортам \mathbf{n}_ρ , \mathbf{n}_φ и \mathbf{n}_z , получим

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = R_\rho, \quad \frac{m}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = 0,$$

$$m\ddot{z} = -mg, \quad \rho = \dot{\rho}_0 t + \rho_0.$$

Здесь учтено, что реакция \mathbf{R} перпендикулярна к цилиндрической поверхности и, следовательно, только R_ρ отлична от нуля.

Используя второе из уравнений движения, найдем первый интеграл

$$\rho^2\dot{\varphi} = \rho_0^2\dot{\varphi}_0,$$

который по существу представляет собой интеграл площадей. Отсюда

$$\dot{\varphi} = \frac{\rho_0^2 \dot{\varphi}_0}{(\dot{\rho}_0 t + \rho_0)^2}.$$

Интегрируя это уравнение, найдем $\varphi(t)$:

$$\varphi = \frac{\rho_0 \dot{\varphi}_0 t}{\dot{\rho}_0 t + \rho_0} + \varphi_0,$$

а интегрируя третье уравнение движения, получим $z(t)$:

$$z = -\frac{gt^2}{2} + \dot{z}_0 t + z_0.$$

Наконец, подставляя функции $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ в первое из уравнений движения, найдем реакцию связи

$$R_\rho = -m \frac{(\rho_0^2 \dot{\varphi}_0)^2}{(\dot{\rho}_0 t + \rho_0)^3}.$$

Полная энергия точки E не сохраняется вследствие нестационарности связи.

Пример 5.3. Точка на пересечении сферы и движущейся плоскости.

Точка массы m движется по пересечению неподвижной гладкой сферы радиуса a и гладкой горизонтальной плоскости, движущейся в вертикальном направлении по закону $z = a \sin \omega t$. Найти закон движения точки и реакции связей для $0 \leq t < \pi/2\omega$.

Учитывая симметрию связей, поместим начало координат в центр сферы, а ось Oz направим коллинеарно вектору \mathbf{g} (рис. 5.5). Тогда систему (5.18) с уравнениями связей можно записать в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= m\mathbf{g} + \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2, \\ f_1 &= x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, \\ f_2 &= z - a \sin \omega t = 0. \end{aligned}$$

Замечая, что момент импульса точки относительно оси Oz постоянен и что от цилиндрической координаты φ уравнения связей не зависят, спроектируем обе части уравнения Лагранжа на цилиндрические орты. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) &= 2\lambda_1 \rho, \quad \frac{m}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}) = 0, \quad m\ddot{z} = -mg + 2\lambda_1 z + \lambda_2, \\ \rho^2 + z^2 &= a^2, \quad z = a \sin \omega t. \end{aligned}$$

Из уравнений связей и второго уравнения движения найдем функции $\rho(t)$ и $\varphi(t)$:

$$\rho = a \cos \omega t, \quad \dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0}{\cos^2 \omega t}$$

(здесь учтено, что в начальный момент времени $t_0=0$, $\rho=a$).

Интегрируя $\dot{\varphi}(t)$, получим угол φ как функцию времени:

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} \operatorname{tg} \omega t + \varphi_0.$$

Множители λ_1 и λ_2 определим из первого и третьего уравнений движения:

$$\lambda_1 = -\frac{m}{2}(\omega^2 + \dot{\varphi}^2), \quad \lambda_2 = m(g + \dot{\varphi}^2 z).$$

Отсюда с помощью соотношений

$$R_{1\rho} = 2\lambda_1\rho, \quad R_{1z} = 2\lambda_1 z, \quad R_{2z} = \lambda_2$$

находим реакции связей

$$R_\rho = R_{1\rho} = -ma \left(\omega^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{\cos^4 \omega t} \right) \cos \omega t,$$

$$R_z = R_{1z} + R_{2z} = m(g - a\omega^2 \sin \omega t).$$

§ 5.4. Уравнения Лагранжа в независимых координатах и общее уравнение механики; циклические координаты и симметрия силового поля и связей

Как уже отмечалось, уравнения Лагранжа с реакциями связей дают возможность найти и положение точек системы, и реакции связей как функции времени. Однако на практике часто не нужна столь «подробная» информация о механической системе, а требуется найти лишь закон движения точек по связям. Для разрешения таких задач необходимы уравнения движения, которые в качестве неизвестных содержат только *независимые координаты*. С другой стороны, эти уравнения должны полностью *учитывать влияние связей на систему*. Такие уравнения существуют и называются уравнениями Лагранжа в независимых координатах (или уравнениями Лагранжа второго рода). Значение этих уравнений не исчерпывается применением к указанному типу задач. Если требуется определить реакции связей, зачастую проще с помощью уравнений Лагранжа второго рода определить закон движения системы, а затем с помощью уравнений Лагранжа первого рода найти реакции связей. *Уравнения Лагранжа второго рода имеют большое значение и для свободных систем*. В этом случае они

представляют собой уравнения движения в произвольных криволинейных координатах (см. пример 5.7 на с. 227—228 и [15]).

Ввиду большой общности этих уравнений выведем сначала дифференциальное уравнение, которому подчинена независимая координата какой-либо простейшей системы, например математического маятника. Так называется тело достаточно малых размеров, подвешенное на стержне (или нити) исчезающе малой массы и постоянной длины l и совершающее движение в вертикальной плоскости (в точке подвеса трением пренебрегается).

Движение такого маятника описывается уравнением Лагранжа с реакциями связей (см. (5.18))

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \lambda_1\nabla f_1 + \lambda_2\nabla f_2,$$

$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0, \quad f_2 = z = 0$$

(начало координат помещено в точку подвеса, плоскость $z=0$ совмещена с плоскостью движения, а ось Ox направлена по вертикали вниз).

Чтобы исключить из этих уравнений реакции связей, умножим уравнение движения маятника скалярно на виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}$; тогда, учитывая идеальность связей (см. (5.13)), найдем

$$\ddot{\mathbf{r}} \delta\mathbf{r} = \mathbf{g} \delta\mathbf{r}.$$

Отсюда, используя декартовы координаты и учитывая уравнения связей, получим систему

$$(\ddot{x} - g)\delta x + \ddot{y}\delta y = 0, \quad f = x^2 + y^2 - l^2 = 0,$$

которая явно не содержит реакций связей, но учитывает их влияние на движение материальной точки, поскольку вариации δx и δy соответствующим образом зависят друг от друга.

Используя голономность связи, перейдем в найденной системе уравнений к независимой координате, в качестве которой удобно взять угол φ отклонения маятника от вертикали. Выражая декартовы координаты маятника через φ

$$x = l \cos \varphi, \quad y = l \sin \varphi,$$

найдем

$$\delta x = -l \sin \varphi \delta \varphi, \quad \ddot{x} = -l(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi),$$

$$\delta y = l \cos \varphi \delta \varphi, \quad \ddot{y} = l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi).$$

Наконец, используя эти выражения, придем к уравнению, содержащему только независимую вариацию $\delta\varphi$:

$$(\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi) \delta\varphi = 0,$$

где $\omega_0^2 = g/l$. Приравняв коэффициент при независимой вариации нулю, получим одно дифференциальное уравнение, описывающее движение математического маятника:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0.$$

Это уравнение не содержит реакций связей в качестве неизвестных, однако полностью учитывает их воздействие на точку, поскольку сама независимая координата выбрана с учетом связей. В самом деле, уравнение связи, выраженное через угол φ , удовлетворяется тождественно:

$$f = l^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - l^2 \equiv 0.$$

Теперь выведем уравнения Лагранжа второго рода для механической системы, состоящей из N точек, на которые налагается k идеальных голономных связей. Движение такой системы подчинено уравнениям (5.18). Чтобы *исключить из этих уравнений реакции связей*, умножим каждое из них скалярно на соответствующее виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}_i$ и сложим результаты умножения; тогда

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \left(\sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \nabla_i f_{\alpha} \right) \delta\mathbf{r}_i. \quad (5.25)$$

Двойная сумма в этом уравнении представляет собой виртуальную работу всех реакций связей и по условию идеальности связей равна нулю (см. (5.17)):

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \nabla_i f_{\alpha} \cdot \delta\mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^N \nabla_i f_{\alpha} \cdot \delta\mathbf{r}_i \right) = 0. \quad (5.26)$$

Поэтому (5.25) можно записать в виде уравнения

$$\sum_{i=1}^N \{m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i\} \delta\mathbf{r}_i = 0, \quad (5.27)$$

которое называется общим уравнением механики или уравнением д'Аламбера — Лагранжа.

Заметим, что уравнения Лагранжа с реакциями связей могут быть получены из общего уравнения механики совместно с уравнениями связей

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

Действительно, используя уравнения связей в виде

$$\sum_{i=1}^N \nabla f_{\alpha} \delta r_i = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k),$$

умножим левую часть каждого из этих уравнений на соответствующий неопределенный множитель — λ_{α} ($\alpha = 1, 2, \dots, k$), а все результаты умножения сложим с левой частью (5.27). Тогда

$$\sum_{i=1}^N \left\{ m_i \ddot{r}_i - F_i - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \nabla f_{\alpha} \right\} \delta r_i = 0.$$

Далее, применяя к этому уравнению последующую процедуру метода неопределенных множителей, изложенного на с. 206, приходим к уравнениям Лагранжа с реакциями связей. Таким образом, система, состоящая из уравнения (5.27) и уравнений связей (5.10), эквивалентна системе (5.18). Более того, можно утверждать, что общее уравнение механики и уравнения движения с реакциями любых идеальных связей эквивалентны*.

Прежде чем продолжить вывод уравнений Лагранжа второго рода, остановимся на понятии независимых обобщенных координат. Такими координатами по определению являются *любые* $3N - k$ величины, однозначно определяющие положение системы (N и k — числа точек системы и голономных связей соответственно). Число независимых обобщенных координат, равное $s = 3N - k$, в случае систем с голономными связями называется числом степеней свободы. Независимые обобщенные координаты будем обозначать q_1, q_2, \dots, q_s , а всю эту совокупность для краткости будем в дальнейшем обозначать символом q .

Из определения независимых координат следует, что они должны удовлетворять двум требованиям.

* Действительно, система с идеальными связями подчинена уравнениям

$$m_i \ddot{r}_i = F_i + R_i \quad (i = 1, \dots, N), \quad \sum_{i=1}^N R_i \delta r_i = 0, \quad (a)$$

из которых вытекает, что

$$\sum_{i=1}^N \{ m_i \ddot{r}_i - F_i \} \delta r_i = 0.$$

Если же исходить из последнего уравнения, то, полагая

$$R_i = m_i \ddot{r}_i - F_i,$$

придем к системе (a).

Во-первых, радиусы-векторы точек системы должны быть однозначными функциями q :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (5.28)$$

причем из $3N$ функций — проекций радиусов-векторов — s каких-либо функций должны быть независимыми, что обеспечивается требованием: ранг матрицы

$$\left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial q_s} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_{3N}}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial x_{3N}}{\partial q_s} \end{array} \right\| \quad (5.29)$$

должен равняться числу s степеней свободы (здесь проекции радиусов-векторов точек обозначены символом x_i с общей для всех точек нумерацией, например проекции вектора \mathbf{r}_1 обозначаются x_1, x_2, x_3 , а проекции вектора \mathbf{r}_2 обозначаются x_4, x_5, x_6 и т. д.) [44, с. 520].

Во-вторых, координаты q должны быть выбраны в соответствии с уравнениями связей, т. е. функции (5.28) должны обращать в тождество уравнения связей (5.10):

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \Big|_{\substack{\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1(q,t) \\ \dots \\ \mathbf{r}_N \rightarrow \mathbf{r}_N(q,t)}} \equiv 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k). \quad (5.30)$$

Обратим внимание на то, что в случае стационарных связей уравнения связей явно от времени не зависят; поэтому и функции (5.28) можно подобрать явно не зависящими от времени. В дальнейшем это условие для стационарных связей будем считать выполненным.

Ввиду важности понятий о независимых обобщенных координатах и числе степеней свободы рассмотрим несколько примеров.

Пусть точка движется по эллипсу с полуосями a и b . В системе координат с началом в центре эллипса и осями Ox, Oy , направленными по осям эллипса, уравнения связей являются

$$f_1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad f_2 = z = 0.$$

Первое из этих уравнений обращается в тождество, если положить, что

$$x = a \cos \alpha, \quad y = b \sin \alpha.$$

Таким образом, в качестве независимой координаты можно выбрать параметр α , а число s степеней свободы в этом случае равно единице.

Если точка движется по сфере радиуса l с центром в начале координат, то уравнением связи является уравнение

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0,$$

которое обращается в тождество подстановкой

$$x = l \sin \theta \cos \varphi, \quad y = l \sin \theta \sin \varphi, \quad z = l \cos \theta,$$

где θ и φ — углы сферических координат (см. рис. 5.1). Следовательно, эти углы могут служить независимыми координатами, а число степеней свободы $s=2$.

Наконец, в случае свободной точки $s=3$, а в качестве независимых координат можно взять различные криволинейные координаты, например цилиндрические; эти координаты связаны с декартовыми координатами точки соотношениями вида (5.28)

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Используя формулы преобразования (5.28), представим общее уравнение механики в форме уравнения относительно независимых координат и их производных по времени. Для этого прежде всего найдем виртуальные перемещения $\delta \mathbf{r}_i$ всех точек как функции q :

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (5.31)$$

Подставляя (5.31) в общее уравнение механики и изменяя порядок суммирования, получим

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = 0. \quad (5.32)$$

Здесь все суммы по индексу i имеют размерность энергии, деленной на размерность соответствующей координаты q_j . При этом те суммы по i , в которые входят ускорения точек, определяются кинетической энергией как функцией обобщенных координат и их производных по времени. Действительно, преобразуем i -тый член одной из таких сумм:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right). \quad (5.33)$$

Затем, используя (5.28), найдем скорости точек как функции обобщенных координат

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (5.34)$$

Отсюда видно, что скорости материальных точек являются линейными функциями величин q_j ($j=1, \dots, s$), называемых обобщенными скоростями. Из (5.34) также видно, что в общем случае имеет место равенство частной производной от скорости точки по обобщенной скорости и частной производной радиуса-вектора той же точки по соответствующей обобщенной координате, т. е.

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N; \\ j = 1, 2, \dots, s \end{array} \right). \quad (5.35)$$

Используя (5.35) и изменяя порядок дифференцирования по t и q_j , вместо (5.33) получим

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}. \quad (5.36)$$

Применяя эти соотношения, все зависящие от ускорений «суммы по точкам системы» можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}. \quad (5.37)$$

Далее, пользуясь (5.34), зададим кинетическую энергию системы как функцию обобщенных скоростей и координат:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{\mathbf{r}}_i)^2 \Big|_{\substack{\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q, \dot{q}, t) \\ \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i(q, \dot{q}, t)}} = T(q, \dot{q}, t) \quad (5.38)$$

(здесь и в дальнейшем под \dot{q} понимается совокупность обобщенных скоростей, так же как под q понимается совокупность всех обобщенных координат). Дифференцируя эту функцию по обобщенным скоростям и координатам, найдем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (5.39)$$

Сопоставляя (5.37) и (5.39), получим

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (5.40)$$

«Суммы по точкам системы» (см. (5.32)), зависящие от заданных (активных) сил, обозначим символами

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (5.41)$$

Величины Q являются заданными функциями обобщенных координат, скоростей и времени. Действительно, все \mathbf{F}_i определены как функции \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i и t ($i=1, 2, \dots, N$), а все векторы \mathbf{r}_i и \mathbf{v}_i согласно (5.28) и (5.34) являются функциями q , \dot{q} и t .

Используя введенные обозначения, виртуальную работу всех заданных сил \mathbf{F}_i можно представить в виде

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j. \quad (5.42)$$

Следовательно, величина Q_j играет по отношению к вариации δq_j независимой координаты ту же роль, которую сила \mathbf{F}_i играет по отношению к виртуальному перемещению $\delta \mathbf{r}_i$ точки. Поэтому величину Q_j называют обобщенной силой, соответствующей координате q_j . Размерность обобщенной силы Q_j равна размерности работы, деленной на размерность соответствующей координаты q_j .

Используя (5.32), (5.40) и определение обобщенной силы, приходим к общему уравнению механики в обобщенных координатах:

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0, \quad (5.43)$$

где все вариации δq_j независимы друг от друга. Поэтому из общего уравнения механики вытекают дифференциальные уравнения движения, а именно уравнения Лагранжа в независимых координатах

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (5.44)$$

Эти уравнения, как и уравнения Лагранжа с реакциями связей (5.18), справедливы для систем с голономными идеальными связями.

Итак, уравнения Лагранжа в независимых координатах не содержат реакций связей в качестве неизвестных функций, хотя полностью учитывают влияние связей на движение механической системы. Неизвестными в этих уравнениях являются обобщенные

независимые координаты как функции времени. Число неизвестных и число уравнений равно числу степеней свободы.

Если заданные силы потенциальны, а потенциальная энергия системы равна $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$, то, воспользовавшись формулами

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

и определением (5.41), получим

$$Q_j = -\sum_{i=1}^N \nabla_i U \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (5.45)$$

Таким образом, уравнения Лагранжа для случая потенциальных сил приобретают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (5.46)$$

Подчеркнем, что рациональный выбор независимых координат может существенно упростить конкретный вид уравнений Лагранжа и тем самым облегчить решение задачи. Лагранж по этому поводу писал: «Так как эти уравнения могут иметь различные более или менее простые формы и, в частности, более или менее удобные для интегрирования, является не безразличным, в каком виде они представлены с самого начала; пожалуй, одно из главных преимуществ нашего метода заключается в том, что он всегда дает уравнения каждой задачи в наиболее простой форме по отношению к примененным при этом переменным и дает нам возможность наперед судить о том, каковы те переменные, пользование которыми может нам максимально облегчить интегрирование» [6, т. I, с. 403]. Действительно, пусть обобщенная координата q_j выбрана так, что кинетическая энергия T явно не зависит от нее, а соответствующая этой координате обобщенная сила Q_j равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0, \quad Q_j = 0. \quad (5.47)$$

Тогда уравнение Лагранжа, соответствующее координате q_j , сразу приведет к первому интегралу

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \equiv f(q, \dot{q}, t) = \text{const}. \quad (5.48)$$

Если заданные силы потенциальны, то условия (5.47) приобретают вид

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0. \quad (5.49)$$

Координаты, от которых кинетическая и потенциальная энергии системы явно не зависят, называются циклическими координатами. Циклическость координат во многих случаях связана с симметрией заданного силового поля и связей, поэтому рациональный выбор обобщенных координат должен отражать эту симметрию.

Выбирая независимые координаты так, чтобы число циклических координат было максимальным, и интегрируя уравнения Лагранжа, можно найти общее решение уравнений (5.44) (или (5.46)) в виде

$$q_j = q_j(t, C_1, C_2, \dots, C_{2s}) \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (5.50)$$

(здесь C_α — постоянные интегрирования). Это решение позволяет определить закон движения системы и реакции связей как функции времени. Действительно, используя (5.28), найдем $\mathbf{r}_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, N$). Затем, дифференцируя $\mathbf{r}_i(t)$ по времени, получим векторы скоростей и ускорений всех точек: $\mathbf{v}_i(t)$, $\mathbf{w}_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, N$). И наконец, используя найденные функции и уравнения Лагранжа (5.18), получим реакции связей как функции времени:

$$\mathbf{R}_i(t) = m_i \mathbf{w}_i(t) - \mathbf{F}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (5.51)$$

где

$$\mathbf{F}_i(t) = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), \mathbf{v}_1(t); \dots, \mathbf{v}_N(t), t).$$

В заключение этого параграфа рассмотрим принцип виртуальных перемещений, являющийся основой статики — большого раздела механики, в котором изучается равновесие механических систем (этот принцип играет важную роль во многих инженерных расчетах). Пусть в начальный момент времени система находится в положении \mathbf{r}_{i0} ($i=1, 2, \dots, N$), а скорости всех ее точек равны нулю; если система и в любой другой момент времени остается в положении \mathbf{r}_{i0} ($i=1, 2, \dots, N$), то это положение называется положением равновесия системы. Из общего уравнения механики следует, что в положении равновесия виртуальная работа заданных сил должна равняться нулю, т. е.

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (5.52)$$

Это необходимое и достаточное условие равновесия системы называется принципом виртуальных перемещений (необходимость и достаточность (5.52) следует из эквивалентности уравнений Лагранжа с реакциями связей и общего уравнения механики (см. с. 217)). Записывая принцип виртуальных перемещений в независимых координатах с помощью (5.42), получим

$$\delta A = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j = 0, \quad (5.53)$$

откуда ввиду независимости всех вариаций δq_j следует, что *необходимым и достаточным условием равновесия механической системы с голономными идеальными связями является обращение в нуль всех обобщенных сил в рассматриваемом положении системы*. Таким образом, положение равновесия системы определяется с уравнениями:

$$Q_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (5.54)$$

Рассмотрим ряд примеров на решение уравнений Лагранжа в независимых координатах.

Пример 5.4. *Циклоидальный маятник.*

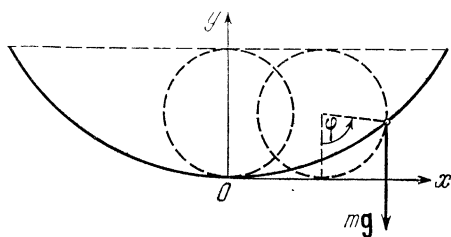


Рис. 5.6

Точка массы m движется в однородном поле тяжести по гладкой циклоиде, расположенной в вертикальной плоскости (см. рис. 5.6). Найти закон движения точки, если напряженность поля тяжести \mathbf{g} , а радиус окружности, производящей циклоиду, равен R .

Выберем декартовы оси так, чтобы одна из осей была коллинеарна \mathbf{g} , а одна из координатных плоскостей совпадала с плоскостью циклоиды. За независимую координату возьмем угол φ — угол поворота производящей окружности, отсчитываемый от оси Oy (производящая окружность катится без скольжения по штрихованной прямой, параллельной оси Ox). Тогда уравнение связи запишется в виде

$$x = R(\varphi + \sin \varphi), \quad y = R(1 - \cos \varphi).$$

Используя эти функции, легко найти T и U как функции φ и $\dot{\varphi}$:

$$T = 2mR^2 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \dot{\varphi}^2, \quad U = 2mgR \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right).$$

Отсюда видно, что уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

соответствующее координате φ , будет достаточно сложным. Однако из тех же выражений можно усмотреть, что T и U принимают весьма простой вид, если в качестве переменной взять величину,

пропорциональную $\sin(\varphi/2)$. Действительно, производная от $\sin(\varphi/2)$ по t пропорциональна $\cos(\varphi/2)\dot{\varphi}$. В связи с этим вместо φ выберем обобщенную координату $s = 4R \sin(\varphi/2)$ (s является длиной дуги циклоиды, отсчитываемой от начала координат до материальной точки). Выражая T и U через переменную s :

$$T = \frac{m}{2} \dot{s}^2, \quad U = \frac{mg}{8R} s^2,$$

получим уравнение Лагранжа, соответствующее этой переменной:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = - \frac{\partial U}{\partial s},$$

т. е.

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0,$$

где $\omega^2 = g/4R$. Отсюда находим закон движения точки по циклоиде

$$s = a \cos(\omega t + \alpha).$$

Здесь a и α — амплитуда и фаза гармонического колебания соответственно; их можно выразить через s_0 и v_0 — величины дуги и скорости точки в начальный момент времени:

$$a = \left(s_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \right)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = - \frac{v_0}{\omega s_0}.$$

В частности, если $v_0 = 0$, то решение принимает вид

$$s = s_0 \cos \omega t,$$

откуда следует, что при любом начальном отклонении $s_0 < s_{\max} = 4R$ точка придет в наинизшее положение за один и тот же промежуток времени (это свойство движения называется *изохронностью*).

Пример 5.5. Точка на колеблющейся горизонтальной плоскости.

Рассмотрим решение примера 5.1 с помощью уравнений Лагранжа в независимых координатах.

Поскольку на одну точку налагается одна связь, то число степеней свободы точки будет равно двум. В качестве независимых координат можно выбрать декартовы координаты x и y (см. рис. 5.2, а), а используя уравнение связи, найти кинетическую энергию T как функцию обобщенных скоростей \dot{x} и \dot{y}

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t)$$

и потенциальную энергию

$$U = mga \sin \omega t.$$

Эти выражения для T и U дают возможность составить уравнения Лагранжа (5.46) для рассматриваемой задачи:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial U}{\partial x}, \text{ т. е. } m\ddot{x} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\partial U}{\partial y}, \text{ т. е. } m\ddot{y} = 0.$$

В настоящем примере обе координаты x и y циклические, так как ни T , ни U явно от них не зависят (см. (5.49)). Поэтому для решения задачи не обязательно выписывать уравнения Лагранжа; можно сразу получить интегралы вида (5.48)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = m\dot{x}_0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = m\dot{y}_0,$$

с помощью которых найти окончательное решение (см. пример 5.1). Заметим, что сохранение проекций скорости \dot{x} и \dot{y} здесь связано с циклическостью координат x и y .

Пример 5.6. Точка на расширяющейся цилиндрической поверхности.

Рассмотрим решение примера 5.2, используя независимые координаты.

Согласно условию связь, налагаемая на точку, обладает цилиндрической симметрией, а ось цилиндра направлена вдоль вектора \mathbf{g} (рис. 5.4). Поэтому выберем в качестве независимых переменных цилиндрические координаты φ , z (число степеней свободы точки равно двум) и запишем уравнения (5.46) в этих переменных в общей форме:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Используя выражение для скорости в цилиндрических координатах (см. (1.17)) и уравнение связи

$$\rho = \dot{\rho}_0 t + \rho_0,$$

найдем кинетическую и потенциальную энергии как функции обобщенных скоростей и координат:

$$T = \frac{m}{2} [\dot{\rho}_0^2 + (\dot{\rho}_0 t + \rho_0)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2],$$

$$U = mgz.$$

Отсюда видно, что координата φ является циклической. Это приводит к интегралу

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m(\dot{\rho}_0 t + \rho_0)^2 \dot{\varphi} = C,$$

который дает возможность найти $\varphi(t)$. Нетрудно убедиться, что частная производная $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$ равна M_z — проекции момента импульса на ось Oz , а ее сохранение связано с циклическостью координаты φ .

Независимая координата z не является циклической, так как $\frac{\partial U}{\partial z} \neq 0$. Поэтому закон изменения этой координаты получим из соответствующего уравнения Лагранжа

$$\ddot{z} = -g.$$

Пример 5.7. Уравнение движения свободной точки в цилиндрических и сферических координатах.

Поскольку свободная точка обладает тремя степенями свободы, то в качестве независимых координат можно взять любые три независимые координаты точки, в частности цилиндрические координаты ρ , φ , z . Приращение радиуса-вектора в этих координатах равно

$$d\mathbf{r} = \mathbf{n}_\rho d\rho + \mathbf{n}_\varphi \rho d\varphi + \mathbf{n}_z dz.$$

Следовательно, кинетическая энергия точки имеет вид

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2), \quad (1)$$

а частные производные, необходимые для получения обобщенных сил, соответственно равны

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \mathbf{n}_\rho, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \rho \mathbf{n}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{n}_z.$$

Используя эти выражения, найдем (см. (5.41))

$$Q_\rho = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = F_\rho, \quad Q_\varphi = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \rho F_\varphi, \quad Q_z = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = F_z, \quad (2)$$

где F_ρ , F_φ , F_z — проекции силы \mathbf{F} на цилиндрические орты. Таким образом, обобщенные силы Q_ρ и Q_z являются проекциями силы \mathbf{F} на координатные оси (ρ) и (z), а обобщенная сила Q_φ равна L_z — проекции момента силы на ось (z).

Подставляя (1) и (2) в (5.44), найдем *уравнения движения точки в цилиндрических координатах*:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = F_\rho, \quad m \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = \rho F_\varphi, \quad m\ddot{z} = F_z. \quad (3)$$

По определению сферических координат приращение радиуса-вектора свободной точки равно

$$d\mathbf{r} = \mathbf{n}_\rho dr + \mathbf{n}_\theta r d\theta + \mathbf{n}_\varphi r \sin \theta d\varphi.$$

Следовательно, кинетическая энергия в сферических координатах имеет вид

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2); \quad (4)$$

нетрудно также получить

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{n}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r\mathbf{n}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r \sin \theta \cdot \mathbf{n}_\varphi.$$

Используя эти частные производные, найдем обобщенные силы

$$Q_r = F_r, \quad Q_\theta = rF_\theta, \quad Q_\varphi = r \sin \theta \cdot F_\varphi, \quad (5)$$

где F_r , F_θ , F_φ — проекции заданной силы \mathbf{F} на сферические орты. Подставляя (4) и (5) в уравнения (5.44), где в качестве независимых координат взяты r , θ и φ , получим *уравнения движения точки в сферических координатах*:

$$\begin{aligned} m\{\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2)\} &= F_r, \\ m\left\{\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2\right\} &= rF_\theta, \\ m \frac{d}{dt}(r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}) &= r \sin \theta \cdot F_\varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда легко найти проекции ускорения точки на орты сферических координат:

$$\begin{aligned} \omega_r &= \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2), \\ \omega_\theta &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2, \\ \omega_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt}(r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}). \end{aligned} \quad (7)$$

§ 5.5. Структура уравнений движения в независимых координатах и функция Лагранжа

В предыдущем параграфе было выяснено, насколько важен выбор независимых обобщенных координат при составлении уравнений Лагранжа. В свою очередь, вопрос о выборе координат требует более тщательного изучения структуры этих уравнений. С этой целью прежде всего рассмотрим структуру кинетической энергии.

Кинетическая энергия является однородной положительно-определенной квадратичной формой от скоростей точек. Положительная определенность этой формы означает, что $T > 0$ при любых значениях проекций скоростей, одновременно не равных нулю, а $T = 0$ только в том случае, если все $\mathbf{v}_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$) (о свойствах квадратичных форм см. [48, гл. 1, § 4—7]). Однако кинетическая энергия как функция обобщенных скоростей в общем случае будет неоднородной квадратичной формой. Убедимся в этом непосредственно, подставляя в кинетическую энергию скорости точек, выраженные через обобщенные переменные, т. е. подставляя

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Изменяя порядок суммирования, найдем, что

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)}, \quad (5.55)$$

где $T^{(2)}$, $T^{(1)}$ и $T^{(0)}$ являются однородными формами соответственно второй, первой и нулевой степени относительно обобщенных скоростей:

$$\begin{aligned} T^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad \text{где } a_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}, \\ T^{(1)} &= \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j, \quad \text{где } a_j = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \\ T^{(0)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Как видно, все коэффициенты a_{jk} , a_j и форма нулевой степени $T^{(0)}$ зависят только от обобщенных координат и времени, а неоднородность кинетической энергии как функции обобщенных скоро-

стей имеет место только в том случае, если преобразование (5.28) явно зависит от времени (например, в случае системы с нестационарными связями). Если же преобразование (5.28) подчиняется условиям

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (5.57)$$

то кинетическая энергия будет однородной формой обобщенных скоростей, т. е. $T = T^{(2)}$. Условия (5.57) выполняются, в частности, для случая стационарных связей.

Рассматривая свойства $T^{(2)}$, прежде всего заметим, что все коэффициенты a_{jk} симметричны по индексам, т. е.

$$a_{jk} = a_{kj} \quad (j, k = 1, 2, \dots, s). \quad (5.58)$$

Далее можно убедиться, что $T^{(2)}$ является положительно-определенной формой обобщенных скоростей. Положительная определенность $T^{(2)}$ относительно \dot{q} означает, что $T^{(2)} \geq 0$, причем $T^{(2)} = 0$ только в том случае, если все $\dot{q}_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$).

Для доказательства этого утверждения запишем $T^{(2)}$ в виде

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2.$$

Отсюда следует, что $T^{(2)}$ является положительно-определенной формой относительно сумм

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Иначе говоря, при любых значениях этих сумм $T^{(2)} \geq 0$, причем $T^{(2)} = 0$ только в том случае, если все эти суммы равны нулю:

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (5.59)$$

Матрица, составленная из коэффициентов вида $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$, представляет собой функциональную матрицу системы функций (5.28). Согласно предположению о независимости s этих функций (см. (5.29)) ранг этой матрицы равен s . Если же ранг матрицы равен числу неизвестных в линейной однородной системе (5.59), то нулевое решение такой системы является единственным [47, с. 83]. Таким образом, $T^{(2)}$ действительно обращается в нуль

только в случае, когда все $\dot{q}_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$). С другой стороны, если хотя бы одна из этих скоростей отлична от нуля, то $T^{(2)} > 0$. Итак, форма $T^{(2)}$ является положительно-определенной формой от обобщенных скоростей. Следовательно, детерминант, составленный из ее коэффициентов, отличен от нуля [48, гл. 1, § 6, теорема 3]:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5.60)$$

Основываясь на этом свойстве, можно убедиться, что уравнения Лагранжа (5.44) однозначно определяют движение механической системы, если заданы начальные значения обобщенных координат и скоростей. Действительно, из (5.55) и (5.56) найдем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s a_{jk} \dot{q}_k + a_j \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (5.61)$$

откуда следует, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{k=1}^s a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^s \dot{a}_{jk} \dot{q}_k + \dot{a}_j \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (5.62)$$

(величины вида \ddot{q} называются обобщенными ускорениями). С другой стороны, члены $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ не зависят от обобщенных ускорений, не зависят от них и обобщенные силы, так как все заданные силы F_i являются функциями только положений, скоростей точек и времени. Поэтому уравнения (5.44) представляют собой систему

$$\sum_{k=1}^s a_{jk} \ddot{q}_k = \tilde{Q}_j(q, \dot{q}, t) \quad (j = 1, 2, \dots, s),$$

которую в силу (5.60) можно разрешить относительно ускорений \ddot{q} и представить в виде

$$\ddot{q}_j = \tilde{\tilde{Q}}_j(q, \dot{q}, t) \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (5.63)$$

На основании известной теоремы из теории обыкновенных дифференциальных уравнений [46, с. 86] система (5.63) с заданными функциями $\tilde{\tilde{Q}}_j(q, \dot{q}, t)$ имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$q_j = q_{j0}, \quad \dot{q}_j = \dot{q}_{j0} \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Переходя к изучению структуры обобщенных сил, вспомним, что эти силы согласно (5.41) определяются известными векторными силами, а в случае потенциальных сил — потенциальной энергией или потенциалом \mathcal{U} как функцией положения точек и времени.

Рассмотрим обобщенно-потенциальные силы, которые могут быть заданы с помощью скалярной функции \mathcal{U} , зависящей не только от положений точек и времени, но и от скоростей точек (такая функция называется обобщенным потенциалом). Например, сила Лоренца, с которой электромагнитное поле действует на движущийся заряд, является обобщенно-потенциальной и, как будет показано ниже, может быть представлена в виде

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{r}}, \quad (5.64)$$

где

$$\mathcal{U} = -\frac{e}{c} \mathbf{A} \dot{\mathbf{r}} + e\varphi, \quad (5.65)$$

а \mathbf{A} и φ — векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля, заданные как функции точки пространства и времени и определяющие напряженности поля [40, с. 431]:

$$\mathcal{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathcal{H} = [\nabla \mathbf{A}]; \quad (5.66)$$

в формуле (5.64) символом $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ обозначен градиент, а символом $\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}}$ — дифференциальный оператор

$$\mathbf{n}_x \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \mathbf{n}_y \frac{\partial}{\partial \dot{y}} + \mathbf{n}_z \frac{\partial}{\partial \dot{z}}.$$

Подставляя (5.65) в (5.64), получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{e}{c} \dot{\mathbf{A}} + \frac{e}{c} \nabla(\mathbf{A} \dot{\mathbf{r}}) - e \nabla \varphi. \quad (5.67)$$

Затем, используя полную производную векторного потенциала по времени

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{r}} \nabla) \mathbf{A} \quad (5.68)$$

(здесь к вектору \mathbf{A} применяется оператор — скалярное произведение $\dot{\mathbf{r}} \nabla$), убедимся, что правая часть равенства (5.67) имеет вид

$$e \left\{ -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right\} + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}} [\nabla \mathbf{A}]]. \quad (5.69)$$

Наконец, подставляя сюда (5.66), придем к известному выражению силы Лоренца. Эта сила складывается из потенциальной силы $-e\nabla\varphi$, непотенциальной силы $-\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, зависящей от положения и времени, а также из гироскопической силы $\frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathcal{H}]$.

Обобщенные силы, соответствующие силе вида (5.64), всегда можно представить в форме

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j}. \quad (5.70)$$

Действительно, пользуясь (5.64) и определением обобщенной силы, получим

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}. \quad (5.71)$$

Затем, учитывая, что $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_j}$, (5.71) можно привести к виду

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}. \quad (5.72)$$

Отсюда, принимая во внимание очевидные равенства

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_j}; \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}, \quad (5.73)$$

убеждаемся в справедливости (5.70).

Обобщенный потенциал, определяющий силы вида (5.70), должен быть линейной формой относительно скоростей точек (в противном случае мы получим силы, зависящие от ускорений). Например, обобщенный потенциал системы зарядов во внешних электромагнитных полях согласно (5.65) имеет вид

$$\mathcal{U} = - \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{c} \mathbf{A}_i \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^N e_i \varphi_i. \quad (5.74)$$

Выражая здесь скорости точек и их радиусы-векторы через обобщенные переменные (см. (5.28) и (5.34)), получим, что

$$\dot{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{(1)} + \mathcal{U}^{(0)}, \quad (5.75)$$

где $\mathcal{U}^{(1)} = \sum_{j=1}^s U_j \dot{q}_j$ — линейная однородная форма обобщенных скоростей, $\mathcal{U}^{(0)}$ — форма нулевой степени (U_j и $\mathcal{U}^{(0)}$ являются функциями только координат и времени). Нетрудно убедиться, что силы Q_j , соответствующие обобщенному потенциалу (5.75), равны:

$$Q_i = - \frac{\partial \mathcal{U}^{(0)}}{\partial q_j} + \frac{\partial U_j}{\partial t} - \sum_{k=1}^s \gamma_{jk} \dot{q}_k, \quad (5.76)$$

где $\gamma_{jk} = \frac{\partial U_k}{\partial q_j} - \frac{\partial U_j}{\partial q_k}$ — коэффициенты, антисимметричные по индексам. Отсюда видно, что гироскопическая часть обобщенной силы может быть задана с помощью антисимметричной матрицы (см. определение гироскопической силы на с. 70).

При наличии обобщенно-потенциальных и диссипативных сил уравнения Лагранжа в независимых координатах можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^d \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (5.77)$$

где $\mathcal{L} = T - \mathcal{U}$ — разность кинетической энергии и обобщенного потенциала, а Q_j^d — обобщенные диссипативные силы. Подчеркнем, что \mathcal{L} и все Q_j^d являются функциями обобщенных координат и обобщенных скоростей. Функция \mathcal{L} называется функцией Лагранжа, или лагранжианом. Она является неоднородной квадратичной формой относительно обобщенных скоростей (см. (5.55) и (5.75))

$$\mathcal{L} = T^{(2)} + (T^{(1)} - \mathcal{U}^{(1)}) + (T^{(0)} - \mathcal{U}^{(0)}). \quad (5.78)$$

Когда диссипативные силы линейно зависят от скоростей точек, они также могут быть выражены через скалярную функцию. В самом деле, если

$$\mathbf{F}_i^d = -k_i \dot{\mathbf{r}}_i, \quad k_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (5.79)$$

то, подставляя (5.79) в определение

$$Q_i^d = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^d \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

и используя равенства $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$, получим

$$Q_j^d = - \frac{\partial D}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (5.80)$$

где $D = \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{2} (\dot{\mathbf{r}}_i)^2$ — диссипативная функция Рэлея.

Структура этой функции аналогична структуре кинетической энергии, так как формально диссипативная функция может быть получена из кинетической энергии заменой каждой массы m_i на соответствующий коэффициент k_i . Производя такую замену, из (5.55) и (5.56) найдем

$$D = D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(0)}, \quad (5.81)$$

где

$$D^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad b_{jk} = \sum_{i=1}^N k_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k};$$

$$D^{(1)} = \sum_{j=1}^s b_j \dot{q}_j, \quad b_j = \sum_{i=1}^N k_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t},$$

$$D^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

(здесь все коэффициенты b_{jh} симметричны относительно перестановок индексов).

Пример 5.8. Теорема Лармора.

Пусть электрон (заряда e и массы m) движется в электростатическом поле ядра (порядковый номер ядра равен Z , его масса значительно больше массы электрона, а начальная скорость ядра равна нулю). Эта система помещается в достаточно слабое однородное и постоянное магнитное поле напряженности \mathcal{H} . Показать, что при этом орбита электрона будет прецессировать вокруг оси, параллельной напряженности \mathcal{H} с угловой скоростью, равной частоте Лармора $\omega = \frac{|e|\mathcal{H}}{2mc}$.

Поскольку масса ядра значительно больше массы электрона, введем систему отсчета с началом в ядре (эта система отсчета будет весьма близка к инерциальной — см. замечание на с. 194). Ось Oz направим вдоль вектора \mathcal{H} ; тогда, используя цилиндрические координаты, получим уравнение для определения вектор-потенциала \mathbf{A} (см. (5.66)):

$$\mathcal{H} \mathbf{n}_z = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{n}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{n}_\varphi +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{n}_z.$$

Полагая здесь, что $A_\rho = A_z = 0$ и что проекция A_φ не зависит от z , найдем

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi)$$

и, следовательно,

$$A_\varphi = \frac{\mathcal{H}}{2} \rho$$

(определение A по заданной напряженности \mathcal{H} неоднозначно, однако эта неоднозначность не сказывается на значении силы, так как сила зависит от напряженности \mathcal{H}).

Таким образом, обобщенный потенциал рассматриваемых полей равен (см. (5.65))

$$\mathcal{U} = - \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho^2 \dot{\varphi} + U,$$

где $U = - \frac{Ze^2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$ — потенциал электростатического поля. Используя это выражение \mathcal{U} , получим лагранжиан заряда

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{|e|\mathcal{H}}{2c} \rho^2 \dot{\varphi} - U. \quad (1)$$

Чтобы убедиться в справедливости теоремы Лармора, введем вращающуюся с угловой скоростью ω систему отсчета с началом в ядре и перейдем от переменных ρ, φ, z к переменным ρ, α, z , где $\alpha = \varphi - \omega t$. Функция Лагранжа в новых переменных будет равна

$$\mathcal{L}' = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m}{2} \rho^2 \omega^2 - U.$$

Так как по условию напряженность магнитного поля мала, то, пренебрегая членом, пропорциональным ω^2 , получим

$$\mathcal{L}' \approx \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2) - U. \quad (2)$$

С другой стороны, функция (1) в отсутствие магнитного поля равна

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}=0} = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U. \quad (3)$$

Совпадение вида функций (2) и (3) говорит о том, что при наличии магнитного поля электрон движется относительно системы, вращающейся с частотой Лармора, так же, как он движется в отсутствие магнитного поля относительно инерциальной систе-

мы. Это свидетельствует о прецессии орбиты электрона с угловой скоростью ω .

§ 5.6. Законы сохранения обобщенного импульса и обобщенной энергии

В главе II были рассмотрены законы сохранения импульса, кинетического момента и энергии, вытекающие из уравнений Ньютона; соответственно законы сохранения обобщенного импульса и обобщенной энергии являются следствием уравнений Лагранжа.

Запишем уравнения (5.77) в виде

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + Q_j^d \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (5.82)$$

где величина $p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ называется обобщенным импульсом, соответствующим координате q_j . Из (5.82) следует, что обобщенный импульс p_j сохраняется, если функция Лагранжа явно от координаты q_j не зависит и если соответствующая этой координате диссипативная обобщенная сила равна нулю. Таким образом,

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = p_{j0}, \quad (5.83)$$

если $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$ и $Q_j^d = 0$. Если же все диссипативные силы равны нулю, то закон (5.83) сохранения обобщенного импульса принимает вид

$$p_j = p_{j0}, \quad \text{если} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0. \quad (5.84)$$

Приведем ряд небольших примеров. Функция Лагранжа для пространственного осциллятора в декартовых координатах имеет вид (см. (2.46))

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{m\dot{z}^2}{2} - \frac{\kappa}{2}(x^2 + y^2 + z^2),$$

а обобщенные импульсы

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

являются декартовыми проекциями импульса точки. Ни одна из координат x , y , z в данном случае не является циклической, соот-

ответственно ни один из обобщенных импульсов p_x, p_y, p_z не сохраняется.

Теперь запишем лагранжиан пространственного осциллятора в сферических координатах (см. формулу (4) в примере 5.7):

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) - \frac{\kappa}{2} r^2.$$

Обобщенными импульсами точки в этих координатах являются

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi},$$

причем обобщенный импульс p_φ равен M_z — проекции момента импульса точки на ось Oz . Поскольку координата φ циклическая, то p_φ сохраняется, т. е.

$$mr^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} = p_{\varphi_0}.$$

Лагранжиан циклоидального маятника равен (см. пример 5.4)

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{s}^2 - \frac{mg}{8R} s^2;$$

здесь координата s нециклическая и обобщенный импульс

$$p_s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}$$

не сохраняется.

Наконец, возьмем заряд, движущийся в электростатическом поле неподвижного ядра и постоянном однородном магнитном поле (см. пример 5.8). В этом случае координаты ρ и z не циклические, а φ — циклическая. Поэтому закон сохранения (5.84) приводит к интегралу

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 (\dot{\varphi} - \omega) = p_{\varphi_0}.$$

Установим структуру обобщенного импульса в общем случае. Принимая во внимание определение обобщенного импульса и форму лагранжиана (5.78), находим

$$p_j = \sum_{k=1}^s a_{jk} \dot{q}_k + a_j - U_j, \quad (5.85)$$

где a_{jk}, a_j — коэффициенты однородных форм $T^{(2)}$ и $T^{(1)}$ кинетической энергии, U_j — коэффициенты однородной формы $\mathcal{U}^{(1)}$ обобщенного потенциала. Отсюда видно, что *обобщенные им-*

пульсы являются неоднородными линейными формами обобщенных скоростей.

Закон изменения обобщенной энергии получим из уравнений Лагранжа в независимых координатах аналогично тому, как из уравнений Ньютона был получен закон изменения энергии (2.132). Умножая каждое из уравнений (5.77) на соответствующую обобщенную скорость \dot{q}_j и складывая полученные выражения по всем степеням свободы, найдем

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right\} \dot{q}_j = \sum_{i=1}^s Q_i^d \dot{q}_i. \quad (5.86)$$

Как оказывается, в этом уравнении можно выделить полную производную по времени от такой функции, которая в частном случае будет совпадать с энергией системы. Действительно, используя очевидное соотношение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j, \quad (5.87)$$

представим левую часть уравнения (5.86) в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right). \quad (5.88)$$

Затем, учитывая, что функция Лагранжа является функцией обобщенных координат, скоростей и времени и, следовательно, ее полная производная по времени равна

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \quad (5.89)$$

вместо (5.86) получим уравнение

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_{i=1}^s Q_i^d \dot{q}_i, \quad (5.90)$$

где

$$H = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L}. \quad (5.91)$$

Эту функцию обобщенных координат, скоростей и времени будем называть обобщенной энергией системы, а уравнение (5.90) — *законом изменения обобщенной энергии*.

Функция H в частном случае совпадает с полной энергией системы E , в чем можно убедиться, рассматривая структуру H . В самом деле, используя (5.85), а также (5.56) и (5.75), найдем, что

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T^{(2)} + T^{(1)} - \mathcal{U}^{(1)}.$$

Подставляя это выражение в (5.91) и учитывая структуру лагранжиана (см. (5.78)), получим

$$H = T^{(2)} - T^{(0)} + \mathcal{U}^{(0)}. \quad (5.92)$$

Отсюда видно, что *обобщенная энергия не содержит линейных форм обобщенных скоростей*, в то время как полная энергия включает в себя форму $T^{(1)}$ (см. (2.130), (5.55))

$$E = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} + U \quad (5.93)$$

(здесь U — обычная потенциальная энергия).

Из сравнения (5.92) и (5.93) следует, что *обобщенная энергия системы и ее полная энергия совпадают в тех случаях, когда радиусы-векторы точек системы как функции независимых координат явно от времени не зависят*, поскольку в этом случае $T = T^{(2)}$ ($T^{(1)} = T^{(0)} = 0$), а $\mathcal{U}^{(0)} = U$; в частности, это имеет место для систем со стационарными связями ($\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$).

Закон сохранения обобщенной энергии непосредственно вытекает из уравнения (5.90): *обобщенная энергия системы сохраняется, если функция Лагранжа явно от времени не зависит, а диссипативные силы отсутствуют*, т. е.

$$H = T^{(2)} - T^{(0)} + \mathcal{U}^{(0)} = H_0 \quad (5.94)$$

при условии, что $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ и $Q_j^d = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$). Первое из

этих условий не обязательно связано с условием $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

Может случиться, что $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$), а $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$; тогда в

отсутствие диссипативных сил уравнение (5.90) приводит к *интегралу движения, не совпадающему с интегралом энергии*. Если же наряду с условиями сохранения обобщенной энергии выполняются требования $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$), то законы сохранения обобщенной и полной энергий системы совпадают, т. е. $H = E = E_0$.

В заключение отметим достаточно распространенный случай механической системы со стационарными связями и диссипа-

тивными силами, линейными относительно скоростей точек. Для такой системы мощность обобщенных диссипативных сил равна (см. (5.80) и (5.81))

$$\sum_{j=1}^s Q_j^d \dot{q}_j = -2D^{(2)}. \quad (5.95)$$

Учитывая, что кинетическая энергия системы со стационарными связями явно от времени не зависит, из уравнения (5.90) найдем

$$\dot{E} = \frac{\partial U}{\partial t} - 2D^{(2)}. \quad (5.96)$$

Пример 5.9. Сферический маятник.

Точка массы m движется в однородном поле тяжести напряженности \mathbf{g} по гладкой неподвижной и твердой сфере радиуса l , причем диссипативными силами можно пренебречь. Найти общее решение в независимых координатах.

Учитывая однородность поля тяжести и сферическую симметрию связи, совместим начало координат с центром сферы, ось Oz направим вдоль вектора \mathbf{g} , а за независимые координаты возьмем сферические углы θ и φ (рис. 5.1). Тогда функцию Лагранжа можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) + mgl \cos \theta.$$

Отсюда следует, что координата φ является циклической, а $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, т. е. имеют место два интеграла движения (см. (5.84) и (5.94))

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} = M_{z0},$$

$$H = E = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) - mgl \cos \theta = E_0.$$

С помощью этих интегралов решение задачи можно довести до квадратур. В самом деле, из интеграла момента следует, что

$$\dot{\varphi} = \frac{M_{z0}}{ml^2} \frac{1}{\sin^2 \theta}. \quad (1)$$

Подставляя это выражение в интеграл энергии, получим

$$\frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{M_{z0}^2}{2ml^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} - mgl \cos \theta = E_0, \quad (2)$$

откуда найдем закон движения точки по траектории в виде

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2} (E_0 - U_{\text{eff}})}} + \text{const}, \quad (3)$$

где

$$U_{\text{eff}} = \frac{M_{z0}^2}{2ml^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} - mgl \cos \theta.$$

Исключая из уравнения (2) элемент времени

$$dt = \frac{ml^2}{M_{z0}} \sin^2 \theta d\varphi,$$

получим уравнение траектории *

$$\varphi = \int \frac{M_{z0} d\theta}{ml^2 \sin^2 \theta \sqrt{\frac{2}{ml^2} (E_0 - U_{\text{eff}})}} + \text{const}. \quad (4)$$

Область изменения координаты θ определяется неравенством $E_0 \geq U_{\text{eff}}(\theta)$, аналогичным неравенству (2.64). При этом граничные значения координаты θ можно найти, используя уравнение $E_0 = U_{\text{eff}}(\theta)$, которое в случае $M_{z0} \neq 0$ является уравнением третьей степени относительно $\cos \theta$ (рис. 5.7). Функция $U_{\text{eff}}(\theta)$ принимает бесконечные значения в точках 0 и π , а при $\theta = \pi/2$ равна $(M_{z0}^2/2ml^2) > 0$; минимум этой функции достигается в точке $\theta = \theta_{\text{eq}}$, определяемой из уравнения

$$\frac{\cos \theta_{\text{eq}}}{\sin^4 \theta_{\text{eq}}} = \frac{m^2 g l^3}{M_{z0}^2}. \quad (5)$$

Из графика видно, что область изменения угла θ ограничена значениями θ_{min} и θ_{max} , причем

$$0 < \theta_{\text{min}} \leq \theta \leq \theta_{\text{max}} < \pi. \quad (6)$$

Это означает, что траектория точки расположена на поверхности сферы между двумя горизонтальными плоскостями, пересекающими сферу, а угловая скорость $\dot{\varphi}$ изменяется в конечных пределах (см. (1)).

Обобщенное ускорение $\ddot{\theta}$ положительно, если $\theta < \theta_{\text{eq}}$, отрицательно, если $\theta > \theta_{\text{eq}}$, и равно нулю, если $\theta = \theta_{\text{eq}}$. Это вытекает из уравнения Лагранжа, соответствующего углу θ и записанного с помощью (1) в виде

* Квадратуры $t(\theta)$ и $\varphi(\theta)$ сводятся к эллиптическим интегралам, которые подробно исследованы, например, в [8, т. 1, с. 433].

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{M_{z0}^2}{m^2 l^4} \frac{\cos \theta}{\sin^4 \theta} - \frac{g}{l} \right) \sin \theta. \quad (7)$$

Для вычисления реакции сферы воспользуемся тем, что реакция направлена по нормали к сфере. Проектируя обе части уравнения Лагранжа первого рода на орт \mathbf{n}_r , найдем

$$m\omega_r = mg \cos \theta + R_r. \quad (8)$$

Проекцию ω_r ускорения сферического маятника определим с помощью формулы (7) примера 5.7 при $r=l$. Тогда из уравнения (8) получим (см. (1) и (2))

$$R_r = -\frac{2}{l} E_0 - 3mg \cos \theta. \quad (9)$$

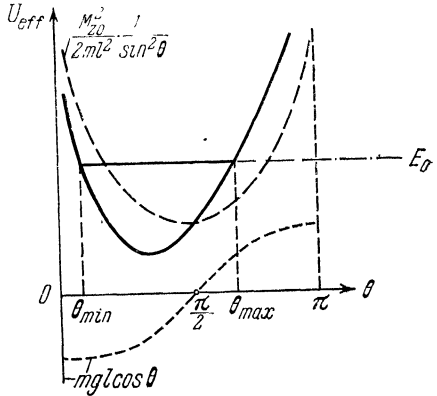


Рис. 5.7

Рассмотрим частный случай, когда $\theta_{\max} = \pi/2$, а в начальный момент времени угол θ_0 наклона маятника по отношению к вертикали равен θ_{\max} . Тогда под действием силы тяжести маятник начнет опускаться; соответственно угловая скорость маятника будет возрастать, кинетическая энергия увеличиваться, а потенциальная убывать. Одновременно возрастет реакция сферы, причем у реакции появится вертикальная составляющая. Это в конце концов приводит к подъему маятника, который сопровождается уменьшением кинетической энергии, угловой скорости и реакции сферы, а также увеличением потенциальной энергии.

Рассмотрим еще один частный случай, когда начальные условия подобраны так, что $E_0 = (U_{\text{eff}})_{\min}$, т. е. прямая E_0 и кривая $U_{\text{eff}}(\theta)$ пересекаются в одной точке, которой соответствует постоянный угол $\theta_{\min} = \theta = \theta_{\max}$ (см. рис. 5.7). Учитывая это, из закона сохранения энергии, записанного в виде

$$v^2 = \frac{2}{m} (E_0 + mgl \cos \theta),$$

найдем (см. (2) и (5))

$$v^2 = v_0^2 = gl \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0}. \quad (10)$$

Отсюда

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 = \frac{g}{l \cos \theta_0}.$$

Итак, если начальная скорость точки направлена по горизонтальной касательной к сфере, а величина начальной скорости определяется формулой (10), то точка будет двигаться по горизонтальной окружности радиуса $\rho_0 = l \sin \theta_0$.

Пример 5.10. Точка на вращающейся прямой.

Достаточно малое тело массы m движется в однородном поле тяжести по гладкому абсолютно твердому стержню, который вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через закрепленную точку O стержня. Угол между стержнем и вертикалью постоянен и равен θ_0 . Найти общее решение в независимых координатах.

В качестве независимой координаты выберем r — расстояние материальной точки от точки O (рис. 5.8), а уравнения связи запишем в виде $\theta = \theta_0$, $\varphi = \omega t$; тогда

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta_0 \cdot r^2) - mg \cos \theta_0 \cdot r.$$

Интегрируя уравнение Лагранжа

$$\ddot{r} - \omega^2 \sin^2 \theta_0 \cdot r = -g \cos \theta_0,$$

получим общее решение

$$r = \left(r_0 - \frac{g \cos \theta_0}{\omega^2 \sin^2 \theta_0} \right) \operatorname{ch}(\omega \sin \theta_0 \cdot t) + \frac{\dot{r}_0}{\omega \sin \theta_0} \operatorname{sh}(\omega \sin \theta_0 \cdot t) + \frac{g \cos \theta_0}{\omega^2 \sin^2 \theta_0}.$$

Анализ этого решения облегчается, если воспользоваться интегралом обобщенной энергии (см. (5.94))

$$\begin{aligned} H &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 \sin^2 \theta_0 \cdot r^2 + mg \cos \theta_0 \cdot r = \\ &= H_0 = \frac{m}{2} \dot{r}_0^2 - \frac{m}{2} \omega^2 \sin^2 \theta_0 \cdot r_0^2 + mg \cos \theta_0 \cdot r_0. \end{aligned}$$

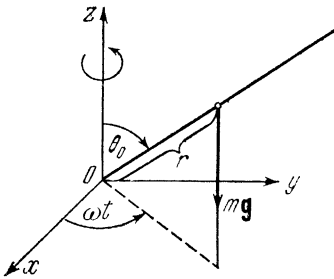


Рис. 5.8

Переписывая его в виде

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 = H_0 - U_{\text{eff}}(r),$$

где

$$U_{\text{eff}}(r) = mg \cos \theta_0 \cdot r - \frac{m}{2} \omega^2 \sin^2 \theta_0 \cdot r^2,$$

найдем, что область изменения координаты r определяется требованием

$$H_0 \geq U_{\text{eff}}(r).$$

Если $\theta_0 < \pi/2$ (рис. 5.9), то U_{eff} имеет максимальное значение, равное

$$(U_{\text{eff}})_{\text{max}} = \frac{m}{2} \left(\frac{g \cos \theta_0}{\omega \sin \theta_0} \right)^2,$$

в связи с чем можно рассмотреть три случая:

$$H_0 > (U_{\text{eff}})_{\text{max}},$$

$$H_0 < (U_{\text{eff}})_{\text{max}}, \quad H_0 < 0.$$

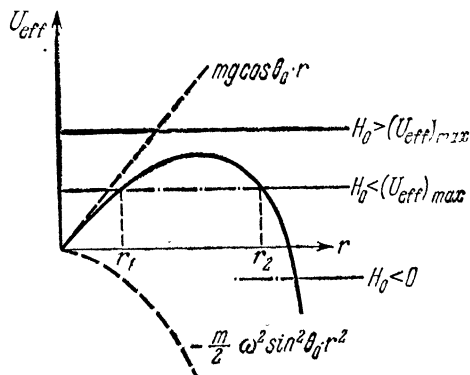


Рис. 5.9

В первом случае движение может происходить в неограниченной области; осуществляется этот случай, если начальная радиальная скорость удовлетворяет условию, которое вытекает из неравенства $H_0 > (U_{\text{eff}})_{\text{max}}$:

$$\dot{r}_0^2 > \left(\omega \sin \theta_0 \cdot r_0 - \frac{g \cos \theta_0}{\omega \sin \theta_0} \right)^2.$$

Во втором случае движение возможно в двух областях

$$0 \leq r \leq r_1, \quad r_2 \leq r < \infty.$$

Границы этих областей определяются корнями

$$r_{1,2} = \frac{g \cos \theta_0}{\omega^2 \sin^2 \theta_0} \mp \left\{ \left(\frac{g \cos \theta_0}{\omega^2 \sin^2 \theta_0} \right)^2 - \frac{2H_0}{m\omega^2 \sin^2 \theta_0} \right\}^{1/2}$$

квадратного уравнения

$$H_0 = U_{\text{eff}} = mg \cos \theta_0 \cdot r - \frac{m}{2} \omega^2 \sin^2 \theta_0 \cdot r^2.$$

Этот случай осуществляется, если начальная радиальная скорость сравнительно мала,

$$\dot{r}_0^2 < \left(\omega \sin \theta_0 \cdot r_0 - \frac{g \cos \theta_0}{\omega \sin \theta_0} \right)^2.$$

В третьем случае область изменения r ограничена снизу: $r_2 \leq r \leq \infty$, а начальные условия должны удовлетворять неравенству

$$\dot{r}_0^2 < \omega^2 \sin^2 \theta_0 \cdot r_0^2 - 2g \cos \theta_0 \cdot r_0 \quad (H_0 < 0).$$

Если $\theta_0 \geq \pi/2$, то, рассматривая соответствующий график U_{eff} , легко прийти к выводу об инфинитности движения точки в областях: $0 \leq r \leq \infty$ ($H_0 > 0$), $r_{\text{min}} \leq r \leq \infty$ ($H_0 < 0$).

Пример 5.11. Движение заряда вблизи магнитного полюса.

Точка массы m и заряда e движется около одного из полюсов длинного магнитного стержня. Найти закон движения заряда.

Напряженность магнитного поля в рассматриваемом случае равна (в сферических координатах)

$$\mathcal{H} = \frac{\mu}{r^2} \mathbf{n}_r, \quad (1)$$

где постоянная μ — так называемый «магнитный заряд», а начало координат помещено в полюсе магнита. Кинетическая энергия точки в сферических координатах явно не содержит только угол φ . Поэтому попытаемся выбрать вектор-потенциал \mathbf{A} магнитного поля так, чтобы он тоже не зависел от φ . С этой целью запишем соотношение $\mathcal{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ в сферических координатах с учетом (1):

$$\mathcal{H}_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \cdot A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\theta) \right] = \frac{\mu}{r^2}, \quad (2)$$

$$\mathcal{H}_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (A_r) - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \cdot A_\varphi) \right] = 0, \quad (3)$$

$$\mathcal{H}_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (A_r) \right] = 0. \quad (4)$$

Отсюда видно, что можно положить $A_r = A_\theta = 0$, $r A_\varphi = f(\theta)$. Тогда отличная от нуля компонента вектор-потенциала равна

$$A_\varphi = -\frac{\mu}{r} \text{ctg } \theta. \quad (5)$$

Учитывая (5), найдем лагранжиан заряда (см. (5.65))

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) - \frac{e\mu}{c} \cos \theta \cdot \dot{\varphi}. \quad (6)$$

Поскольку $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$ и $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, получим (см. (5.84) и (5.94)):

$$p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} - \frac{e\mu}{c} \cos \theta = p_{\varphi_0}, \quad (7)$$

$$H = T^{(2)} = T_0. \quad (8)$$

Теперь запишем (7) в виде

$$M_z - \frac{e\mu}{c} (\mathbf{n}_r)_z = \text{const} \quad (9)$$

и обратим внимание на то, что интеграл (9) имеет место при любом направлении оси Oz . Это возможно только в том случае, если

$$\mathbf{M} - \frac{e\mu}{c} \mathbf{n}_r = \mathbf{C}, \quad (10)$$

где \mathbf{C} — постоянный вектор, зависящий от начальных условий. Направим ось Oz по этому вектору и умножим затем обе части (10) скалярно на \mathbf{n}_r . Тогда, поскольку $\mathbf{M}\mathbf{n}_r = 0$,

$$-\frac{e\mu}{c} = C \cos \theta. \quad (11)$$

Таким образом, $\theta = \theta_0$ и, следовательно, заряд движется по поверхности конуса с осью, направленной по вектору \mathbf{C} . При этом интегралы (7) и (8) ввиду $\dot{\theta} = 0$ упрощаются и принимают вид

$$r^2 \dot{\varphi} = r_0^2 \dot{\varphi}_0, \quad (12)$$

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta_0 = \dot{r}_0^2 + r_0^2 \dot{\varphi}_0^2 \sin^2 \theta_0. \quad (13)$$

Интегрирование этой системы приводит к закону движения

$$r^2 = v^2 (t - t_0)^2 + a^2 \quad (14)$$

и уравнению траектории (на поверхности конуса)

$$\frac{a}{r} = \cos [(\varphi - \varphi_0) \sin \theta_0] \quad (15)$$

(постоянные v и a могут быть выражены через начальные условия, а момент времени t_0 является моментом, когда заряд находится на минимальном расстоянии от полюса). Итак, заряд движется по спирали (15), навивающейся на поверхность конуса $\theta = \theta_0$ согласно закону движения (14).

§ 5.7. Ковариантность уравнений Лагранжа в независимых координатах

Уравнения Лагранжа (5.44) в независимых координатах были получены из общего уравнения механики (5.27), с помощью преобразования (5.28), представляющего собой преобразование от радиусов-векторов \mathbf{r}_i всех точек к обобщенным независимым координатам q . Однако выбор этих координат неоднозначен: в самом деле, координаты q всегда можно задать с помощью произвольных однозначных функций других s переменных q' и времени

$$q_j = q_j(q'_1, \dots, q'_s, t) \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (5.97)$$

Подставляя (5.97) в (5.28), найдем однозначные выражения радиусов-векторов точек через величины q' :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q'_1, \dots, q'_s, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (5.98)$$

Эти функции, как и функции (5.28), обращают в тождество уравнения связей (см. (5.30)), и, следовательно, величины q' также являются обобщенными координатами механической системы. Преобразование (5.97), т. е. преобразование от одной системы обобщенных координат к другой системе, называется *точечным преобразованием*.

Если исходить из общего уравнения механики (5.27), а в качестве независимых переменных взять координаты q' , то, используя (5.98) и проводя вычисления, аналогичные (5.31)—(5.43), получим уравнения Лагранжа в новых переменных

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}'_j} \right) - \frac{\partial T'}{\partial q'_j} = Q'_j \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (5.99)$$

где кинетическая энергия T' и обобщенные силы Q' являются функциями q' , \dot{q}' и t . Сопоставляя уравнения (5.44) и (5.99), приходим к выводу, что *общая форма уравнений Лагранжа в независимых координатах не зависит от выбора этих координат; другими словами, уравнения Лагранжа в независимых координатах ковариантны относительно точечных преобразований*. Это свойство уравнений Лагранжа является отражением того, что при любом выборе независимых переменных между обобщенными координатами, скоростями и ускорениями существует взаимосвязь.

Точечные преобразования независимых координат включают в себя ряд важных случаев; например, для свободных систем точечные преобразования могут представлять собой преобразования между различными криволинейными координатами в данной системе отсчета, а также преобразования между координатами в различных системах отсчета, в том числе и в неинерциальных.

Убедимся в этом, показав, что уравнения движения свободной точки относительно неинерциальной системы отсчета можно записать в форме уравнений Лагранжа.

Действительно, поступательная и центробежная части переносной силы инерции могут быть выражены через потенциальную энергию U^h точки в поле этих сил (см. (4.80)); сила инерции, определяемая угловым ускорением ω , является непотенциальной силой, зависящей от положения точки и времени, а кориолисова сила гироскопична. Таким образом, сумму всех сил инерции можно записать в форме

$$\mathcal{F} = -\nabla U^h - m[\dot{\omega}\mathbf{r}'] + 2m[\mathbf{v}'\omega],$$

аналогичной силе Лоренца:

$$\mathbf{F} = -e\nabla\varphi - \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{A}].$$

Сопоставляя эти выражения, видим, что скалярным потенциалом сил инерции является функция U^h , а вектор-потенциал этих сил, равный $\mathbf{A}_y = m[\dot{\omega}\mathbf{r}']$, можно найти из уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial t} = m[\dot{\omega}\mathbf{r}'], \quad \text{rot } \mathbf{A}_y = 2m\omega.$$

Итак, силы инерции являются обобщенно-потенциальными силами с потенциалом

$$\mathcal{U}' = -m[\dot{\omega}\mathbf{r}']\mathbf{v}' + U^h, \quad (5.100)$$

где

$$U^h = m\omega\sigma\mathbf{r}' - \frac{m}{2} [\dot{\omega}\mathbf{r}']^2$$

(в случае системы N точек потенциал \mathcal{U}' будет равен сумме членов вида (5.100), каждый из которых относится к i -точке). Из вышесказанного вытекает, что уравнения движения относительно неинерциальной системы отсчета (см. (4.43)) могут быть представлены в виде следующих уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_j} \right) = Q'_j \quad (j = 1, 2, \dots, s); \quad (5.101)$$

здесь $\mathcal{L}' = T' - \mathcal{U}'$, T' — кинетическая энергия относительно неинерциальной системы, \mathcal{U}' — обобщенный потенциал сил инерции, а Q'_j — обобщенные силы, соответствующие векторным силам \mathbf{F}_i , с которыми различные тела действуют на точки механической системы.

Пример 5.12. *Преобразование лагранжиана свободной точки.*

Свободная точка массы m движется в центрально-симметричном поле $U(\mathbf{r})$ с центром силы в начале координат O . Найти функцию Лагранжа этой точки относительно системы отсчета S' , начало которой O' и ось $O'z'$ совпадают соответственно с началом O и осью Oz инерциальной системы отсчета S , предполагая, что система S' вращается относительно S с постоянной угловой скоростью ω .

Если в качестве независимых координат выбрать декартовы координаты точки относительно системы S , то функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

Координаты x, y, z связаны с координатами точки относительно S' формулами:

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t,$$

$$y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t,$$

$$z = z'.$$

Поэтому в новых переменных функция Лагранжа равна:

$$\mathcal{L}' = T^{(2)'} + T^{(1)'} + T^{(0)'} - U',$$

где

$$T^{(2)'} = \frac{m}{2} (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2), \quad T^{(1)'} = m\omega (x' \dot{y}' - y' \dot{x}'),$$

$$T^{(0)'} = \frac{m\omega^2}{2} (x'^2 + y'^2), \quad U' = U(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}).$$

Подставляя функцию \mathcal{L}' в (5.101), получим уравнения движения точки относительно системы S'

$$m(\ddot{x}' - 2\omega \dot{y}' - \omega^2 x') = -\frac{\partial U'}{\partial x'},$$

$$m(\ddot{y}' + 2\omega \dot{x}' - \omega^2 y') = -\frac{\partial U'}{\partial y'},$$

$$m\ddot{z}' = -\frac{\partial U'}{\partial z'}.$$

Поскольку \mathcal{L}' явно от времени не зависит, то обобщенная энергия точки сохраняется:

$$H = \frac{m}{2} (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) - \frac{m\omega^2}{2} (x'^2 + y'^2) + U(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}) = H_0.$$

Нетрудно видеть, что в данном случае функция H является полной энергией точки относительно неинерциальной системы отсчета (см. (4.86)).

Пример 5.13. Движение точки по вращающейся окружности.

Точка массы m движется по гладкой окружности радиуса a , вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через некоторую точку окружности (плоскость окружности перпендикулярна оси вращения). Найти уравнение движения точки.

Выберем системы координат S и S' так, как это показано на рис. 5.10, а в качестве независимой переменной возьмем угол φ между \mathbf{r}' и осью $O'x'$. Выражая через φ проекции радиуса-вектора точки на оси системы

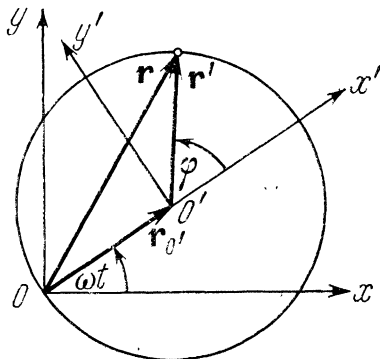


Рис. 5.10

$$x = a \cos \omega t + a \cos(\omega t + \varphi),$$

$$y = a \sin \omega t + a \sin(\omega t + \varphi),$$

получим кинетическую энергию точки в виде

$$T = \frac{ma^2}{2} \{ \omega^2 + (\omega + \dot{\varphi})^2 + 2\omega(\omega + \dot{\varphi}) \cos \varphi \}.$$

Для данной задачи эта функция является функцией Лагранжа; она приводит к уравнению движения

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0.$$

Отсюда следует, что относительно неинерциальной системы S' точка движется так же, как математический маятник в однородном поле тяжести движется относительно инерциальной системы S .

Записывая кинетическую энергию в виде (5.55), где

$$T^{(2)} = \frac{ma^2}{2} \dot{\varphi}^2, \quad T^{(1)} = m\omega a^2 (1 + \cos \varphi) \dot{\varphi},$$

$$T^{(0)} = ma^2 \omega^2 (1 + \cos \varphi),$$

нетрудно получить интеграл обобщенной энергии

$$\frac{ma^2}{2} \dot{\varphi}^2 - ma^2 \omega^2 \cos \varphi = H_0.$$

Здесь $ma^2\dot{\varphi}^2/2$ — кинетическая энергия точки относительно S' , а $-ma^2\omega^2 \cos \varphi$ — потенциальная энергия точки в поле переносной силы инерции $-m\omega a$. Что касается центробежной силы инерции, равной $m\omega^2 r'$, то она не совершает работы на перемещениях точки относительно S' и поэтому не дает вклада в H_0 . Таким образом, функция H является полной энергией E' точки относительно S' (см. (4.86)).

Глава VI

ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В этой главе изучается движение механической системы с достаточно малыми скоростями в достаточно малой пространственной области около положений равновесия точек системы. Если при этом диссипативные силы малы, то система будет совершать, как говорят, малые колебания; если же диссипативные силы значительны, то будет иметь место аperiodическое движение. Теория малых колебаний широко применяется для изучения как механических, так и немеханических систем. Например, с помощью этой теории можно описать колебания математического маятника и колебания напряжения в электрическом контуре. Поэтому излагаемая ниже теория играет большую роль в различных областях физики.

§ 6.1. Собственные одномерные колебания

Пусть на систему с одной степенью свободы наложены *стационарные голономные связи*. Тогда кинетическая энергия как функция независимой координаты q и обобщенной скорости \dot{q} равна (см. (5.55))

$$T = \frac{1}{2} a_{11}(q) \dot{q}^2 \quad (6.1)$$

(здесь коэффициент a_{11} явно от времени не зависит, так как связи стационарны). Пусть также на систему действуют *стационарные потенциальные силы* и диссипативные силы, пропорциональные первой степени скоростей точек системы. В этом случае потенциальная энергия и диссипативная функция D системы имеют вид (см. (5.81))

$$U = U(q), \quad D = \frac{1}{2} b_{11}(q) \dot{q}^2. \quad (6.2)$$

Предположим, что наложенные связи и заданные силы таковы, что существует хотя бы одно положение равновесия системы (для

обозначения положения равновесия будем использовать символ q_{eq}). Согласно (5.54) обобщенная сила, прилагаемая к системе, покоящейся в положении равновесия, равна нулю:

$$Q = - \left(\frac{\partial U}{\partial q} + b_{11} \dot{q} \right) \Big|_{\substack{q=q_{eq} \\ \dot{q}=0}} = 0. \quad (6.3)$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия в положении равновесия должна обладать экстремумом, т. е.

$$\frac{\partial U}{\partial q} \Big|_{q=q_{eq}} = 0. \quad (6.4)$$

Это уравнение определяет положения равновесия системы.

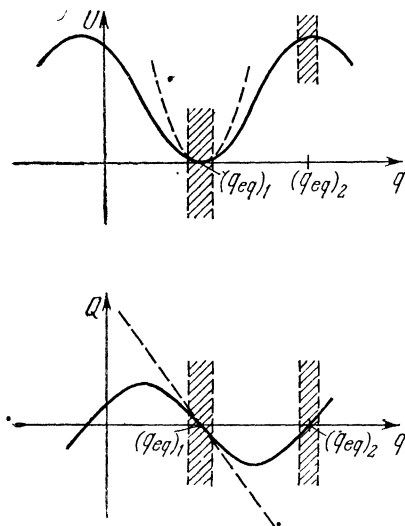


Рис. 6.1

Рассмотрим свойства достаточно малой окрестности таких положений. Пусть, например, система имеет два положения равновесия $(q_{eq})_1$ и $(q_{eq})_2$, причем в первом положении потенциальная энергия достигает минимума, а во втором — максимума (рис. 6.1). Тогда в окрестности положения $(q_{eq})_1$ имеем $Q < 0$, если $q > (q_{eq})_1$, и $Q > 0$, если $q < (q_{eq})_1$ (здесь $(q_{eq})_1 - \varepsilon < q < (q_{eq})_1 + \varepsilon$, а ε — сколь угодно малая положительная величина). В окрестности положения $(q_{eq})_2$ наоборот: $Q > 0$, если $q > (q_{eq})_2$, и $Q < 0$, если $q < (q_{eq})_2$ (здесь $(q_{eq})_2 - \varepsilon < q < (q_{eq})_2 + \varepsilon$). Следовательно, вблизи максимума потенциальной энергии возникает сила,

стремящаяся отклонить систему от положения равновесия, а вблизи минимума возникает сила, стремящаяся вернуть систему в положение равновесия. В этом последнем случае система, обладающая достаточно малым начальным отклонением $q_0 - q_{eq}$ от положения равновесия и достаточно малой начальной скоростью \dot{q}_0 , при любом $t \geq t_0$ не выйдет за пределы наперед заданной сколь угодно малой окрестности положения равновесия, причем обобщенная скорость также будет сколь угодно мала*. Положения

* В справедливости этого утверждения можно убедиться с помощью закона изменения энергии (доказательство признака устойчивости системы в общем случае см. в § 6.2).

равновесия, окрестности которых имеют описанные свойства, называются устойчивыми.

Учитывая эти свойства, кинетическую и потенциальную энергии системы, а также ее диссипативную функцию можно разложить в положении устойчивого равновесия в ряд по степеням отклонения $\xi = q - q_{\text{eq}}$ от этого положения и степеням скорости $\dot{\xi} = \dot{q}$. С точностью до величин второго порядка малости включительно эти разложения имеют вид

$$T = \frac{1}{2} a_{11}(q_{\text{eq}}) \dot{\xi}^2, \quad U = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 U}{dq^2} \right)_{\text{eq}} \xi^2, \quad D = \frac{1}{2} b_{11}(q_{\text{eq}}) \dot{\xi}^2 \quad (6.5)$$

(здесь в разложении потенциальной энергии опущена несущественная постоянная $U(q_{\text{eq}})$ и учтено (6.4)). Используя (6.5), найдем приближенное уравнение Лагранжа, справедливое в малой окрестности положения устойчивого равновесия:

$$a_{11} \ddot{\xi} + b_{11} \dot{\xi} + c_{11} \xi = 0, \quad (6.6)$$

где

$$a_{11} = a_{11}(q_{\text{eq}}), \quad b_{11} = b_{11}(q_{\text{eq}}), \quad c_{11} = \left(\frac{d^2 U}{dq^2} \right)_{\text{eq}}.$$

Уравнение (6.6) является *линейным* дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Если коэффициент b_{11} равен нулю или сравнительно мал, то это уравнение описывает колебания системы, называемые *линейными*. Стационарность сил и связей, рассматриваемых в данной задаче, приводит не только к постоянству коэффициентов уравнения (6.6), но и к его *однородности*; поэтому описываемые этим уравнением колебания называют *собственными* (или *свободными*).

Решение уравнения (6.6) разыскивается, как известно, в виде

$$\xi = C e^{\lambda t}. \quad (6.7)$$

Подставляя (6.7) в (6.6) и сокращая на общий множитель $e^{\lambda t}$, получим

$$\Delta(\lambda) = 0, \quad (6.8)$$

где $\Delta(\lambda) = a_{11} \lambda^2 + b_{11} \lambda + c_{11}$. Поскольку интерес представляет нетривиальное решение (т. е. решение при $C \neq 0$), то уравнение (6.8) эквивалентно следующему уравнению относительно λ :

$$\Delta(\lambda) = 0. \quad (6.9)$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* (или *уравнением частот*). Вводя обозначения $b_{11}/a_{11} = 2\mu$, $c_{11}/a_{11} = \omega_0^2$, запишем его в виде

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (6.10)$$

Значения λ , удовлетворяющие характеристическому уравнению, называются собственными значениями. В одномерном случае имеем два собственных значения λ :

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\omega, \quad (6.11)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$. Вид $\lambda_{1,2}$ соответствует известной алгебраической теореме о том, что корни всякого многочлена с вещественными коэффициентами либо вещественны, либо попарно комплексно сопряжены. Действительно, если $\omega_0 > \mu$, то $\lambda_1 = \lambda_2^*$, а если $\mu > \omega_0$, то

$$\lambda_{1,2} = -\mu_{1,2}, \quad (6.12)$$

где $\mu_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$ (случай кратных корней, когда $\omega_0 = \mu$, мы рассматривать не будем).

Наличие двух собственных значений λ соответствует двум частным независимым решениям

$$\xi^{(1)} = C^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \quad \xi^{(2)} = C^{(2)}e^{\lambda_2 t},$$

где λ_1 , λ_2 , $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ могут быть комплексными. Если в качестве обобщенных координат выбираются действительные величины*, то в качестве общего решения уравнения (6.6) следует взять действительную часть суммы частных независимых решений $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$:

$$\xi = \text{Re} \{ C^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C^{(2)}e^{\lambda_2 t} \}, \quad (6.13)$$

где $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ — постоянные интегрирования, а λ_1 и λ_2 определены характеристическим уравнением (6.10)**. Заметим, что двум комплексным постоянным соответствуют четыре действительные постоянные. Однако после отделения действительной части в (6.13) фактически остаются две произвольные постоянные, как и должно быть в общем решении дифференциального уравнения второго порядка. Например, записывая решение (6.13) в случае $\omega_0 > \mu$ в виде

$$\xi = e^{-\mu t} \text{Re} \{ C^{(1)}e^{i\omega t} + C^{(2)}e^{-i\omega t} \} \quad (6.14)$$

и учитывая, что постоянные $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ всегда можно представить в форме

$$C^{(1)} = a^{(1)} + ib^{(1)}, \quad C^{(2)} = a^{(2)} + ib^{(2)}, \quad (6.15)$$

* Здесь и в дальнейшем мы будем использовать только вещественные независимые координаты.

** Мнимая часть суммы $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ также будет общим решением уравнения (6.6) — см. [46. с. 95].

после отделения вещественной части найдем

$$\xi = e^{-\mu t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t), \quad (6.16)$$

где C_1 и C_2 — действительные произвольные постоянные, определяемые начальными условиями. Решение (6.16) легко также представить в виде

$$\xi = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (6.17)$$

где постоянные a и α связаны с постоянными C_1 и C_2 соотношениями

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{C_2}{C_1}. \quad (6.18)$$

Решение (6.17) или (6.16) описывает затухающее гармоническое колебание системы. Величина мнимой части λ называется собственной частотой колебаний ω , а величина действительной части λ называется коэффициентом затухания μ .

В случае $\mu > \omega_0$ общее решение (6.13) с учетом (6.12) принимает вид

$$\xi = C_1 e^{-\mu_1 t} + C_2 e^{-\mu_2 t}, \quad (6.19)$$

где C_1 и C_2 — действительные постоянные. В этом случае имеем аperiodическое движение, характеризующееся двумя коэффициентами затухания.

Из решений (6.17) и (6.19) видно, что в линейной теории собственные частоты и коэффициенты затухания не зависят от начальных условий. Отметим еще две характерные черты линейной теории малых колебаний: в решении (6.17) отсутствуют «обертонны», т. е. частоты, кратные собственной частоте; кроме того, в силу линейности уравнения (6.6) его общее решение является суммой частных решений, т. е. имеет место, как говорят, принцип суперпозиции.

Независимость собственной частоты и коэффициента затухания от начальных условий приводит к интересному свойству линейных одномерных колебаний — к свойству изохронности. Оно заключается в том, что при равной нулю начальной скорости ($\dot{\xi} = 0$) время, за которое система переходит из начального положения в положение равновесия, не зависит от величины начального отклонения ξ_0 . Действительно, подставляя в (6.17) $t = 0$, получим

$$\xi_0 = a \cos \alpha, \quad \dot{\xi}_0 = -\mu a \cos \alpha - \omega a \sin \alpha,$$

откуда

$$a^2 = \xi_0^2 + \frac{(\dot{\xi}_0 + \mu \xi_0)^2}{\omega^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\dot{\xi}_0 + \mu \xi_0}{\omega \xi_0}.$$

Полагая здесь $\dot{\xi}_0 = 0$, найдем

$$\xi = \xi_0 \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\omega^2}} e^{-\mu t} \cos(\omega t + \alpha),$$

где $\operatorname{tg} \alpha = -\mu/\omega$. Следовательно, интервал времени, за который система переходит в положение равновесия $\xi_{\text{eq}} = 0$, равен

$$\Delta t = \frac{\pi}{2\omega} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\mu}{\omega} \right).$$

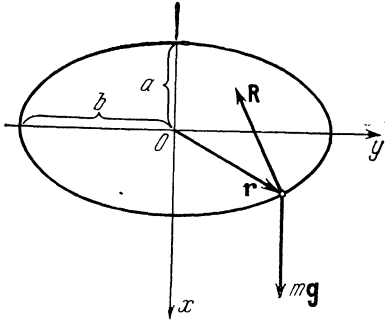


Рис. 6.2

Этот интервал не зависит от величины отклонения ξ_0 .

В отсутствие затухания энергия системы пропорциональна произведению квадратов амплитуды и частоты колебания. В этом нетрудно убедиться, если учесть, что при $\mu=0$ решение (6.17) описывает незатухающее гармоническое колебание

$$\xi = a \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где $\omega_0^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}$. Подставляя эту функцию в выражения (6.5) для T и U , получим

$$E = \frac{a_{11}}{2} (\dot{\xi}^2 + \omega_0^2 \xi^2) = \frac{a_{11}}{2} \omega_0^2 a^2. \quad (6.20)$$

Пример 6.1. Движение точки по эллипсу в среде с «линейным» сопротивлением вблизи положения устойчивого равновесия.

Точка массы m движется по гладкому эллипсу в среде с сопротивлением. Полуоси эллипса равны соответственно a и b , причем первая полуось направлена по вертикали (рис. 6.2). Найти собственную частоту и коэффициент затухания линейных колебаний точки.

Согласно условию точка подчинена двум стационарным связям

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad z = 0.$$

Выберем в качестве независимой переменной параметр ψ , с которым декартовы координаты точки связаны соотношениями

$$x = a \cos \psi, \quad y = b \sin \psi;$$

тогда для кинетической и потенциальной энергий точки получим выражения

$$T = \frac{m}{2} a^2 (\sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi) \dot{\psi}^2,$$

$$U = -mga \cos \psi,$$

где g — напряженность поля тяжести. Предполагая, что сопротивление среды пропорционально первой степени скорости точки, выразим диссипативную функцию через ψ и $\dot{\psi}$:

$$D = \frac{k}{2} (a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi) \dot{\psi}^2.$$

Учитывая, что согласно (6.3) и (6.4) положения равновесия определяются уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = mga \sin \psi = 0,$$

находим две точки равновесия: $\psi_{\text{eq}} = 0$ и $\psi_{\text{eq}} = \pi$. В первом положении потенциальная энергия минимальна, так как $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}\right)_{\psi_{\text{eq}}=0} > 0$, а во втором положении она обладает максимумом, так как $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}\right)_{\psi_{\text{eq}}=\pi} < 0$. Следовательно, первое положение равновесия устойчиво, а второе неустойчиво.

Разлагая в положении устойчивого равновесия кинетическую и потенциальную энергии, а также диссипативную функцию в ряд по степеням ψ и $\dot{\psi}$ с точностью до величины второго порядка малости включительно, получим

$$T = \frac{mb^2}{2} \dot{\psi}^2, \quad U = \frac{mga}{2} \psi^2, \quad D = \frac{kb^2}{2} \dot{\psi}^2.$$

Используя эти функции, найдем линеаризованное уравнение Лагранжа

$$mb^2 \ddot{\psi} + kb^2 \dot{\psi} + mga \psi = 0,$$

представляющее собой уравнение затухающих гармонических колебаний (или аperiодического движения). Собственная частота и коэффициент затухания колебаний точки соответственно равны

$$\omega = \left[\frac{ga}{b^2} - \left(\frac{k}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \mu = \frac{k}{2m}.$$

В случае аperiодического движения коэффициенты затухания равны

$$\mu_{1,2} = \frac{k}{2m} \pm \left[\left(\frac{k}{2m} \right)^2 - \frac{ga}{b^2} \right]^{1/2}.$$

Пример 6.2. Колебания точки по наклонному эллипсу.

Точка массы m движется по гладкому эллипсу с полуосями, равными a и b . Плоскость эллипса вертикальна, а полуось a отклонена от вертикали на угол φ_0 . Найти собственную частоту линейных колебаний точки (сопротивлением среды пренебречь).

Выберем систему координат так, как это показано на рис. 6.3. Тогда уравнения связей совпадут с аналогичными уравнениями предыдущего примера, а за независимую переменную можно будет взять параметр ψ . В таком случае кинетическая и потенциальная энергии точки будут соответственно равны

$$T = \frac{m}{2} (a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi) \dot{\psi}^2,$$

$$U = -m g r =$$

$$= -m g (a \cos \varphi_0 \cos \psi + b \sin \varphi_0 \sin \psi),$$

где g — напряженность поля тяжести. Для исследования U на экстремум находим ее первую и вторую производные. Приравнявая первую производную нулю, получаем уравнение

$$\operatorname{tg} \psi_{\text{eq}} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi_0,$$

определяющее положение равновесия ψ_{eq} . Выбирая положение устойчивого равновесия и учитывая, что вблизи этого положения

$$\sin \psi \approx \sin \psi_{\text{eq}} + \cos \psi_{\text{eq}} \cdot \xi,$$

$$\cos \psi \approx \cos \psi_{\text{eq}} - \sin \psi_{\text{eq}} \cdot \xi$$

(здесь $\xi = \psi - \psi_{\text{eq}}$), с точностью до величин второго порядка малости получим

$$T = \frac{m}{2} (a^2 \sin^2 \psi_{\text{eq}} + b^2 \cos^2 \psi_{\text{eq}}) \dot{\xi}^2, \quad U = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} \right)_{\text{eq}} \xi^2.$$

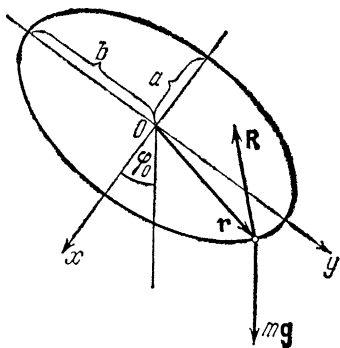


Рис. 6.3

Отсюда находим уравнение линейных колебаний

$$m(a^2 \sin^2 \psi_{\text{eq}} + b^2 \cos^2 \psi_{\text{eq}}) \ddot{\xi} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} \right)_{\text{eq}} \xi = 0$$

и квадрат собственной частоты

$$\omega^2 = \frac{g}{a^2 b^2} (a^2 \cos^2 \varphi_0 + b^2 \sin^2 \varphi_0)^{3/2}.$$

Пример 6.3. Колебания точки, находящейся на горизонтальном стержне, под действием пружины.

Точка массы m , движущаяся по гладкому горизонтальному стержню, соединена пружиной с неподвижной точкой O , находящейся на расстоянии l от стержня. Найти частоту линейных колебаний точки (жесткость и длина пружины в ненапряженном состоянии соответственно равны κ и a , см. (1.42)); пружина навита на гладкий стержень, шарнирно закрепленный в точке O .

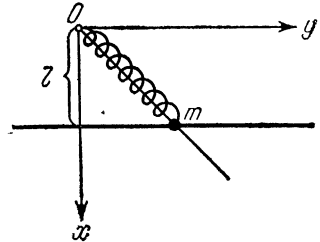


Рис. 6.4

Выберем систему координат так, как это показано на рис. 6.4, тогда

$$T = \frac{m}{2} \dot{y}^2, \quad U = \frac{\kappa}{2} (\sqrt{l^2 + y^2} - a)^2.$$

Чтобы определить положение устойчивого равновесия, рассмотрим первую и вторую производные от U :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \kappa (\sqrt{l^2 + y^2} - a) \frac{y}{\sqrt{l^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\kappa}{\sqrt{l^2 + y^2}} \left\{ \frac{y^2}{\sqrt{l^2 + y^2}} + (\sqrt{l^2 + y^2} - a) \frac{l^2}{l^2 + y^2} \right\}.$$

Приравнявая нулю $\frac{\partial U}{\partial y}$, получим три положения равновесия:

$$y_{\text{eq}} = 0, \quad y_{\text{eq}} = \pm \sqrt{a^2 - l^2} \quad (a > l).$$

Первое положение будет устойчивым, если

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{y_{\text{eq}}=0} = \frac{\kappa}{l} (l - a) > 0,$$

т. е. будет устойчивым, если $l > a$ (пружина в положении равновесия растянута). Два других положения равновесия существуют, если $a > l$, причем эти положения устойчивы, поскольку

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{y_{\text{eq}} = \pm \sqrt{a^2 - l^2}} = \frac{\kappa}{a^2} (a^2 - l^2) > 0.$$

Разлагая U в положении устойчивого равновесия $y_{\text{eq}} = 0$, получим

$$U = \frac{\kappa}{2} (l - a)^2 + \frac{\kappa}{2} \left(1 - \frac{a}{l} \right) y^2 \quad (l > a),$$

а в двух других положениях

$$U = \frac{\kappa}{2} \left(1 - \frac{l^2}{a^2} \right) \xi^2 \quad (a > l),$$

где $\xi = y \mp \sqrt{a^2 - l^2}$.

Используя эти выражения для U , найдем квадраты частот линейных колебаний точки в окрестностях указанных выше положений:

$$\omega^2 = \frac{\kappa}{m} \left(1 - \frac{a}{l} \right) \quad (l > a),$$

$$\omega^2 = \frac{\kappa}{m} \left(1 - \frac{l^2}{a^2} \right) \quad (a > l).$$

Как видно, при разных соотношениях a и l возможны различные положения устойчивого равновесия и соответственно различные частоты колебаний.

§ 6.2. Положение устойчивого равновесия

Теория собственных линейных колебаний системы с s степенями свободы во многом аналогична теории одномерных колебаний. В этой теории предполагается, что *связи, наложенные на систему, идеальны, голономны и стационарны, а заданные силы явно от времени не зависят*; кроме того, предполагается, что *система обладает по крайней мере одним положением устойчивого равновесия*.

Существо этой теории сводится к линеаризации уравнений Лагранжа в окрестности положения устойчивого равновесия. Поэтому исследование собственных колебаний нужно начинать с отыскания таких положений. Прежде всего напомним, что необходимым и достаточным условием равновесия механической системы с голономными идеальными связями является обращение в нуль всех обобщенных сил в некотором положении — положении равновесия $(q_j)_{\text{eq}}$ ($j = 1, 2, \dots, s$) (см. (5.54)). Приведем это условие

в более общем случае, когда обобщенные силы зависят не только от координат q , но и от скоростей \dot{q} :

$$q_1=(q_1)_{\text{eq}}, \dots, q_s=(q_s)_{\text{eq}}; \dot{q}_1=\dots=\dot{q}_s=0 \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (6.21)$$

Таким образом, состояние равновесия характеризуется $2s$ величинами: $q_j=(q_j)_{\text{eq}}$ и $\dot{q}_j=0$ ($j=1, 2, \dots, s$). Это состояние может быть представлено в виде точки $2s$ -мерного пространства обобщенных координат и скоростей.

Определим положение устойчивого равновесия. Пусть для сколь угодно малых наперед заданных положительных величин ε_q и $\varepsilon_{\dot{q}}$ можно найти такие положительные величины δ_q и $\delta_{\dot{q}}$, что для любого момента времени $t \geq t_0$ отклонения $q - (q)_{\text{eq}}$ от положения равновесия и скорости \dot{q} будут удовлетворять неравенствам

$$|q_j - (q_j)_{\text{eq}}| < \varepsilon_{q_j}, \quad |\dot{q}_j| < \varepsilon_{\dot{q}_j} \quad (j=1, 2, \dots, s), \quad (6.22)$$

если только отклонения и скорости в начальный момент времени удовлетворяют неравенствам

$$|q_{j0} - (q_j)_{\text{eq}}| < \delta_{q_j}, \quad |\dot{q}_{j0}| < \delta_{\dot{q}_j} \quad (j=1, 2, \dots, s) \quad (6.23)$$

(величины δ_q и $\delta_{\dot{q}}$, конечно, зависят от наперед заданных величин ε_q и $\varepsilon_{\dot{q}}$)*. Тогда положение равновесия $(q)_{\text{eq}}$ называется устойчивым. (Для краткости окрестность состояния равновесия в $2s$ -мерном пространстве, определяемую условием (6.22), назовем ε -окрестностью «точки» q_{eq} , а окрестность, определяемую (6.23), δ -окрестностью этой «точки»).

Достаточный признак устойчивости положения равновесия механической системы относительно инерциальной системы отсчета устанавливается следующей теоремой. Пусть идеальные голономные связи, наложенные на систему, стационарны, заданные силы явно от времени не зависят, а потенциальная энергия системы в некотором положении обладает изолированным минимумом; тогда это положение будет положением устойчивого равновесия. Минимум потенциальной энергии U называется изолированным, если в некоторой окрестности положения q_{eq} , в котором энергия минимальна, нет других экстремальных «точек» функции U . Иначе говоря, минимум будет изолированным, если при

* Здесь символом ε_q обозначена совокупность величин $\varepsilon_{q_1}, \varepsilon_{q_2}, \dots, \varepsilon_{q_s}$; символом $\varepsilon_{\dot{q}}$ — совокупность $\varepsilon_{\dot{q}_1}, \varepsilon_{\dot{q}_2}, \dots, \varepsilon_{\dot{q}_s}$ и т. д. В дальнейшем везде совокупность s величин будем обозначать соответствующим символом без индекса j .

$$|q_j - (q_j)_{\text{eq}}| < \Delta_j \quad (j = 1, 2, \dots, s)$$

(положительные величины Δ определяют окрестность минимума), потенциальная энергия удовлетворяет условию

$$U(q_1, \dots, q_s) \geq U((q_1)_{\text{eq}}, \dots, (q_s)_{\text{eq}}),$$

а равенство имеет место только в том случае, когда $q_j = (q_j)_{\text{eq}}$ ($j = 1, 2, \dots, s$).

Сначала докажем сформулированную теорему, предполагая, что диссипативные силы отсутствуют, т. е. предполагая, что полная энергия системы сохраняется ($E = E_0$). Положение q_{eq} , в котором потенциальная энергия системы минимальна, является положением равновесия. В самом деле, обобщенные силы, приложенные к системе, покоящейся в этом положении, равны нулю (см. (5.76) и (6.21)):

$$Q_j = \left\{ -\frac{\partial U}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^s \gamma_{jk} \dot{q}_k \right\} \Big|_{q=q_{\text{eq}}, \dot{q}=0} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Так как потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной, то, полагая $U(q_1, \dots, q_s) = 0$, из условия теоремы получим

$$U(q_1, \dots, q_s) \geq 0, \quad (6.24)$$

если $|q_j - q_{j\text{eq}}| < \Delta_j$ ($j = 1, 2, \dots, s$) (здесь равенство имеет место только в том случае, если все $q_j = q_{j\text{eq}}$). Из условия стационарности связей вытекает, что кинетическая энергия является положительно определенной формой обобщенных скоростей (см. (5.55) и (5.56)), т. е.

$$T = T^{(2)} \geq 0, \quad (6.25)$$

причем T равняется нулю только в том случае, если все $\dot{q}_j = 0$. Из (6.24) и (6.25) следует, что в Δ -окрестности

$$E = T + U \geq 0, \quad (6.26)$$

а равенство имеет место только в том случае, когда все отклонения от положения равновесия и скорости равны нулю, т. е. $q_j = q_{j\text{eq}}$ и $\dot{q}_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$). Итак, из условия теоремы (в отсутствие диссипативных сил) вытекает, что полная энергия системы при ее перемещениях сохраняется, а как функция обобщенных координат и скоростей имеет изолированный минимум в $2s$ -мерной точке $q = q_{\text{eq}}, \dot{q} = 0$.

Зададим некоторую ε -окрестность состояния равновесия, т. е. зададим сколь угодно малые величины ε_q и $\varepsilon_{\dot{q}}$:

$$\Delta_j > \varepsilon_{q_j} > 0, \quad \varepsilon_{\dot{q}_j} > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (6.27)$$

Точки, лежащие на границе этой окрестности, определяются такими значениями отклонений и скоростей, когда по крайней мере одно отклонение $q_j - (q_j)_{\text{eq}}$ равняется ε_{q_j} или хотя бы одна скорость \dot{q}_j равна $\varepsilon_{\dot{q}_j}$, а остальные отклонения и скорости удовлетворяют условиям

$$|q_i - (q_i)_{\text{eq}}| \leq \varepsilon_{q_i},$$

$$|\dot{q}_i| \leq \varepsilon_{\dot{q}_i} \quad (i \neq j).$$

Полную энергию как функцию «точки», лежащей на указанной границе, обозначим символом E_ε . В силу непрерывности эта функция имеет как максимальное значение $\max E_\varepsilon$, так и минимальное значение $\min E_\varepsilon$ [44, с. 246—247].

Теперь выберем такую δ -окрестность состояния равновесия, чтобы выполнялось неравенство

$$\max E_\delta < \min E_\varepsilon, \quad (6.28)$$

где E_δ — значения полной энергии на границе δ -окрестности. Такой выбор возможен, так как непрерывная функция E обращается в нуль только при $q_j = (q_j)_{\text{eq}}$, $\dot{q}_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$), а другие экстремальные «точки» в рассматриваемой Δ -окрестности отсутствуют. Наконец, подчиним начальные условия неравенствам (6.23), где совокупность величин δ_q и $\delta_{\dot{q}}$ удовлетворяет требованию (6.28). Тогда $E_0 < \max E_\delta$ (такой выбор начальных условий возможен в силу тех же причин). Таким образом, для заданной сколь угодно малой ε -окрестности положения q_{eq} всегда может быть найдена такая δ -окрестность и такие начальные условия, чтобы

$$E = E_0 < \max E_\delta < \min E_\varepsilon. \quad (6.29)$$

Следовательно, в любой момент времени $E < \min E_\varepsilon$. Это означает, что ни одна из обобщенных координат и скоростей системы с течением времени не достигает границ ε -окрестности, так как на границе $E = E_\varepsilon \geq \min E_\varepsilon$, что и доказывает теорему в отсутствие диссипативных сил.

Для иллюстрации рассмотрим доказательство теоремы на частном примере циклоидального маятника (см. пример 5.4). Энергия такого маятника равна

$$E = \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + \omega^2 s^2) = E_0,$$

где $\omega^2 = g/4R$, а s — длина пути точки, отсчитываемая от положения равновесия $s=0$. Зададимся ε -окрестностью состояния равновесия, т. е. возьмем сколь угодно малые величины ε , удовлетворяющие неравенствам $4R > \varepsilon_s > 0$, $\varepsilon_s^2 > 0$ (для определенности будем считать, что $\varepsilon_s^2 < \omega^2 \varepsilon_s^2$). Поскольку движение в данном случае одномерное, состояние маятника можно изобразить на плоскости, откладывая по одной оси координату s , а по другой — обобщенную скорость \dot{s} . Тогда границей ε -окрестности будет граница прямоугольника (рис. 6.5). В точках 1 этой границы функция E_ε достигает своего максимального значения

$$\max E_\varepsilon = \frac{m}{2} (\varepsilon_s^2 + \omega^2 \varepsilon_s^2).$$

В точках 2 функция E_ε принимает значение $(m/2)\omega^2 \varepsilon_s^2$, а в точках 3 E_ε имеет минимальное значение

$$\min E_\varepsilon = \frac{m}{2} \varepsilon_s^2.$$

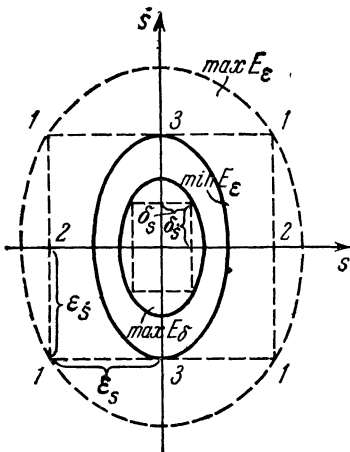


Рис. 6.5

Аналогично максимальное значение энергии на границе δ -окрестности равно

$$\max E_\delta = \frac{m}{2} (\delta_s^2 + \omega^2 \delta_s^2).$$

Подберем δ_s и δ_s^2 так, чтобы выполнялось неравенство (6.28):

$$\delta_s^2 + \omega^2 \delta_s^2 < \varepsilon_s^2.$$

Очевидно, что этот подбор δ -окрестности можно осуществить при любом сколь угодно малом ε_s . При этом «траектория» точки (эллипс) в плоскости (s, \dot{s}) будет лежать внутри эллипса, соответствующего $\max E_\delta$, если в начальный момент времени точка находится внутри δ -окрестности.

Доказательство достаточного признака устойчивости положения равновесия было проведено без учета диссипативных сил. Если эти силы присутствуют, то полная энергия системы убывает. Следовательно, повторяя доказательство, вместо (6.29) получим

$$E < E_0 < \max E_0 < \min E_e, \quad (6.30)$$

откуда и вытекает справедливость теоремы.

Можно также сформулировать достаточный признак устойчивости относительно неинерциальной системы отсчета. В этом случае к условию теоремы нужно добавить *требования постоянства* ω_0 — ускорения начала неинерциальной системы и ω — ее угловой скорости. Такое заключение вытекает из закона изменения энергии относительно неинерциальной системы отсчета, который в рассматриваемом случае по форме совпадает с уравнением (4.83), полученным для свободных систем (совпадение имеет место, поскольку мощность реакций идеальных стационарных связей равна нулю).

Заметим, что наряду с признаком устойчивости положения равновесия большое значение имеют признаки неустойчивости; они в ряде важных случаев устанавливаются теоремами Ляпунова и Четаева [30, 23].

Пример 6.4. Положение устойчивого равновесия материальной точки, подвешенной на пружине.

Точка массы m подвешена на пружине жесткости κ и длины a в ненапряженном состоянии. Определим положение устойчивого равновесия точки (напряженность поля тяготения равна g).

Выберем систему координат так, как это показано на рис. 6.6, а в качестве независимых координат возьмем полярные координаты ρ и φ . Тогда потенциальная энергия, равная сумме энергии точки в поле тяготения и энергии упругой деформации пружины, имеет вид

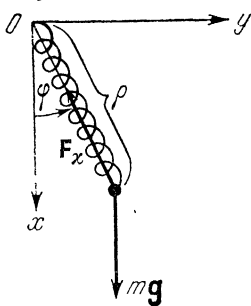


Рис. 6.6

$$U = -mg\rho \cos \varphi + \frac{\kappa}{2}(\rho - a)^2.$$

Для отыскания положения устойчивого равновесия найдем первые и вторые производные от U по ρ и φ :

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = -mg \cos \varphi + \kappa(\rho - a), \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = mg\rho \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = \kappa, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \varphi} = mg \sin \varphi, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = mg\rho \cos \varphi.$$

Приравнивая первые производные нулю, определим положения равновесия. Одно из них, а именно положение

$$\rho_{\text{eq}} = a + \frac{mg}{\kappa}, \quad \varphi_{\text{eq}} = 0,$$

является устойчивым. Действительно, в этом положении вторые производные равны

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} \right)_{\text{eq}} = \kappa, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \varphi} \right)_{\text{eq}} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right)_{\text{eq}} = mg \rho_{\text{eq}}$$

и удовлетворяют неравенствам

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} \right)_{\text{eq}} > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} \right)_{\text{eq}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right)_{\text{eq}} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \varphi} \right)_{\text{eq}}^2 > 0,$$

что свидетельствует о наличии изолированного минимума потенциальной энергии [44, гл. 14, § 6]. Другое положение равновесия

$$\rho_{\text{eq}} = a - \frac{mg}{\kappa}, \quad \varphi_{\text{eq}} = \pi,$$

как нетрудно убедиться, является неустойчивым.

Пример 6.5. *Колебания точки на вращающемся стержне.*

Точка массы m движется по гладкому тонкому стержню, вращающемуся в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через неподвижную точку стержня O . Ось и материальная точка соединены между собой пружиной жесткости κ и длины a в ненапряженном состоянии (см. (1.42)). Определить собственную частоту колебаний точки около положения устойчивого равновесия.

Напишем обобщенный потенциал в неинерциальной системе отсчета $Ox'y'$ (см. рис. 1.14, v и формулу (5.100)). В рассматриваемом случае векторы $[\omega \mathbf{r}']$ и \mathbf{v}' перпендикулярны, следовательно, обобщенный потенциал сводится к потенциальной энергии в поле упругой силы и центробежной силы инерции:

$$U' = \frac{\kappa}{2} (x' - a)^2 - \frac{m}{2} \omega^2 x'^2.$$

Отсюда, приравнивая первую производную от U' по x' нулю, получим положение равновесия

$$x'_{\text{eq}} = \frac{\kappa a}{\kappa - m\omega^2}.$$

Это положение существует и будет устойчивым, если угловая скорость удовлетворяет условию $\omega^2 < \kappa/m$. Выражая U' через отклонение $\xi = x' - x'_{\text{eq}}$ и отбрасывая несущественную постоянную, получим

$$U' = \frac{1}{2} (\kappa - m\omega^2) \xi^2.$$

Используя это выражение и выражение кинетической энергии относительно $Ox'y'$

$$T' = \frac{m}{2} \dot{\xi}^2,$$

найдем уравнение Лагранжа (см. (5.101))

$$m \ddot{\xi} + (\kappa - m\omega^2) \xi = 0.$$

При $\omega^2 < \kappa/m$ решение этого уравнения описывает гармоническое колебание точки с частотой, равной

$$\left(\frac{\kappa}{m} - \omega^2 \right)^{1/2}.$$

Пример 6.6. Колебания точки на вращающемся эллипсе.

Точка массы m движется по гладкому эллипсу с полуосями a и b . Эллипс вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, совпадающей с одной из его полуосей (рис. 6.7). Найти частоту линейных колебаний точки.

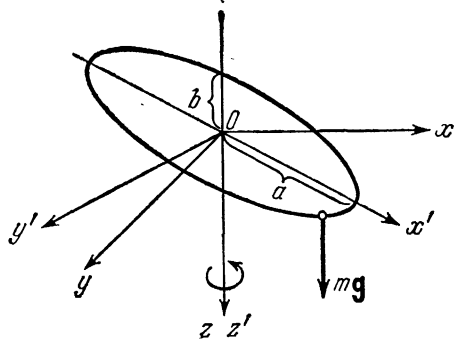


Рис. 6.7

Выберем инерциальную систему $Oxyz$ и неинерциальную систему $Ox'y'z'$ так, как это показано на рис. 6.7. В качестве независимой переменной используем безразмерный параметр ψ , определяемый функциями

$$x' = a \sin \psi, \quad z = b \cos \psi.$$

Тогда кинетическая энергия относительно системы S' равна

$$T' = \frac{m}{2} (a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi) \dot{\psi}^2,$$

а обобщенный потенциал сводится к потенциальной энергии точки в поле тяжести и в поле центробежной силы инерции:

$$U' = -mgb \cos \psi - \frac{m}{2} \omega^2 a^2 \sin^2 \psi.$$

Приравняв нулю первую производную от U' по ψ , найдем положения равновесия

$$\psi_{\text{eq}} = 0, \pi \text{ и } \cos \psi_{\text{eq}} = \frac{gb}{\omega^2 a^2}, \quad (gb \leq \omega^2 a^2).$$

Рассматривая в этих точках значения второй производной от U' по ψ , получим, что положение $\psi_{\text{eq}}=0$ устойчиво, если $gb > \omega^2 a^2$ (в противном случае оно неустойчиво); положения, определяемые равенством $\cos \psi_{\text{eq}} = \frac{gb}{\omega^2 a^2}$, устойчивы, если $gb < \omega^2 a^2$, если же $gb > \omega^2 a^2$, то этих положений равновесия не существует; что касается положения $\psi_{\text{eq}}=\pi$, то оно в любом случае неустойчиво.

Предполагая, что $gb > \omega^2 a^2$, разложим T' и U' в положении устойчивого равновесия $\psi_{\text{eq}}=0$. В результате с точностью до членов второго порядка малости включительно получим (см. (6.5))

$$T' = \frac{m}{2} a^2 \dot{\psi}^2, \quad U' = \frac{m}{2} (gb - \omega^2 a^2) \psi^2.$$

Далее, используя и (6.6)–(6.11), найдем частоту ω_0 колебаний около положения $\psi_{\text{eq}}=0$:

$$\omega_0 = \left(\frac{gb}{a^2} - \omega^2 \right)^{1/2} \quad (gb > \omega^2 a^2).$$

Если же $gb < \omega^2 a^2$, то T' и U' следует разлагать в точках, определяемых равенством $\cos \psi_{\text{eq}} = gb/\omega^2 a^2$. Тогда

$$T' = \frac{m}{2} (a^2 \cos^2 \psi_{\text{eq}} + b^2 \sin^2 \psi_{\text{eq}}) \dot{\xi}^2,$$

$$U' = \frac{m \omega^2 a^2}{2} \left[1 - \left(\frac{gb}{\omega^2 a^2} \right)^2 \right] \xi^2,$$

где $\xi = \psi - \psi_{\text{eq}}$. Частота колебаний около рассматриваемого положения равновесия будет равна

$$\omega_0 = \omega \frac{a}{b} \left[\frac{1 - \cos^2 \psi_{\text{eq}}}{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2 \psi_{\text{eq}}} \right]^{1/2} \quad (gb < \omega^2 a^2)$$

(здесь $\cos \psi_{\text{eq}}$ определен выше).

§ 6.3. Собственные и главные колебания системы под действием потенциальных сил

Рассмотрим несвободную систему с идеальными голономными стационарными связями и s степенями свободы, предполагая, что заданные силы, действующие на точки системы, потенциальны и стационарны, а у системы есть хотя бы одно положение устойчивого равновесия. Покажем, что в достаточно малой окрестности

такого положения каждая независимая координата системы как функция времени может быть представлена в виде суммы гармонических функций, изменяющихся во времени с частотами, которые определяются свойствами системы, связей и заданных сил.

В силу стационарности связей

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (6.31)$$

где $a_{jk} = a_{kj}$ (см. (5.55) — (5.57)), а в силу стационарности заданных сил потенциальная энергия системы будет функцией лишь независимых координат.

Разложим кинетическую энергию в положении устойчивого равновесия в ряд по степеням координат $\xi_j = q_j - (q_j)_{\text{eq}}$ и степеням обобщенных скоростей $\dot{\xi}_j = \dot{q}_j$ ($j = 1, 2, \dots, s$). Тогда с точностью до членов второго порядка малости включительно из (6.31) получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s (a_{jk})_{\text{eq}} \dot{\xi}_j \dot{\xi}_k, \quad (6.32)$$

где $(a_{jk})_{\text{eq}} = a_{jk}(q_{1\text{eq}}, \dots, q_{s\text{eq}})$.

Предполагая, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия U обладает изолированным минимумом и разлагая ее в том же положении по степеням отклонений ξ , найдем

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s (c_{jk})_{\text{eq}} \xi_j \xi_k, \quad (6.33)$$

где $c_{jk} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_j \partial \xi_k} = c_{kj}$ (здесь опущена несущественная постоянная). Разложение потенциальной энергии может начаться с членов третьего или более высокого порядка малости, что приведет к нелинейным уравнениям. В связи с этим допустим, что не все коэффициенты c_{jk} в разложении (6.33) равны нулю.

Подставляя (6.32) и (6.33) в уравнения Лагранжа, придем к уравнениям

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \ddot{\xi}_k + c_{jk} \xi_k) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (6.34)$$

(здесь знак равновесия при коэффициентах опущен для сокращения записи, однако всегда следует помнить, что коэффициенты в (6.34) берутся в положении равновесия, т. е. являются постоянными).

ми величинами). Итак, закон движения системы с s степенями свободы около положения устойчивого равновесия определяется линейными однородными уравнениями с постоянными действительными и симметричными коэффициентами.

Решение этих уравнений ищем в виде

$$\xi_k = C_k e^{\lambda t} \quad (k = 1, 2, \dots, s). \quad (6.35)$$

Подставляя (6.35) в (6.34), получим уравнения для «амплитуд» C_k :

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \lambda^2 + c_{jk}) C_k = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (6.36)$$

Эта система однородных уравнений имеет нетривиальное решение, если ее детерминант равняется нулю:

$$\det (a_{jk} \lambda^2 + c_{jk}) = 0 \quad (6.37)$$

(для краткости детерминант системы (6.36) будем обозначать символом $\Delta(\lambda)$ — см. (6.9)).

Характеристическое уравнение (6.37) представляет собой алгебраическое уравнение $2s$ -той степени относительно λ и, следовательно, имеет $2s$ корней λ_α (эти корни называются *собственными значениями* характеристического уравнения)*. Система (6.36) после подстановки в нее данного корня λ_α определяет соотношения между «амплитудами» C :

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \lambda_\alpha^2 + c_{jk}) C_k = 0 \quad (j = 1, \dots, s). \quad (6.38)$$

Полученные отсюда амплитуды будем обозначать C_k^α и называть «амплитудами, принадлежащими собственному значению λ_α ».

Общее решение системы дифференциальных уравнений (6.34) можно записать в виде действительной (или мнимой) части суммы частных решений, т. е. в виде

$$\xi_k = \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^{2s} C_k^\alpha e^{\lambda_\alpha t} \quad (k = 1, \dots, s), \quad (6.39)$$

где амплитуды C_k^α (а точнее, их отношения) определяются системой (6.38), а корни λ_α — уравнением (6.37).

Из (6.39) видно, что существенным шагом в решении уравнений (6.34) является определение собственных значений λ . Поэто-

* Далее предполагается, что характеристическое уравнение не имеет кратных корней.

му большое значение имеют общие заключения о корнях характеристического уравнения. Например, можно утверждать, что в рассматриваемом случае консервативных систем действительные части всех λ должны равняться нулю, так как иначе q и \dot{q} имели бы экспоненциальные возрастающие и убывающие со временем множители, которые при произвольных условиях привели бы к нарушению закона сохранения энергии*. Таким образом, *если на систему действуют только потенциальные стационарные силы, то все собственные значения λ будут чисто мнимыми:*

$$\lambda_{\alpha}^{+} = +i\omega_{\alpha}, \quad \lambda_{\alpha}^{-} = -i\omega_{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s); \quad (6.40)$$

здесь ω_{α} — действительные величины, называемые собственными частотами системы, а собственные значения λ перенумерованы не от 1 до $2s$, а от 1 до s , поскольку каждому номеру соответствует одна пара комплексно сопряженных значений корня. Тогда (6.39) можно записать в виде

$$\xi_k = \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^s \{ (C_k^{\alpha})^{+} e^{+i\omega_{\alpha}t} + (C_k^{\alpha})^{-} e^{-i\omega_{\alpha}t} \}. \quad (6.41)$$

Значения амплитуд C_k^{α} , соответствующих λ_{α} , определяются с помощью однородной системы (6.38). Поскольку интересующее нас решение нетривиально, среди амплитуд C_k^{α} должна существовать хотя бы одна амплитуда, отличная от нуля. Пусть от нуля отлична амплитуда C_s^{α} (обобщенные координаты всегда можно перенумеровать так, чтобы от нуля отличалась амплитуда, соответствующая координате ξ_s). Тогда, перенося в правую часть системы (6.38) слагаемые $(a_{js}\lambda_{\alpha}^2 + c_{js})C_s^{\alpha}$, согласно правилу решения линейных уравнений получим**

$$C_k^{\alpha} = \frac{\Delta_k^{\alpha}}{\Delta_s^{\alpha}} C_s^{\alpha} \quad (k = 1, 2, \dots, s-1), \quad (6.42)$$

где Δ_k^{α} — алгебраическое дополнение к элементу k -того столбца любой строки характеристического детерминанта, взятого при значении $\lambda = \lambda_{\alpha}$. Так как амплитуда C_s^{α} не определена, то вводя обозначение $C_{\alpha} = C_s^{\alpha}/\Delta_s^{\alpha}$, все амплитуды можно представить в виде

$$C_k^{\alpha} = C_{\alpha} \Delta_k^{\alpha} \quad (k = 1, 2, \dots, s), \quad (6.43)$$

* Строгое доказательство отмеченного свойства корней характеристического уравнения см. в приложении 6.1.

** Здесь предполагается, что ранг матрицы, составленной из коэффициентов системы (6.38), равен $s-1$; см. [47, гл. 2, § 12].

где C_α — произвольная постоянная. Подставляя (6.43) в (6.41), получим

$$\xi_k = \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^s \{ C_\alpha^+ \Delta_k(+i\omega_\alpha) e^{+i\omega_\alpha t} + C_\alpha^- \Delta_k(-i\omega_\alpha) e^{-i\omega_\alpha t} \} \quad (k = 1, 2, \dots, s). \quad (6.44)$$

Ввиду потенциальности заданных сил характеристическое уравнение (6.37) и все дополнения характеристического детерминанта содержат только степени квадрата λ . Поэтому в рассматриваемом случае дополнения будут действительными величинами, которые удовлетворяют соотношениям (см. (6.40))

$$\Delta_k(+i\omega_\alpha) = \Delta_k(-i\omega_\alpha) \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, s \\ \alpha = 1, 2, \dots, s \end{array} \right). \quad (6.45)$$

Используя эти соотношения и учитывая, что

$$\operatorname{Re} \{ C_\alpha^+ e^{+i\omega_\alpha t} + C_\alpha^- e^{-i\omega_\alpha t} \} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha) \quad (6.46)$$

(здесь a_α и β_α — действительные произвольные постоянные), найдем общее решение системы дифференциальных уравнений (6.34) в виде

$$\xi_k = \sum_{\alpha=1}^s \Delta_k(i\omega_\alpha) \theta_\alpha \quad (k = 1, 2, \dots, s), \quad (6.47)$$

где $\theta_\alpha = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha)$.

Итак, собственные колебания системы, описываемые координатами ξ_k ($k=1, \dots, s$), представляют собой наложение гармонических колебаний с собственными частотами системы. Функции θ являются строго периодическими функциями времени, а ξ в общем случае не являются таковыми (например, при несоизмеримости собственных частот координата ξ_k никогда не примет начального значения ξ_{k0}). Подчеркнем также, что нельзя отождествлять какую-либо собственную частоту ω_α с частотой колебаний какой-либо определенной точки системы. Такое представление верно лишь в предельном случае невзаимодействующих точек системы, если каждая из них обладает одной степенью свободы. Вообще говоря, *собственные частоты характеризуют движение системы в целом; всегда можно задать начальные условия так, чтобы все координаты гармонически изменялись со временем с одной из собственных частот системы.* Действительно, в силу произвольности амплитуд a начальные условия можно выбрать так, чтобы все амплитуды, кроме одной, равнялись нулю. Например, пусть $a_\alpha \neq 0$, тогда из (6.47) получим частное решение

$$\xi_k = \Delta_k(i\omega_{\alpha'}) a_{\alpha'} \cos(\omega_{\alpha'} t + \beta_{\alpha'}) \quad (k = 1, \dots, s). \quad (6.48)$$

В этом случае все координаты гармонически изменяются с одной собственной частотой $\omega_{\alpha'}$, в фазе или противофазе в зависимости от знака $\Delta_k(i\omega_{\alpha'})$. Во многих простых случаях такое выделение гармонических колебаний из собственных колебаний системы помогает сразу определить соответствующую частоту.

Из общего решения (6.47) следует, что в качестве независимых координат можно взять величины θ_{α} ($\alpha = 1, \dots, s$). Действительно, это решение определяет линейное преобразование от координат θ к координатам ξ . Координаты θ называются главными (или нормальными) координатами. Соответственно гармонические колебания с собственными частотами системы называются главными (или нормальными) колебаниями. Очевидно, что координаты θ удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\theta}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 \theta_{\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, s). \quad (6.49)$$

Эта система представляет собой уравнения Лагранжа в главных координатах*. Каждое из этих уравнений является уравнением относительно лишь одной главной координаты. Поэтому системе (6.49) соответствует функция Лагранжа, равная сумме функций \mathcal{L}_{α} , каждая из которых зависит только от соответствующей главной координаты θ_{α} и ее производной $\dot{\theta}_{\alpha}$, т. е. лагранжиан системы в главных координатах должен иметь вид

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^s \mathcal{L}_{\alpha}, \quad (6.50)$$

где

$$\mathcal{L}_{\alpha} = T_{\alpha} - U_{\alpha}, \quad T_{\alpha} = \frac{a_{\alpha}}{2} \dot{\theta}_{\alpha}^2, \quad U_{\alpha} = \frac{c_{\alpha}}{2} \theta_{\alpha}^2.$$

Введение главных координат равносильно одновременному приведению двух квадратичных форм T и U к каноническому виду. Действительно, T и U в случае произвольных независимых координат задаются с помощью двух симметричных матриц

$$\|a_{jk}\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & \dots & a_{ss} \end{vmatrix}, \quad \|c_{jk}\| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & \dots & \dots & c_{ss} \end{vmatrix}.$$

* Строгое преобразование от уравнений движения в произвольных независимых координатах ξ к уравнениям движения в главных координатах θ см. в приложении 6.2.

Если одна из двух квадратичных форм определенно положительна, то некоторым линейным преобразованием обе формы всегда можно привести к каноническому виду [49, гл. 8, § 37]; при этом матрицы преобразуются к диагональным матрицам

$$\|a_{\alpha}\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_s \end{array} \right\|, \quad \|c_{\alpha}\| = \left\| \begin{array}{cccc} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_s \end{array} \right\|.$$

Соответственно для систем с идеальными гомогенными связями и консервативными потенциальными силами всегда можно ввести главные координаты.

В заключение остановимся на случаях кратных и нулевых корней характеристического уравнения. Если некоторый корень этого уравнения является кратным, то в качестве общего решения следует опять-таки взять решение вида (6.47). Однако в этом случае коэффициенты Δ_i^{α} , соответствующие кратному корню, не являются алгебраическими дополнениями характеристического детерминанта и должны быть определены из уравнений (6.38). Нужно также иметь в виду, что кратному корню соответствуют главные колебания, одинаковые по частоте, но различные в общем случае по амплитуде и фазе (см. пример 6.9).

Если какая-нибудь собственная частота $\omega_{\alpha} = 0$, то, как видно из (6.49),

$$\theta_{\alpha} = \dot{\theta}_{\alpha 0} t + \theta_{\alpha 0}. \quad (6.51)$$

«Нулевая частота» возникает, например, в том случае, когда потенциальная энергия системы достигает минимума не в одной «точке», а в некоторой области, т. е. в том случае, когда потенциальная энергия не обладает изолированным минимумом (см. примеры 6.10 и 6.11).

Пример 6.7. *Плоские колебания материальной точки, подвешенной на пружине.*

Положение устойчивого равновесия точки, подвешенной на пружине, а именно положение

$$\rho_{\text{eq}} = a + \frac{mg}{\kappa}, \quad \varphi_{\text{eq}} = 0,$$

было определено в примере 6.4. Там же были найдены значения вторых производных потенциальной энергии в рассматриваемом положении. Используя эти результаты, найдем общее решение, описывающее линейные колебания точки в вертикальной плоскости.

Разлагая кинетическую и потенциальную энергии точки в положении устойчивого равновесия, получим

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\xi}^2 + \rho_{\text{eq}}^2 \dot{\varphi}^2), \quad U = \frac{1}{2} (\kappa \xi^2 + mg \rho_{\text{eq}} \varphi^2),$$

где $\xi = \rho - \rho_{\text{eq}}$. Отсюда видно, что координаты ξ и φ являются главными координатами (см. (6.50)). Используя выражения T и U , получим уравнения колебаний (см. (6.49))

$$m \ddot{\xi} + \kappa \xi = 0, \quad \rho_{\text{eq}} \ddot{\varphi} + g \varphi = 0$$

и значения квадратов двух собственных частот

$$\omega_1^2 = \frac{\kappa}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{\rho_{\text{eq}}}.$$

Общим решением уравнений будут функции

$$\xi = a_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1), \quad \varphi = a_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2).$$

Таким образом, колебание точки складывается из гармонического колебания вдоль оси пружины с частотой, равной $(\kappa/m)^{1/2}$, и гармонического колебания математического маятника длины ρ_{eq} с частотой, равной $(g/\rho_{\text{eq}})^{1/2}$.

Пример 6.8. *Колебания системы двух точек на горизонтальном стержне.*

Две точки одинаковой массы m находятся на неподвижном гладком и горизонтальном стержне длины $3a$. Эти точки соединены друг с другом и с концами стержня тремя пружинами, подчиненными закону Гука (жесткость каждой из пружин и длина в ненапряженном состоянии соответственно равны κ и a). Найти закон движения системы вблизи ее положения устойчивого равновесия.

Направим ось Ox вдоль стержня и совместим начало отсчета с одним из концов стержня. Выбирая в качестве независимых координат декартовы координаты точек x_1 и x_2 (рис. 6.8, а), для кинетической энергии системы получим выражение

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2).$$

Потенциальная энергия U системы складывается из энергии упругой деформации всех пружин, т. е.

$$U = \frac{\kappa}{2} [(\Delta l_1)^2 + (\Delta l_2)^2 + (\Delta l_3)^2],$$

где Δl_i ($i=1, 2, 3$) — удлинения пружин, соответственно равные

$$\Delta l_1 = x_1 - a, \quad \Delta l_2 = x_2 - x_1 - a, \quad \Delta l_3 = 2a - x_2.$$

В данном случае положение устойчивого равновесия очевидно и определяется координатами

$$x_{1eq} = a, \quad x_{2eq} = 2a.$$

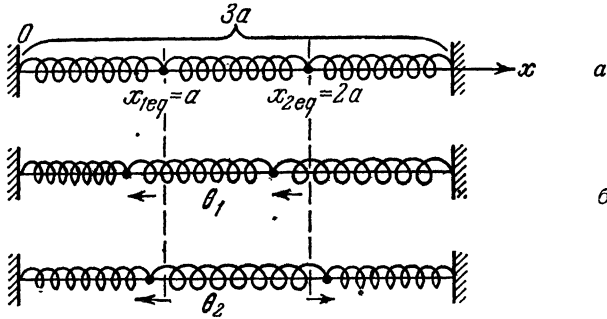


Рис. 6.8

Кинетическая и потенциальная энергии как функции отклонений от этого положения и обобщенных скоростей будут соответственно равны

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2), \quad U = \kappa (\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_1 \xi_2),$$

где $\xi_1 = x_1 - a$, $\xi_2 = x_2 - 2a$.

Соответственно уравнения движения (6.34) примут вид

$$\ddot{\xi}_1 + 2\omega^2 \xi_1 - \omega^2 \xi_2 = 0, \quad -\omega^2 \xi_1 + \ddot{\xi}_2 + 2\omega^2 \xi_2 = 0,$$

где $\omega^2 = \kappa/m$.

Повторяя общую процедуру решения уравнений, запишем уравнения для амплитуд (см. (6.36))

$$(\lambda^2 + 2\omega^2)C_1 - \omega^2 C_2 = 0, \quad -\omega^2 C_1 + (\lambda^2 + 2\omega^2)C_2 = 0$$

и характеристическое уравнение (см. (6.37))

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \lambda^2 + 2\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее уравнение распадается на два квадратных уравнения, решение которых приводит к четырем собственным значениям λ :

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2,$$

где $\omega_1^2 = \frac{\kappa}{m}$, $\omega_2^2 = 3\frac{\kappa}{m}$.

Подставляя λ_1 в первое из уравнений для амплитуд, найдем

$$(\lambda_1^2 + 2\omega^2)C_1^{(1)} - \omega^2 C_2^{(1)} = 0, \text{ т. е. } C_2^{(1)} = C_1^{(1)}.$$

Аналогично получим, что

$$C_2^{(2)} = C_1^{(2)}, C_2^{(3)} = -C_1^{(3)}, C_2^{(4)} = -C_1^{(4)}.$$

Используя эти соотношения, находим общее решение (см. (6.39))

$$\xi_1 = \theta_1 + \theta_2, \quad \xi_2 = \theta_1 - \theta_2,$$

где

$$\theta_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1), \quad \theta_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2).$$

Итак, колебания системы двух точек в общем случае характеризуются двумя собственными частотами ω_1, ω_2 и складываются из двух главных колебаний. Главное колебание θ_1 осуществляется (см. рис. 6.8, б), если в начальный момент времени средняя пружина не растянута, обе точки одинаково отклонены в одну сторону и имеют одинаковые начальные скорости (по величине и направлению). В этом случае средняя пружина в любой момент времени не напряжена и, следовательно, не влияет на колебания точек; соответственно частота этого колебания равна $(\kappa/m)^{1/2}$. Главное колебание θ_2 осуществляется, если в начальный момент боковые пружины одинаково сжаты (или растянуты), а скорости точек одинаковы по величине и противоположно направлены (рис. 6.8, в). Соответственно частота второго колебания больше частоты первого колебания и равна $(3\kappa/m)^{1/2}$.

Пример 6.9. Маятник с кратными собственными частотами.

Две материальные точки 1 и 2 с одинаковыми массами m соединены невесомым стержнем длины $2l$. Центр этого маятника движется по горизонтальному гладкому и неподвижному стержню длины $2a$ (рис. 6.9). Каждая из точек 1 и 2 соединена с двумя одинаковыми пружинами жесткости κ и длины a в ненапряженном состоянии. Неподвижные концы пружин закреплены на расстоянии l от горизонтального стержня. Найти общее решение для линейных колебаний маятника в вертикальной плоскости (плоскости рисунка).

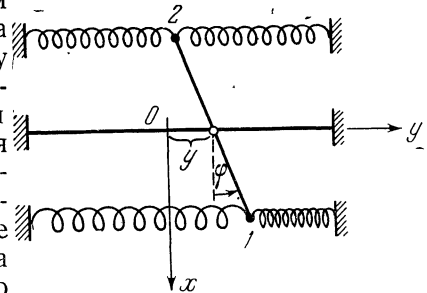


Рис. 6.9

Выберем систему координат так, как это показано на рис. 6.9. В качестве независимых координат возьмем координату y центра

маятника и угол φ его наклона относительно вертикали. Тогда координаты точек 1 и 2 будут соответственно равны

$$\begin{aligned} y_1 &= y + l \sin \varphi, & y_2 &= y - l \sin \varphi, \\ x_1 &= l \cos \varphi, & x_2 &= -l \cos \varphi. \end{aligned}$$

Подставляя в общее выражение для потенциальной энергии маятника

$$U = \frac{\kappa}{2} \sum_{i=1}^4 (\Delta l_i)^2 - mg(x_1 + x_2)$$

приближенные значения удлинений пружин

$$\Delta l_{1,2} = \pm (y + l\varphi), \quad \Delta l_{3,4} = \pm (y - l\varphi),$$

получим

$$U = 2\kappa (y^2 + l^2\varphi^2).$$

Кинетическая энергия маятника в тех же обобщенных переменных и с той же точностью будет равна

$$T = m\dot{y}^2 + ml^2\dot{\varphi}^2.$$

Из выражений для T и U следует, что y и φ являются главными координатами, удовлетворяющими уравнениям Лагранжа:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

где $\omega^2 = 2\kappa/m$. Корни характеристического уравнения этой системы кратны, соответственно чему общее решение определяется двумя главными колебаниями с одинаковыми частотами и с различными, вообще говоря, амплитудами и фазами;

$$y = a_1 \cos(\omega t + \beta_1), \quad \varphi = \frac{1}{l} a_2 \cos(\omega t + \beta_2).$$

Эти колебания можно осуществить, задавая «симметричные» и «антисимметричные» начальные условия (см. предыдущий пример).

Пример 6.10. Продольные колебания невращающейся двухатомной молекулы.

Известно, что внутренняя энергия двухатомной молекулы с хорошей степенью точности описывается потенциалом как функцией расстояния r между атомами [43, с. 225]:

$$U = D \left[1 - e^{-\sqrt{\frac{\kappa}{2D}}(r-a)} \right]^2 - D,$$

где D , κ и a — постоянные, характеризующие молекулу (напри-

мер, a является расстоянием между атомами, при котором потенциальная энергия минимальна).

Если отклонение $r - a$ достаточно мало, то энергию взаимодействия атомов можно приближенно записать в виде

$$U = \frac{\kappa}{2} (r - a)^2$$

(здесь опущена несущественная постоянная). Поэтому двухатомную молекулу можно представлять как систему двух материальных точек с массами m_1 и m_2 , соединенных между собой пружиной жесткости κ и длины a в ненапряженном состоянии. Предполагая, что такая молекула движется только вдоль своей оси, т. е. вдоль оси пружины, найти закон движения молекулы.

Совмещая декартову ось Ox с осью молекулы, получим выражения для кинетической и потенциальной энергий молекулы:

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2, \quad U = \frac{\kappa}{2} (x_2 - x_1 - a)^2.$$

Отсюда видно, что U обращается в нуль не только в некотором фиксированном положении $x_{2\text{eq}} - x_{1\text{eq}} = a$, но и в любом другом положении, соответствующем требованию $x_2 - x_1 = a$. Следовательно, U не имеет изолированного минимума в положении $x_{2\text{eq}} - x_{1\text{eq}} = a$. Несмотря на это, применим метод решения, изложенный в настоящем параграфе (оправданность этого шага будет видна в дальнейшем).

Введем отклонения от положения равновесия

$$\xi_1 = x_1 - x_{1\text{eq}}, \quad \xi_2 = x_2 - x_{2\text{eq}},$$

где $x_{1\text{eq}}$ и $x_{2\text{eq}}$ связаны соотношением $x_{2\text{eq}} - x_{1\text{eq}} = a$.

Выражая T и U через отклонения, получим

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{\xi}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\xi}_2^2, \quad U = \frac{\kappa}{2} (\xi_2 - \xi_1)^2.$$

Соответственно уравнения движения, уравнения для амплитуд и частот будут иметь вид

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \frac{\kappa}{m_1} \xi_1 - \frac{\kappa}{m_1} \xi_2 &= 0, & -\frac{\kappa}{m_2} \xi_1 + \ddot{\xi}_2 + \frac{\kappa}{m_2} \xi_2 &= 0, \\ \left(\lambda^2 + \frac{\kappa}{m_1}\right) C_1 - \frac{\kappa}{m_1} C_2 &= 0, & -\frac{\kappa}{m_2} C_1 + \left(\lambda^2 + \frac{\kappa}{m_2}\right) C_2 &= 0, \\ \Delta(\lambda) = \lambda^2 \left(\lambda^2 + \frac{\kappa}{\mu}\right) &= 0 \end{aligned}$$

(здесь μ — приведенная масса). Из этих уравнений находим частоты и отношение амплитуд

$$\omega_1^2 = \frac{\kappa}{\mu}, \quad \omega_2 = 0, \quad C_2^{(1,2)} = -\frac{m_1}{m_2} C_1^{(1,2)}.$$

Используя эти результаты, получим общее решение

$$\xi_1 = -\frac{m_2}{m} \theta + C_1 t + C_2, \quad \xi_2 = +\frac{m_1}{m} \theta + C_1 t + C_2,$$

где $\theta = C \cos \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} t + \beta \right)$; C , β , C_1 и C_2 — действительные константы, а коэффициенты при θ выбраны в соответствии с решением задачи двух тел (см. (3.7)). Выражая C_1 и C_2 через начальные значения x_{10} , x_{20} , \dot{x}_{10} , \dot{x}_{20} , найдем общее решение для x_1 и x_2 :

$$x_1 = x_{m0} + \dot{x}_{m0} t - \frac{m_2}{m} (a + \theta),$$

$$x_2 = x_{m0} + \dot{x}_{m0} t + \frac{m_1}{m} (a + \theta),$$

где

$$\dot{x}_{m0} = \frac{1}{m} (m_1 \dot{x}_{10} + m_2 \dot{x}_{20}), \quad x_{m0} = \frac{1}{m} (m_1 x_{10} + m_2 x_{20}).$$

Используя систему центра масс молекулы, ту же задачу можно решить короче. В этой системе кинетическая и потенциальная энергии молекулы выражаются формулами

$$T = \frac{\mu}{2} \dot{x}^2, \quad U = \frac{\kappa}{2} (x - a)^2,$$

где $x = x_2 - x_1$ (см. (3.7)). Отсюда можно найти уравнение Лагранжа

$$\mu \ddot{\theta} + \kappa \theta = 0,$$

где $\theta = x - a$, а затем, используя соотношения задачи двух тел, получить решение

$$x_1' = x_{1\text{eq}}' - \frac{m_2}{m} \theta, \quad x_2' = x_{2\text{eq}}' + \frac{m_1}{m} \theta,$$

где

$$\theta = C \cos \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} t + \beta \right).$$

Из обоих решений видно, что движение молекулы складывается из движения молекулы как целого со скоростью \dot{x}_{m0} (с чем связана нулевая частота, появившаяся в первом решении) и колебаний атомов с частотой $(\kappa/m)^{1/2}$, которые совершаются в системе центра масс около положения устойчивого равновесия

$$x_{1\text{eq}}' = -\frac{m_2}{m} a, \quad x_{2\text{eq}}' = +\frac{m_1}{m} a.$$

Колебания первого и второго атомов совершаются в противофазе с отношением амплитуд, равным m_2/m_1 .

Пример 6.11. Продольные колебания линейной трехатомной симметричной молекулы.

Рассмотрим трехатомную молекулу как систему, состоящую из трех точек с массами m_1 , m_2 и m_1 , расположенных на одной прямой и соединенных между собой одинаковыми пружинами

(длина в ненапряженном состоянии и жесткость каждой из пружин соответственно равны a и κ). Найти собственные частоты колебаний невращающейся молекулы и закон ее движения.

Решая задачу в произвольной инерциальной системе отсчета, мы, так же как и в предыдущем примере, получим нулевую частоту, связанную с поступательным движением молекулы как целого. Однако проще с самого начала исключить эту частоту и рассматривать колебания молекулы в системе ее центра масс.

Направим декартову ось Ox по оси молекулы (рис. 6.10, а). Тогда кинетическая и потенциальная энергии будут соответственно равны

$$T = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2,$$

$$U = \frac{\kappa}{2} \{ (x_2 - x_1 - a)^2 + (x_3 - x_2 - a)^2 \}.$$

Здесь координаты точек связаны соотношением (см. (4.48))

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_1 x_3 = 0,$$

с помощью которого из выражений для T и U можно исключить, например, x_2 . В результате получим

$$T = \frac{m_1}{2m_2} (m_1 + m_2) (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_1^2}{m_2} \dot{x}_1 \dot{x}_3,$$

$$U = \frac{\kappa}{2} \left\{ \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} x_1 + \frac{m_1}{m_2} x_3 + a \right)^2 + \left(\frac{m_1}{m_2} x_1 + \frac{m_1 + m_2}{m_2} x_3 - a \right)^2 \right\}.$$

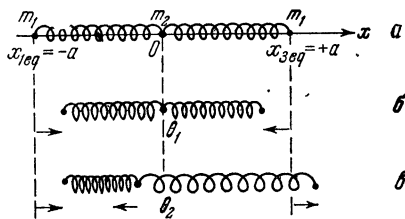


Рис. 6.10

Имея в виду, что положение устойчивого равновесия в системе S_m определяется равенствами

$$x_{1 \text{ eq}} = -a, \quad x_{2 \text{ eq}} = 0, \quad x_{3 \text{ eq}} = a,$$

и вводя в качестве переменных отклонения от этого положения

$$\xi_1 = x_1 + a, \quad \xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = x_3 - a,$$

в независимых координатах ξ_1 и ξ_3 найдем

$$T = \frac{m_1}{2m_2} (m_1 + m_2) (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_3^2) + \frac{m_1^2}{m_2} \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_3,$$

$$U = \frac{\kappa}{2m_2^2} \{[(m_1 + m_2) \xi_1 + m_1 \xi_3]^2 + [m_1 \xi_1 + (m_1 + m_2) \xi_3]^2\}.$$

Используя эти функции, придем к уравнениям движения, уравнениям для амплитуд и характеристическому уравнению:

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_{01}^2 \xi_1 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\ddot{\xi}_3 + \omega_{02}^2 \xi_3) = 0,$$

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} (\ddot{\xi}_1 + \omega_{02}^2 \xi_1) + \ddot{\xi}_3 + \omega_{01}^2 \xi_3 = 0;$$

$$(\lambda^2 + \omega_{01}^2) C_1 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\lambda^2 + \omega_{02}^2) C_3 = 0,$$

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} (\lambda^2 + \omega_{02}^2) C_1 + (\lambda^2 + \omega_{01}^2) C_3 = 0;$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda^2 + \omega_{01}^2)^2 - \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} (\lambda^2 + \omega_{02}^2)^2 = 0,$$

где

$$\omega_{01}^2 = \kappa \frac{m_1^2 + (m_1 + m_2)^2}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)},$$

$$\omega_{02}^2 = \kappa \frac{2(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}.$$

Характеристическому уравнению удовлетворяют

$$\lambda_{1,2}^2 = -\omega_1^2, \quad \lambda_{3,4}^2 = -\omega_2^2,$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{\kappa}{m_1}, \quad \omega_2^2 = \kappa \frac{m}{m_1 m_2},$$

а $m = 2m_1 + m_2$ — масса всей молекулы. Соответственно из уравнений для амплитуд вытекают соотношения

$$C_3^{(1,2)} = -C_1^{(1,2)}, \quad C_3^{(3,4)} = C_1^{(3,4)}.$$

Таким образом, общее решение будет иметь вид

$$\xi_1 = \theta_1 + \theta_2, \quad \xi_3 = -\theta_1 + \theta_2,$$

где

$$\theta_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1), \quad \theta_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2).$$

Возвращаясь к переменным x_1, x_2, x_3 и учитывая соотношения между ними, окончательно найдем

$$x_1 = -a + \theta_1 + \theta_2,$$

$$x_2 = -\frac{2m_1}{m_2} \theta_2,$$

$$x_3 = +a - \theta_1 + \theta_2.$$

Из этого решения видно, что продольные колебания трехатомной симметричной молекулы сводятся к наложению двух главных колебаний. Главное колебание θ_1 совершается с частотой $(\kappa/m_1)^{1/2}$ и осуществляется, если в начальный момент времени отклонения и скорости двух крайних атомов одинаковы по величине и направлены в разные стороны, средний атом в этом случае все время находится в центре масс молекулы (рис. 6.10, б). Второе главное колебание θ_2 с частотой $\left(\kappa \frac{m}{m_1 m_2}\right)^{1/2}$ асимметрично; для его осуществления нужно задать одинаковые начальные условия для крайних атомов; что касается атома 2, то его начальные отклонения и скорость должны относиться к отклонениям и скоростям крайних атомов как $-2m_1/m_2$ (рис. 6.10, в).

Пример 6.12. Теплоемкость кристалла.

При сравнительно невысоких температурах атомы кристалла совершают линейные колебания около узлов кристаллической решетки, т. е. около положений устойчивого равновесия. Поэтому энергия атомов кристалла будет равна (см. (6.32) и (6.33)).

$$E = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{3N} (a_{jk} \dot{\xi}_j \dot{\xi}_k + c_{jk} \xi_j \xi_k), \quad (1)$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — проекции отклонения первого атома от «своего» узла и т. д. Выражение (1) в главных координатах θ имеет вид

$$E = \sum_{\alpha=1}^{3N} E_{\alpha}, \quad (2)$$

где

$$E_{\alpha} = \frac{1}{2} a_{\alpha} \dot{\theta}_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} c_{\alpha} \theta_{\alpha}^2. \quad (3)$$

Отсюда ясно, что полную энергию кристалла можно представить как сумму энергий $3N$ независимых осцилляторов.

Согласно теореме о вирнале сил (см. (2.52)) $\bar{E}_\alpha = 2\bar{T}_\alpha$. Полагая далее, что энергия \bar{E} в среднем *равнораспределена* по всем осцилляторам, из (2) найдем

$$\bar{E} = 6N\bar{T}_\alpha, \quad (4)$$

где \bar{T}_α — средняя кинетическая энергия любого α -го осциллятора. Далее определим абсолютную температуру T системы как величину, пропорциональную средней кинетической энергии \bar{T}_α , т. е. положим $\bar{T}_\alpha = \frac{k}{2} T$ (здесь множитель k — *постоянная*

Больцмана — имеет размерность энергии, деленной на градус). Тогда средняя энергия кристалла запишется в виде $E = 3kNT$, а теплоемкость c кристалла, т. е. отношение приращения средней энергии к приращению температуры, будет равна $c = 3kN$ (закон Дюлонга — Пти).

Приложение 6.1. *Общие соотношения, которым подчинены собственные значения λ для систем с идеальными голономными стационарными связями и потенциальными стационарными силами*

Умножая каждое из уравнений системы (6.38) на соответствующую комплексно сопряженную амплитуду $(C_j^\alpha)^*$ и складывая все результаты умножения, получим

$$\left(\sum_{j,k} a_{jk} (C_j^\alpha)^* C_k^\alpha \right) \lambda_\alpha^2 + \left(\sum_{j,k} c_{jk} (C_j^\alpha)^* C_k^\alpha \right) = 0. \quad (1)$$

Входящие в это соотношение билинейные формы от амплитуд $(C^\alpha)^*$ и C^α соответствуют квадратичным формам T и U . Действительно, выполняя в (6.32) замену

$$\xi_j \rightarrow (C_j^\alpha)^*, \quad \dot{\xi}_k \rightarrow C_k^\alpha,$$

найдем билинейную форму $T((C^\alpha)^*, C^\alpha)$. Производя аналогичную замену в (6.33), получим билинейную форму $U((C^\alpha)^*, C^\alpha)$. Используя эти обозначения, запишем соотношение (1) в виде *

* Соотношение (2) не может служить уравнением для отыскания λ_α , поскольку билинейные формы T и U зависят от амплитуд, определение которых требует знания λ_α . Однако соотношение (2) может быть полезным для общего анализа корней характеристического уравнения (6.37).

$$T((C^\alpha)^*, C^\alpha) \lambda_\alpha^2 + U((C^\alpha)^*, C^\alpha) = 0. \quad (2)$$

Квадратичные формы T и U являются положительно определенными формами с действительными симметричными коэффициентами. Следовательно, билинейные формы $T((C^\alpha)^*, C^\alpha)$ и $U((C^\alpha)^*, C^\alpha)$ являются действительными положительными величинами при любом α . Чтобы убедиться в этом, представим амплитуды C в виде

$$C_k = u_k + iv_k, \quad C_j^* = u_j - iv_j,$$

где коэффициенты u и v вещественны. Тогда для билинейной формы T получим

$$T(C^*, C) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk} (u_j u_k + v_j v_k) + \frac{i}{2} \sum_{j,k} a_{jk} (u_j v_k - u_k v_j).$$

Мнимая часть формы $T(C^*, C)$ равна нулю в силу симметрии коэффициентов a_{jk} и антисимметрии множителей $u_j v_k - u_k v_j$. Действительная часть той же формы равна сумме билинейных форм от вещественных амплитуд u и v , т. е.

$$T(C^*, C) = T(u, u) + T(v, v).$$

Если хотя бы один из коэффициентов u или v отличен от нуля (а нас интересует именно такой случай нетривиального решения), то $T(C^*, C) > 0$. Аналогично найдем, что $U(C^*, C) > 0$. Таким образом, из соотношения (2) действительно вытекает свойство (6.40).

Приложение 6.2. Уравнения Лагранжа в главных координатах.

Чтобы получить уравнения (6.49), найдем исходя из (6.32) и (6.33) кинетическую и потенциальную энергии в главных координатах. Например, подставляя (6.47) в (6.33), получим

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left(\sum_{j,k} c_{jk} \Delta_j^\alpha \Delta_k^\beta \right) \theta_\alpha \theta_\beta. \quad (1)$$

Эта форма зависит только от квадратов θ , поскольку коэффициенты при произведениях $\theta_\alpha \theta_\beta$ ($\alpha \neq \beta$) равны нулю:

$$\sum_{j,k} c_{jk} \Delta_j^\alpha \Delta_k^\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \quad (2)$$

Действительно, умножая каждое из уравнений (6.38) на амплитуду C_j^β и складывая все результаты умножения, найдем соотношения, аналогичные соотношениям (2) приложения 6.1:

$$T(C^\beta C^\alpha) \lambda_\alpha^2 + U(C^\beta C^\alpha) = 0. \quad (3)$$

Таким же образом получим соотношение для λ_β

$$T(C^\alpha C^\beta) \lambda_\beta^2 + U(C^\alpha C^\beta) = 0. \quad (4)$$

Ввиду симметрии коэффициентов a_{jk} и c_{jk} билинейные формы, входящие в (3) и (4), также симметричны относительно индексов α и β , т. е.

$$T(C^\beta C^\alpha) = T(C^\alpha C^\beta), \quad U(C^\beta C^\alpha) = U(C^\alpha C^\beta). \quad (5)$$

Используя это свойство, из соотношений (3) и (4) найдем

$$T(C^\beta C^\alpha) (\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2) = 0 \quad (\alpha \neq \beta).$$

Отсюда, предполагая отсутствие кратных корней, получим

$$T(C^\alpha C^\beta) = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \quad (6)$$

и, следовательно, (см. (3)),

$$U(C^\alpha C^\beta) = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \quad (7)$$

Представляя билинейную форму

$$U(C^\alpha C^\beta) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} c_{jk} C_j^\alpha C_k^\beta$$

с помощью (6.42) в виде

$$\frac{1}{2} C_\alpha C_\beta \sum_{i,k} c_{jk} \Delta_j^\alpha \Delta_k^\beta$$

(здесь C_α и C_β отличны от нуля) и используя соотношения (7), убеждаемся в справедливости (2).

Учитывая эти соотношения, найдем потенциальную энергию в главных координатах

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s c_\alpha \theta_\alpha^2, \quad (8)$$

где

$$c_\alpha = \sum_{i,k} c_{jk} \Delta_j^\alpha \Delta_k^\alpha,$$

Аналогично для кинетической энергии получим выражение

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s a_\alpha \dot{\theta}_\alpha^2, \quad (9)$$

где

$$a_{\alpha} = \sum_{j,k} a_{jk} \Delta_j^{\alpha} \Delta_k^{\alpha}.$$

С помощью (8) и (9) нетрудно убедиться, что уравнения Лагранжа в главных координатах имеют вид (6.49).

§ 6.4. Собственные колебания системы под действием потенциальных, гироскопических и диссипативных сил

Рассмотрим колебания системы при наличии потенциальных и гироскопических сил, а также диссипативных сил, линейных относительно скоростей точек. В остальном сохраним предположения о силах и связях, сформулированные в предыдущем параграфе. Тогда кинетическая энергия T , обобщенный потенциал \mathcal{U} и диссипативная функция D будут иметь вид (см. (5.55), (5.75), (5.81))

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad \mathcal{U} = \sum_{j=1}^s U_j \dot{q}_j + \mathcal{U}^{(0)},$$

$$D = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (6.52)$$

где все функции a_{jk} , U_j , $\mathcal{U}^{(0)}$ и b_{jk} зависят только от координат, поскольку силы и связи стационарны; кроме того, коэффициенты a_{jk} и b_{jk} симметричны относительно перестановок индексов.

Разлагая T , \mathcal{U} и D в положении устойчивого равновесия с точностью до членов второго порядка малости включительно, можно получить линейные уравнения движения. Однако эти уравнения легче получить, проводя разложение обеих частей уравнений Лагранжа (5.77) с точностью до членов первого порядка.

Запишем исходные уравнения (5.77) с учетом (5.80)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (6.53)$$

Используя выражение для кинетической энергии (см. (6.52)), представим левые части системы (6.53) в виде

$$\sum_{k=1}^s a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k,l=1}^s \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} \dot{q}_l \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^s \frac{\partial a_{lk}}{\partial q_j} \dot{q}_l \dot{q}_k. \quad (6.54)$$

Затем, учитывая, что производные от обобщенного потенциала соответственно равны

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{dU_j}{dt} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial U_j}{\partial q_k} \dot{q}_k,$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial U_k}{\partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{U}^{(0)}}{\partial q_j},$$

для обобщенно-потенциальной силы получим выражения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j} = - \sum_{k=1}^s \gamma_{jk} \dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{U}^{(0)}}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (6.55)$$

где $\gamma_{jk} = \frac{\partial U_k}{\partial q_j} - \frac{\partial U_j}{\partial q_k}$ — коэффициенты, антисимметричные по индексам. Для обобщенных диссипативных сил соответственно найдем

$$Q_j^d = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = - \sum_{k=1}^s b_{jk} \dot{q}_k \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (6.56)$$

Теперь разложим все члены, входящие в уравнения Лагранжа, в положении устойчивого равновесия, т. е. в положении изолированного минимума обычной потенциальной энергии $\mathcal{U}^{(0)}$ (см. достаточный признак устойчивости на с. 263). Это положение определяется из уравнений

$$\left. \frac{\partial \mathcal{U}^{(0)}}{\partial q_j} \right|_{q_1=q_1 \text{ eq}, \dots, q_s=q_s \text{ eq}} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (6.57)$$

Разложение доведем до членов первого порядка малости включительно по степеням отклонений ξ_j и обобщенных скоростей $\dot{\xi}_j$ ($j=1, 2, \dots, s$). В результате из (6.54), (6.55) и (6.56) с учетом (6.57) получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^s (a_{jk})_{\text{eq}} \ddot{\xi}_k,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j} = - \sum_{k=1}^s (\gamma_{jk})_{\text{eq}} \dot{\xi}_k - \sum_{k=1}^s (c_{jk})_{\text{eq}} \xi_k, \quad (6.58)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s (b_{jk})_{\text{eq}} \dot{\xi}_k,$$

$$\text{где } c_{jk} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}^{(0)}}{\partial q_j \partial q_k}.$$

Подставляя (6.58) в (6.53) и опуская для простоты записи знак равновесия eq, найдем интересующие нас уравнения

$$\sum_{k=1}^s \{a_{jk} \ddot{\xi}_k + (b_{jk} + \gamma_{jk}) \dot{\xi}_k + c_{jk} \xi_k\} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (6.59)$$

В этой системе уравнений коэффициенты a_{jk} , b_{jk} , c_{jk} симметричны, а γ_{jk} антисимметричны относительно перестановки индексов.

Общая процедура решения системы (6.59) аналогична методу решения системы (6.34). Поэтому сразу приведем соответствующее характеристическое уравнение и уравнения для амплитуд:

$$\det \{a_{jk} \lambda^2 + (b_{jk} + \gamma_{jk}) \lambda + c_{jk}\} = 0, \quad (6.60)$$

$$\sum_{k=1}^s \{a_{jk} \lambda_\alpha^2 + (b_{jk} + \gamma_{jk}) \lambda_\alpha + c_{jk}\} C_k = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (6.61)$$

Общее решение системы (6.59) имеет вид

$$\xi_k = \text{Re} \sum_{\alpha=1}^{2s} C_k^\alpha e^{\lambda_\alpha t} \quad (k = 1, 2, \dots, s), \quad (6.62)$$

где λ_α определяются из (6.60), а отношения амплитуд — из (6.61).

Каждое из собственных значений λ может быть либо комплексным (и тогда сопряженное ему число также будет корнем характеристического уравнения), либо вещественным. Таким образом, каждое из собственных значений λ можно записать в одной из форм

$$\lambda_\alpha^{+,-} = -\mu_\alpha \pm i\omega_\alpha, \quad \lambda_\alpha^{\pm,-} = -\mu_\alpha^{\pm,-}, \quad (6.63)$$

где ω_α , μ_α , $\mu_\alpha^{\pm,-}$ — действительные величины. Это следует из известной теоремы о корнях алгебраического уравнения с действительными коэффициентами [49, с. 159—161]. Кроме того, можно утверждать, что все коэффициенты затухания μ_α , μ_α^+ , μ_α^- положительны. Действительно, согласно закону (5.96) энергия системы со стационарными силами и связями убывает за счет работы диссипативных сил. Ввиду того, что в общем решении имеются экспоненциальные множители, это возможно только в случае положительности коэффициентов затухания.

Если диссипация энергии достаточно мала, то все корни λ можно разбить на пары комплексно сопряженных корней, а общее решение имеет вид

$$\xi_k = \sum_{\alpha=1}^s e^{-\mu_{\alpha} t} \operatorname{Re} \{ C_{\alpha}^{+} \Delta_k(\lambda_{\alpha}^{+}) e^{i\omega_{\alpha} t} + C_{\alpha}^{-} \Delta_k(\lambda_{\alpha}^{-}) e^{-i\omega_{\alpha} t} \} \quad (k = 1, 2, \dots, s) \quad (6.64)$$

и описывает затухающие колебания системы. Если диссипация энергии отсутствует (т. е. все коэффициенты $b_{jk}=0$), то корни будут чисто мнимыми, коэффициенты затухания равны нулю, а система совершает незатухающие колебания. Наконец, если все коэффициенты b_{jk} достаточно велики, то все корни λ вещественны. В этом случае система совершает аperiodическое движение, которое описывается решением

$$\xi_k = \sum_{\alpha=1}^s \{ e^{-\mu_{\alpha}^{+} t} \operatorname{Re} (C_{\alpha}^{+} \Delta_k(\lambda_{\alpha}^{+})) + e^{-\mu_{\alpha}^{-} t} \operatorname{Re} (C_{\alpha}^{-} \Delta_k(\lambda_{\alpha}^{-})) \} \quad (k = 1, 2, \dots, s). \quad (6.64')$$

Если среди всех корней характеристического уравнения часть корней является комплексной, а часть действительной, то соответствующую форму общего решения нетрудно получить из (6.62).

В общем случае при наличии диссипативных и гироскопических сил алгебраические дополнения, определяющие отношение амплитуд в решении (6.62), не удовлетворяют требованию (6.45), т. е. имеют место неравенства

$$\Delta_k(\lambda_{\alpha}^{+}) \neq \Delta_k(\lambda_{\alpha}^{-}) \quad (k, \alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (6.65)$$

Однако в частных случаях и при наличии диссипативных сил возможно выполнение требований (6.45) и введение «главных» координат (в том смысле, что каждое из уравнений (6.59), записанное в таких переменных, будет уравнением относительно какой-либо одной переменной).

Пример 6.13. *Движение маятников, соединенных пружиной, в среде с сопротивлением.*

Точки подвеса двух одинаковых математических маятников длины l и массы m находятся на расстоянии a друг от друга и расположены на одной горизонтали. Точки соединены между собой пружиной жесткости κ и длины a в ненапряженном состоянии. Вся система помещена в среду с сопротивлением, пропорциональ-

ным первой степени скорости тела (коэффициент сопротивления k). Найти закон движения маятников в вертикальной плоскости, проходящей через точки подвеса, вблизи положения устойчивого равновесия системы*.

Выберем систему координат так, как это показано на рис. 6.11, а в качестве независимых координат возьмем φ_1 и φ_2 — углы отклонения каждого маятника от положения устойчивого равновесия: $\varphi_{1eq} = \varphi_{2eq} = 0$. Тогда удлинение пружины для малых отклонений и энергия ее упругой деформации с точностью до величин второго порядка малости будут соответственно равны

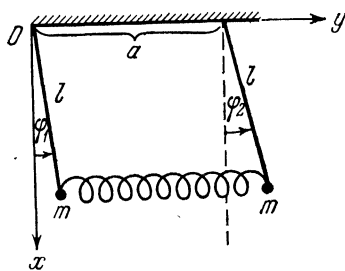


Рис. 6.11

$$l |\varphi_2 - \varphi_1|, \quad \frac{\kappa}{2} l^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2.$$

С той же точностью для потенциальной энергии обоих маятников в поле тяжести получим выражение

$$-mgl(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \approx -2mgl + \frac{mgl}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2).$$

Следовательно, потенциальная энергия системы будет равна

$$U = \frac{1}{2} \{ (mgl + \kappa l^2) \varphi_1^2 + (mgl + \kappa l^2) \varphi_2^2 - 2\kappa l^2 \varphi_1 \varphi_2 \}.$$

(здесь опущена несущественная постоянная). Выражения для кинетической энергии и диссипативной функции будут иметь вид

$$T = \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2), \quad D = \frac{kl^2}{2} (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2.$$

Квадратичные формы T , D и U могут быть заданы с помощью матриц

$$\left\| \begin{array}{cc} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cc} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cc} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{array} \right\|,$$

* Метод решения данной задачи применим к решению ряда задач о колебаниях немеханических систем; например, задача об индуктивно связанных электрических контурах решается в полной аналогии с данным примером.

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = ml^2, & b_{11} &= b_{22} = kl^2, \\ c_{11} &= c_{22} = mgl + \kappa l^2, & c_{12} &= c_{21} = -\kappa l^2. \end{aligned}$$

Записывая линейные уравнения движения в форме (6.59)

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{\Phi}_1 + b_{11}\dot{\Phi}_1 + c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2 &= 0, \\ c_{21}\Phi_1 + a_{22}\ddot{\Phi}_2 + b_{22}\dot{\Phi}_2 + c_{22}\Phi_2 &= 0, \end{aligned}$$

найдем характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Учитывая, что $a_{11}=a_{22}$, $b_{11}=b_{22}$, $c_{11}=c_{22}$ и $c_{12}=c_{21}$, это уравнение можно записать в виде

$$(a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11})^2 = c_{12}^2$$

или в виде двух квадратных уравнений

$$\lambda^2 + \frac{b_{11}}{a_{11}}\lambda + \frac{c_{11} \pm c_{12}}{a_{11}} = 0$$

с коэффициентами

$$\frac{b_{11}}{a_{11}} = \frac{k}{m}, \quad \frac{c_{11} \pm c_{12}}{a_{11}} = \begin{cases} \frac{g}{l}, \\ \frac{g}{l} + \frac{2\kappa}{m}. \end{cases}$$

Таким образом, решение характеристического уравнения приводит к четырем собственным значениям λ :

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\omega_1, \quad \lambda_{3,4} = -\mu \pm i\omega_2,$$

где

$$\omega_1 = (\omega_0^2 - \mu^2)^{1/2}, \quad \omega_2 = \left(\omega_0^2 + \frac{2\kappa}{m} - \mu^2\right)^{1/2}; \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad \mu = \frac{k}{2m}.$$

Общее решение уравнений движения запишем в виде (6.64)

$$\varphi_k = e^{-\mu t} \sum_{\alpha=1}^2 \operatorname{Re} \{ C_{\alpha}^{+} \Delta_k(\lambda_{\alpha}^{+}) e^{i\omega_{\alpha} t} + C_{\alpha}^{-} \Delta_k(\lambda_{\alpha}^{-}) e^{-i\omega_{\alpha} t} \} \quad (k = 1, 2).$$

Затем получим значения алгебраических дополнений

$$\Delta_1 = a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11}, \quad \Delta_2 = -c_{12}$$

характеристического детерминанта при различных корнях λ характеристического уравнения. Нетрудно убедиться, что

$$\Delta_1(\lambda_1^+) = \Delta_1(\lambda_1^-) = -c_{12},$$

$$\Delta_1(\lambda_2^+) = \Delta_1(\lambda_2^-) = +c_{12},$$

а дополнение Δ_2 , как видно, не зависит от λ . В связи с этим общее решение может быть записано в виде

$$\varphi_1 = \theta_1 - \theta_2, \quad \varphi_2 = \theta_1 + \theta_2.$$

Здесь θ_1 и θ_2 соответственно равны

$$\theta_1 = \begin{cases} a_1 e^{-\mu t} \cos(\omega_1 t + \beta_1), & \text{если } \omega_0^2 > \mu^2, \\ C_1 e^{-\mu_1 t} + C_2 e^{-\mu_2 t}, & \text{если } \omega_0^2 < \mu^2 \end{cases}$$

$$(\mu_{1,2} = \mu \pm (\mu^2 - \omega_0^2)^{1/2});$$

$$\theta_2 = \begin{cases} a_2 e^{-\mu t} \cos(\omega_2 t + \beta_2), & \text{если } \omega_0^2 + \frac{2\kappa}{m} > \mu^2, \\ C_3 e^{-\mu_3 t} + C_4 e^{-\mu_4 t}, & \text{если } \omega_0^2 + \frac{2\kappa}{m} < \mu^2 \end{cases}$$

$$(\mu_{3,4} = \mu \pm [\mu^2 - (\omega_0^2 + \frac{2\kappa}{m})]^{1/2}).$$

Таким образом, функция θ_1 описывает либо затухающее колебание с частотой ω_1 и коэффициентом затухания μ , либо аperiodическое движение с коэффициентами затухания μ_1 и μ_2 . Функция θ_2 соответственно характеризуется частотой ω_2 и затуханием μ или двумя коэффициентами затухания μ_3 и μ_4 .

Величины θ_1 и θ_2 являются главными координатами системы. Действительно, эти независимые координаты подчинены уравнениям Лагранжа

$$\ddot{\theta}_1 + 2\mu\dot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = 0,$$

$$\ddot{\theta}_2 + 2\mu\dot{\theta}_2 + \left(\omega_0^2 + \frac{2\kappa}{m}\right)\theta_2 = 0,$$

каждое из которых является уравнением относительно одной из этих координат. Соответственно T , D и U , выраженные через главные координаты, будут содержать только квадраты переменных, т. е. коэффициенты этих форм будут образовывать диагональные матрицы:

$$\|a_\alpha\| = \begin{vmatrix} 2ml^2 & 0 \\ 0 & 2ml^2 \end{vmatrix}, \quad \|b_\alpha\| = \begin{vmatrix} 2kl^2 & 0 \\ 0 & 2kl^2 \end{vmatrix}, \quad \|c_\alpha\| = \begin{vmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & 2mgl + 4\kappa l^2 \end{vmatrix}.$$

Главное «колебание» θ_1 осуществляется, если начальные отклонения обоих маятников и их скорости соответственно равны меж-

ду собой (рис. 6.12, а). Если же начальные отклонения обоих маятников и их скорости соответственно равны по величине, но противоположны по знаку, то реализуется второе главное «колебание» θ_2 (рис. 6.12, б).

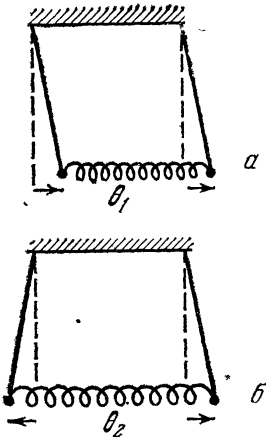


Рис 6.12

В заключение отметим частные случаи. Пусть, например, сопротивление достаточно мало, т. е. $\omega_0^2 > \mu^2$. Тогда функции θ_1 и θ_2 описывают затухающие гармонические колебания. Если же маятники помещены в достаточно вязкую среду

$$\left(\omega_0^2 + \frac{2\kappa}{m} > \mu^2 > \omega_0^2 \right),$$

то θ_1 изменяется аperiodически, а θ_2 совершает затухающее колебание. Наконец, в весьма вязкой среде, когда

$$\mu^2 > \omega_0^2 + \frac{2\kappa}{m},$$

обе главные координаты описывают аperiodические движения.

Пример 6.14. *Линейный заряженный осциллятор в магнитном поле.*

Точка массы m с зарядом e движется в постоянном однородном магнитном поле напряженности \mathcal{H} . На материальную точку также действует сила притяжения, пропорциональная расстоянию до центра силы O (коэффициент пропорциональности κ). Найти частоты колебаний осциллятора и закон его движения.

Выбирая систему декартовых координат с началом в точке O и осью Oz , направленной вдоль \mathcal{H} , и проектируя правую и левую части уравнения движения точки

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\kappa\mathbf{r} + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}}\mathcal{H}]$$

на координатные оси, получим систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} + \omega_\kappa^2 x - \omega_c \dot{y} = 0,$$

$$\omega_c \dot{x} + \ddot{y} + \omega_\kappa^2 y = 0,$$

$$\ddot{z} + \omega_\kappa^2 z = 0,$$

где

$$\omega_\kappa^2 = \frac{\kappa}{m}, \quad \omega_c = \frac{e\mathcal{H}}{mc}.$$

Эти же уравнения можно получить, используя уравнения Лагранжа. Действительно, обобщенный потенциал в рассматриваемой задаче равен (см. (5.65) и (5.75))

$$\mathcal{U} = -\frac{e}{c} \mathbf{A} \dot{\mathbf{r}} + \frac{\kappa}{2} r^2,$$

где \mathbf{A} — вектор-потенциал магнитного поля. Выбор \mathbf{A} диктуется (хотя и неоднозначно) условиями задачи. Например, если положить

$$A_x = A_z = 0, \quad A_y = \mathcal{H}x,$$

то мы сможем удовлетворить условию (см. (5.66))

$$\mathcal{H} \mathbf{n}_z = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Используя выражение для \mathbf{A} , найдем функцию Лагранжа в декартовых координатах

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e\mathcal{H}}{c} xy - \frac{\kappa}{2} (x^2 + y^2 + z^2),$$

которая приведет к полученным выше линейным уравнениям движения.

Соответствующие им уравнения для амплитуд и характеристическое уравнение имеют вид

$$(\lambda^2 + \omega_{\kappa}^2) C_1 - \omega_c \lambda C_2 = 0,$$

$$\omega_c \lambda C_1 + (\lambda^2 + \omega_{\kappa}^2) C_2 = 0,$$

$$(\lambda^2 + \omega_{\kappa}^2) C_3 = 0;$$

$$\Delta(\lambda) = [(\lambda^2 + \omega_{\kappa}^2)^2 + \omega_c^2 \lambda^2] (\lambda^2 + \omega_{\kappa}^2) = 0.$$

Из последнего уравнения находим собственные значения λ :

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2, \quad \lambda_{5,6} = \pm i\omega_3,$$

где

$$\omega_1 = (\omega_{\kappa}^2 + \omega_L^2)^{1/2} + \omega_L,$$

$$\omega_2 = (\omega_{\kappa}^2 + \omega_L^2)^{1/2} - \omega_L,$$

$$\omega_3 = \omega_{\kappa},$$

а $\omega_L = \frac{e\mathcal{H}}{2mc}$ — ларморова частота.

Последовательно подставляя собственные значения λ в уравнения для амплитуд, найдем соотношения между амплитудами:

$$\begin{aligned}
 C_2^{(1)} &= iC_1^{(1)}, & C_2^{(2)} &= -iC_1^{(2)}, \\
 C_2^{(3)} &= -iC_1^{(3)}, & C_2^{(4)} &= iC_1^{(4)}, \\
 C_1^{(5)} &= C_1^{(6)} = C_2^{(5)} = C_2^{(6)} = 0, \\
 C_3^{(1)} &= C_3^{(2)} = C_3^{(3)} = C_3^{(4)} = 0.
 \end{aligned}$$

Используя эти соотношения, придем к общему решению в виде

$$\begin{aligned}
 x &= \operatorname{Re} \{ C_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} + C_1^{(2)} e^{-i\omega_1 t} \} + \operatorname{Re} \{ C_1^{(3)} e^{i\omega_2 t} + C_1^{(4)} e^{-i\omega_2 t} \}, \\
 y &= \operatorname{Re} i \{ C_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} - C_1^{(2)} e^{-i\omega_1 t} \} - \operatorname{Re} i \{ C_1^{(3)} e^{i\omega_2 t} - C_1^{(4)} e^{-i\omega_2 t} \}, \\
 z &= \operatorname{Re} \{ C_3^{(5)} e^{i\omega_3 t} + C_3^{(6)} e^{-i\omega_3 t} \},
 \end{aligned}$$

откуда окончательно находим

$$\begin{aligned}
 x &= a_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2), \\
 y &= a_1 \cos\left(\omega_1 t + \beta_1 + \frac{\pi}{2}\right) - a_2 \cos\left(\omega_2 t + \beta_2 + \frac{\pi}{2}\right), \\
 z &= a_3 \cos(\omega_3 t + \beta_3),
 \end{aligned}$$

где все α и β — постоянные, определяемые начальными условиями.

Итак, колебание проекции заряженной точки на плоскость, перпендикулярную \mathcal{H} , характеризуется частотами ω_1 и ω_2 отличными от ω_{κ} — собственной частоты осциллятора в отсутствие магнитного поля. Интересно отметить, что первое частное решение описывает движение проекций точки по окружности с угловой скоростью ω_1 по часовой стрелке; второе частное решение описывает аналогичное движение с угловой скоростью ω_2 против часовой стрелки. Колебание заряда в направлении \mathcal{H} происходит с собственной частотой ω_{κ} . В случае малой напряженности магнитного поля частоты ω_1 и ω_2 сводятся к сумме и разности собственной частоты осциллятора и ларморовой частоты:

$$\omega_{1,2} \approx \omega_{\kappa} \pm \omega_L.$$

Пример 6.15. *Линейные колебания вращающейся двухатомной молекулы.*

Исходя из той же модели молекулы, что и в примере 6.10, и допуская, что внешние силы отсутствуют, определить частоту линейных колебаний вращающейся молекулы.

Применяя законы сохранения момента и энергии относительно системы центра масс молекулы, получим два интеграла движения в полярных координатах в плоскости движения молекулы (см. (3.12))

$$\mu \rho^2 \dot{\varphi} = M_0, \quad \frac{\mu}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{\kappa}{2} (\rho - a)^2 = E_0,$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, ρ и φ — полярные координаты вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, а M_0 и E_0 — момент и энергия молекулы относительно S_m -системы.

Исключая из интеграла энергии с помощью интеграла момента угловую скорость φ , найдем

$$\frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}} = E_0,$$

где $U_{\text{eff}} = \frac{\kappa}{2} (\rho - a)^2 + \frac{M_0^2}{2\mu\rho^2}$. Функция $U_{\text{eff}}(\rho)$ имеет минимум

(рис. 6.13), причем если $E_0 = (U_{\text{eff}})_{\text{min}}$, то в S_m -системе каждый атом будет двигаться по окружности, а расстояние ρ между ними будет неизменным.

Обозначая расстояние между атомами, соответствующее $(U_{\text{eff}})_{\text{min}}$, символом ρ_{eq} и приравнивая нулю первую производную $U_{\text{eff}}(\rho)$, получим уравнение, определяющее ρ_{eq} :

$$1 - \frac{a}{\rho_{\text{eq}}} = \frac{M_0^2}{\mu \kappa \rho_{\text{eq}}^4}.$$

Если E_0 несколько превышает $(U_{\text{eff}})_{\text{min}}$, то молекула будет вращаться во-

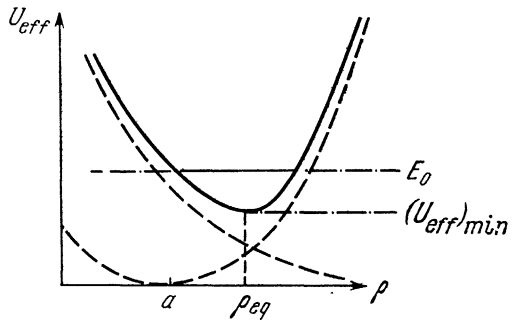


Рис. 6.13

круг своего центра масс с переменной угловой скоростью φ , а атомы будут совершать колебания вдоль оси молекулы. Чтобы найти частоту этих колебаний, разложим U_{eff} в ее минимуме до членов второго порядка малости включительно. Тогда с точностью до несущественной постоянной получим

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \left(\kappa + \frac{3M_0^2}{\mu\rho_{\text{eq}}^4} \right) \xi^2,$$

где $\xi = \rho - \rho_{\text{eq}}$. Таким образом, интеграл энергии примет вид

$$\frac{\mu}{2} \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} \left(\kappa + \frac{3M_0^2}{\mu\rho_{\text{eq}}^4} \right) \xi^2 + \dots = E_0.$$

Дифференцируя правую и левую части этого интеграла по времени, с точностью до линейных членов найдем

$$\ddot{\xi} + \omega_{\text{vib}}^2 \xi = 0,$$

$$\text{где } \omega_{\text{vib}}^2 = \frac{\kappa}{\mu} + \frac{3M_0^2}{\mu^2 \rho_{\text{eq}}^4}.$$

Замечая, что величина $M_0/\mu\rho_{\text{eq}}^2$ равна угловой скорости $\dot{\phi}$ в «равновесии» (когда $\rho = \rho_{\text{eq}}$), приходим к выводу, что квадрат частоты линейных колебаний вращающейся двухатомной молекулы равен сумме квадрата частоты колебаний невращающейся молекулы и утроенного квадрата угловой скорости вращения молекулы в «равновесии», т. е.

$$\omega_{\text{vib}}^2 = \frac{\kappa}{\mu} + 3(\omega_{\text{rot}})_{\text{eq}}^2,$$

где $(\omega_{\text{rot}})_{\text{eq}} = M_0/\mu\rho_{\text{eq}}^2$. Влияние колебаний молекулы на ее угловую скорость вращения можно определить, используя интеграл момента. Тогда с точностью до членов первого порядка включительно найдем, что

$$\dot{\phi} = \omega_{\text{rot}} = (\omega_{\text{rot}})_{\text{eq}} \left(1 - 2 \frac{\xi}{\rho_{\text{eq}}} \right).$$

§ 6.5. Вынужденные колебания

Рассмотрим механическую систему, подчиненную требованиям, сформулированным в начале 6.4, предполагая, что на систему также действуют *нестационарные силы*, т. е. силы, явно зависящие от времени. Ниже мы убедимся, что такая система наряду с собственными колебаниями будет совершать еще и вынужденные колебания. Чтобы получить в этом случае уравнения движения, необходимо линеаризовать уравнения Лагранжа около положения устойчивого равновесия, как это было сделано в § 6.4. Ввиду наличия нестационарных сил вместо уравнений (6.59) здесь будут иметь место уравнения

$$\sum_{k=1}^s \{a_{jk} \ddot{\xi}_k + (b_{jk} + \gamma_{jk}) \dot{\xi}_k + c_{jk} \xi_k\} = Q_j^e(t) \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (6.66)$$

где $Q_j^e(t)$ — заданные функции времени*.

* Система уравнений (6.66) является лишь одной из простейших систем, описывающих движение под действием нестационарных сил. В ряде случаев нестационарность сил приводит к более сложным уравнениям, например к уравнениям с переменными коэффициентами.

Как известно, решение системы (6.66) складывается из общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Решение однородной системы было рассмотрено в предыдущих параграфах. Поэтому рассмотрим только *частное решение* системы (6.66), которое и будет описывать *вынужденные колебания*. Сначала исследуем систему с одной степенью свободы, на которую действует вынуждающая сила, гармонически зависящая от времени. В этом случае уравнение движения имеет вид

$$a_{11}\ddot{\xi}_1 + b_{11}\dot{\xi}_1 + c_{11}\xi_1 = Q_e \cos(\omega_e t + \beta_e), \quad (6.67)$$

где Q_e , ω_e и β_e — соответственно амплитуда, частота и фаза вынуждающей силы. Представляя уравнение (6.67) в комплексной форме

$$a_{11}\ddot{\xi}_1 + b_{11}\dot{\xi}_1 + c_{11}\xi_1 = Q_e e^{i(\omega_e t + \beta_e)}, \quad (6.68)$$

его частное решение будем искать в виде

$$\xi_1 = a_e e^{i\Delta\beta_e} e^{i(\omega_e t + \beta_e)}. \quad (6.69)$$

Подставляя (6.69) в (6.68) и сокращая на общий множитель, найдем комплексную амплитуду

$$a_e e^{i\Delta\beta_e} = Q_e \frac{1}{\Delta(i\omega_e)}, \quad (6.70)$$

где $\Delta(i\omega_e) = a_{11}(i\omega_e)^2 + b_{11}(i\omega_e) + c_{11}$. Далее, записывая (6.70) в виде

$$a_e e^{i\Delta\beta_e} = Q_e \frac{\Delta^*(i\omega_e)}{\Delta(i\omega_e)\Delta^*(i\omega_e)}, \quad (6.71)$$

получим амплитуду a_e и разность фаз $\Delta\beta_e$ как функции частоты ω_e вынуждающей силы:

$$a_e = \frac{Q_e}{a_{11}} \frac{1}{[(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\mu^2\omega_e^2]^{1/2}}, \quad (6.72)$$

$$\operatorname{tg}(\Delta\beta_e) = -\frac{2\mu\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2},$$

где $\omega_0^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}$, $2\mu = \frac{b_{11}}{a_{11}}$. Функции $a_e(\omega_e)$ и $\Delta\beta_e(\omega_e)$ называются *амплитудной* и *фазовой характеристиками* соответственно.

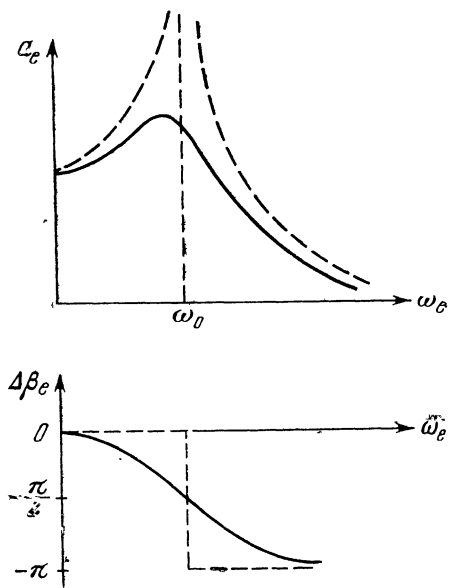


Рис. 6.14

Итак, (6.69) и (6.72) определяют частное решение уравнения (6.67):

$$\xi_e = a_e(\omega_e) \cos[\omega_e t + \beta_e + \Delta\beta_e(\omega_e)]. \quad (6.73)$$

Это решение описывает вынужденное колебание системы. Из (6.73) и (6.72) видно, что амплитуда вынужденного колебания зависит от амплитуды возмущающей силы Q_e и частот ω_e и ω_0 . Если $\omega_e \approx \omega_0$, а затухание достаточно мало ($\mu^2 \ll \ll \omega_0^2$), то имеет место резонанс, т. е. *резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний* (рис. 6.14). Нетрудно также видеть, что вынужденное колебание по фазе всегда отстает от возмущающей

силы, т. е. $\Delta\beta_e$ всегда отрицательна. Приведем выражения a_e и $\Delta\beta_e$ для ряда случаев:

$$a_e \approx \frac{Q_e}{a_{11}} \frac{1}{\omega_0^2},$$

$$\Delta\beta_e \approx 0, \quad \text{если } \omega_e \ll \omega_0;$$

$$(a_e)_{\max} = \frac{Q_e}{a_{11}} \frac{1}{2\mu \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}},$$

$$\text{tg}(\Delta\beta_e) = - \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\mu^2}}{\mu},$$

если $\omega_e^2 = \omega_0^2 - 2\mu^2$;

$$a_e = \frac{Q_e}{a_{11}} \frac{1}{2\mu\omega_0}, \quad (6.74)$$

$$\Delta\beta_e = - \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } \omega_e = \omega_0;$$

$$a_e \approx \frac{Q_e}{a_{11}} \frac{1}{\omega_e^2},$$

$$\operatorname{tg}(\Delta\beta_e) \approx \frac{2\mu}{\omega_e}, \text{ если } \omega_e \gg \omega_0.$$

Резонансные свойства амплитудных характеристик лежат в основе устройства «усилителей» и «фильтров».

Отметим предельный случай, когда диссипацией энергии можно пренебречь, т. е. μ можно устремить к нулю. Тогда из (6.72) и (6.73) получим разрывное решение:

$$\begin{aligned} \xi_e &= \frac{Q_e}{a_{11}} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_e^2} \cos(\omega_e t + \beta_e), & \text{если } \omega_e < \omega_0; \\ \xi_e &= \frac{Q_e}{a_{11}} \frac{1}{\omega_e^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_e t + \beta_e - \pi), & \text{если } \omega_e > \omega_0 \end{aligned} \quad (6.75)$$

(амплитудная и фазовая характеристики, соответствующие (6.75), изображены на рис. 6.14 штриховыми линиями).

Полная энергия E рассматриваемых одномерных колебаний, т. е. функция

$$E = \frac{a_{11}}{2} \dot{\xi}_1^2 + \frac{c_{11}}{2} \xi_1^2 = \frac{a_{11}}{2} (\dot{\xi}_1^2 + \omega_0^2 \xi_1^2),$$

после того как собственные колебания вследствие затухания станут исчезающе малыми, будет с большой степенью точности равна

$$E = \frac{a_{11}}{2} (\dot{\xi}_e^2 + \omega_0^2 \xi_e^2). \quad (6.76)$$

Изменение энергии E со временем характеризуется производной

$$\dot{E} = a_{11} (\ddot{\xi}_e + \omega_0^2 \xi_e) \dot{\xi}_e. \quad (6.77)$$

Это выражение с помощью уравнения (6.67) можно записать в виде

$$\dot{E} = -b_{11} \dot{\xi}_e^2 + Q_e \cos(\omega_e t + \beta_e) \dot{\xi}_e. \quad (6.78)$$

Если $\omega_e = \omega_0$, то мощность, вносимая в систему нестационарной силой, компенсирует диссипацию энергии; в результате энергия остается постоянной. Действительно, учитывая, что функция $\xi_e(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\xi}_e + \omega_e^2 \xi_e = 0, \quad (6.79)$$

из (6.77) при $\omega_e = \omega_0$ получим $E = \text{const}$.

При произвольном соотношении ω_e и ω_0 энергия, усредненная по периоду колебания $T_e = 2\pi/\omega_e$, сохраняется (здесь опять-таки предполагается, что собственными колебаниями системы можно пренебречь).

В самом деле, имея в виду, что

$$\bar{\xi}_e^2 = \frac{a_e^2}{2}, \quad \bar{\dot{\xi}}_e^2 = \frac{\omega_e^2 a_e^2}{2},$$

из (6.76) найдем

$$\bar{E} = \frac{a_{11}}{2} a_e^2 \frac{\omega_e^2 + \omega_0^2}{2} \quad (6.80)$$

(черта над функциями означает усреднение по периоду T_e).

Если нестационарная сила $Q_e(t)$ является произвольной функцией времени, разложимой в ряд Фурье,

$$Q_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \cos(n\omega_e t + \beta_e^{(n)}), \quad (6.81)$$

то интересующее нас решение можно представить в виде

$$\bar{\xi}_e = \sum_{n=0}^{\infty} a_e(Q_n, n\omega_e) \cos[n\omega_e t + \beta_e^{(n)} + \Delta\beta_e(n\omega_e)]. \quad (6.82)$$

Если же $Q_e(t)$ — произвольная функция, представляемая интегралом Фурье, то общим решением уравнения

$$\ddot{\xi} + 2\mu\dot{\xi} + \omega_0\xi = \frac{Q_e(t)}{a_{11}}, \quad (6.83)$$

например, в случае $\omega_0 > \mu$, является решение

$$\begin{aligned} \xi = & \left[\xi_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} (\dot{\xi}_0 + \mu\xi_0) \sin \omega t \right] e^{-\mu t} + \\ & + \frac{1}{a_{11}\omega} \int_0^t Q_e(\tau) e^{-\mu(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (6.84)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$ (здесь пределы интеграла выбраны так, чтобы удовлетворить начальным условиям).

Частное решение системы уравнений (6.66) находится аналогично одномерному случаю. Например, если нестационарные силы являются гармоническими функциями времени

$$Q_j^e(t) = Q_j^e \cos(\omega_e t + \beta_e) \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (6.85)$$

то, заменяя эти функции соответствующими комплексными выражениями и представляя решение полученной системы в виде

$$\xi_k = a_k^e e^{i\Delta\beta_k^e} e^{i(\omega_e t + \beta_e)} \quad (k = 1, 2, \dots, s), \quad (6.86)$$

после соответствующих подстановок получим

$$\sum_{k=1}^s \{a_{jk}\lambda_e^2 + (b_{jk} + \gamma_{jk})\lambda_e + c_{jk}\} a_k^e e^{i\Delta\beta_k^e} = Q_j^e \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (6.87)$$

где $\lambda_e = i\omega_e$. Эта система линейных неоднородных уравнений имеет решение

$$a_k^e = \frac{\Delta^k(\lambda_e)}{\Delta(\lambda_e)} \quad (k = 1, \dots, s), \quad (6.88)$$

где $\Delta(\lambda_e)$ — характеристический детерминант системы (6.61), взятый при значении $\lambda = \lambda_e$, а $\Delta^k(\lambda_e)$ — детерминант, полученный из характеристического заменой элементов k -того столбца на столбец, составленный из $Q_1^e, Q_2^e, \dots, Q_s^e$. Так как характеристическое уравнение имеет $2s$ корней λ_α , то $\Delta(\lambda_e)$ можно представить в виде произведения

$$\Delta(\lambda_e) = a \prod_{\alpha=1}^{2s} (\lambda_e - \lambda_\alpha), \quad (6.89)$$

где a — некоторая постоянная. Если все корни характеристического уравнения комплексны, то детерминант $\Delta(\lambda_e)$ целесообразно свести к произведению s сомножителей вида

$$(\lambda_e - \lambda_\alpha^+) (\lambda_e - \lambda_\alpha^-) = \lambda_e^2 - (\lambda_\alpha^+ + \lambda_\alpha^-) \lambda_e + \lambda_\alpha^+ \cdot \lambda_\alpha^-.$$

Учитывая, что

$$\lambda_\alpha^+ + \lambda_\alpha^- = -2\mu_\alpha, \quad \lambda_\alpha^+ \lambda_\alpha^- = \omega_{0\alpha}^2,$$

где $\omega_{0\alpha}^2 = \mu_\alpha^2 + \omega_\alpha^2$, характеристический детерминант (6.89) можно представить в виде

$$\Delta(\lambda_e) = a \prod_{\alpha=1}^s \{(\omega_{0\alpha}^2 - \omega_e^2) + i2\mu_\alpha \omega_e\}.$$

Умножая числитель и знаменатель правых частей (6.88) на $\Delta^*(\lambda_e)$, приходим к выводу, что амплитуды a_k^e обратно пропорциональны произведению характерных резонансных сомножителей, поскольку

$$\Delta(\lambda_e) \Delta(\lambda_e^*) \sim \prod_{\alpha=1}^s \{(\omega_{0\alpha}^2 - \omega_e^2)^2 + 4\mu_\alpha^2 \omega_e^2\}.$$

Таким образом, если затухание достаточно мало, то каждая амплитуда a_k^e будет иметь s резонансных пиков на s частотах $\omega_e \approx \omega_{0\alpha}$ ($\alpha=1, 2, \dots, s$). Эти максимумы обращаются в бесконечность, если диссипация энергии отсутствует, т. е. все $\mu_\alpha \rightarrow 0$. В этом случае

$$a_k^e \sim \frac{1}{\prod_{\alpha=1}^s (\omega_\alpha^2 - \omega_e^2)} \quad (k = 1, 2, \dots, s).$$

Пример 6.16. Движение системы при наличии силы, действующей на конечном интервале времени.

На систему с одной степенью свободы, собственной частотой ω и коэффициентом a , играющим роль «массы», в течение промежутка времени t_1 действует постоянная сила Q_0 . Найти отклонение системы от начального положения (предполагается, что это положение является положением устойчивого равновесия), если в начальный момент времени система покоилась.

Уравнением движения системы (см. (6.83)) является уравнение

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = \frac{1}{a} Q_e(t),$$

где

$$Q_e(t) = \begin{cases} Q_0, & 0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & t_1 \leq t. \end{cases}$$

Его решение можно получить, воспользовавшись (6.84). Однако более наглядным является непосредственное решение уравнений движения на двух интервалах времени с последующим «сшиванием» этих решений. Учитывая, что

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = \frac{1}{a} Q_0 \quad (0 \leq t \leq t_1)$$

и

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0 \quad (t_1 \leq t),$$

находим решение первого уравнения

$$\xi = \frac{2Q_0}{a\omega^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2} \quad (0 \leq t \leq t_1)$$

(здесь использованы начальные условия $\xi_0=0, \dot{\xi}_0=0$), а также общее решение второго уравнения $\xi = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ ($t_1 \leq t$), где постоянные C_1 и C_2 должны быть выбраны из условия непрерывности координаты и скорости при $t=t_1$. Пользуясь этими условиями, получаем

$$C_1 = -\frac{Q_0}{a\omega^2} (\cos \omega t_1 - 1),$$

$$C_2 = \frac{Q_0}{a\omega^2} \sin \omega t_1.$$

Соответственно находим решение, справедливое для $t \geq t_1$:

$$\xi = \frac{2Q_0}{a\omega^2} \sin \frac{\omega t_1}{2} \cos \left(\omega t - \frac{\omega t_1}{2} + \frac{3\pi}{2} \right).$$

Отсюда видно, что если время действия силы t_1 равно (или кратно) собственному периоду системы $2\pi/\omega$, то после действия силы система останется в положении устойчивого равновесия (рис. 6.15).

Пример 6.17. *Вынужденные колебания под действием силы, экспоненциально спадающей со временем.*

Пусть система с одной степенью свободы, собственной частотой ω , коэффициентом затухания μ и коэффициентом a , играющим роль массы, в начальный момент времени $t=0$ покоилась в положении устойчивого равновесия. Найти отклонение системы от положения равновесия под действием силы $Q_0 e^{-\mu t}$.

Используя (6.83) и (6.84), напомним уравнение движения системы

$$\ddot{\xi} + 2\mu\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \frac{Q_0}{a} e^{-\mu t} \quad (\omega_0^2 = \omega^2 + \mu^2)$$

и его решение в виде интеграла

$$\xi = \frac{Q_0}{a\omega} e^{-\mu t} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

Отсюда окончательно найдем

$$\xi = \frac{2Q_0}{a\omega^2} e^{-\mu t} \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right).$$

Пример 6.18. *Гашение колебаний.*

Исследуем колебания системы двух маятников, отличающихся от тех, которые были рассмотрены в примере 6.13, только массами точек (см. рис. 6.11), предполагая, что на первую точку мас-

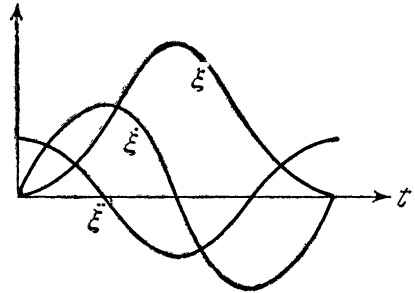


Рис. 6.15

сы m_1 кроме пружины действует сила, направленная по горизонтали и изменяющаяся по гармоническому закону с частотой ω_e и амплитудой Q_0 . Как выбрать массу второго маятника m_2 и жесткость κ пружины, соединяющей оба маятника, чтобы амплитуда колебаний первого маятника была исчезающе малой?

Учитывая некоторые результаты примера 6.13, запишем кинетическую и потенциальную энергии системы в виде

$$T = \frac{m_1}{2} l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\varphi}_2^2,$$

$$U = \frac{1}{2} \{ (m_1 g l + \kappa l^2) \varphi_1^2 + (m_2 g l + \kappa l^2) \varphi_2^2 - 2\kappa l^2 \varphi_1 \varphi_2 \}$$

(здесь φ_1 и φ_2 — углы отклонения маятников от положения устойчивого равновесия). Обобщенные силы, соответствующие нестационарной силе, равны (см. (5.41))

$$Q_{1e} = Q_0 \cos \omega_e t \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} = Q_0 l \cos \omega_e t, \quad Q_{2e} = 0.$$

Используя полученные функции, найдем уравнения движения системы (см. (6.66))

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \left(\omega_0^2 + \frac{\kappa}{m_1} \right) \varphi_1 - \frac{\kappa}{m_1} \varphi_2 &= \frac{Q_0}{m_1 l} \cos \omega_e t, \\ -\frac{\kappa}{m_2} \varphi_1 + \ddot{\varphi}_2 + \left(\omega_0^2 + \frac{\kappa}{m_2} \right) \varphi_2 &= 0, \end{aligned}$$

где $\omega_0^2 = g/l$.

Уравнения для амплитуд и характеристическое уравнение этой линейной системы имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\lambda^2 + \omega_0^2 + \frac{\kappa}{m_1} \right) C_1 - \frac{\kappa}{m_1} C_2 &= 0, \\ -\frac{\kappa}{m_2} C_1 + \left(\lambda^2 + \omega_0^2 + \frac{\kappa}{m_2} \right) C_2 &= 0, \\ \Delta(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 \left(2\omega_0^2 + \frac{\kappa}{\mu} \right) + \omega_0^2 \left(\omega_0^2 + \frac{\kappa}{\mu} \right) &= 0, \end{aligned}$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Отсюда получим собственные значения λ и квадраты собственных частот системы

$$\lambda_{1,2}^2 = -\omega_0^2, \quad \lambda_{3,4}^2 = -\omega_0^2 - \frac{\kappa}{\mu},$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{\kappa}{\mu},$$

а также соотношения амплитуд

$$C_2^{(1,2)} = C_1^{(1,2)}, \quad C_2^{(3,4)} = -\frac{m_1}{m_2} C_1^{(3,4)}.$$

Это дает возможность найти общее решение для собственных колебаний маятников (см. (6.39))

$$\varphi_1 = \theta_1 + \theta_2, \quad \varphi_2 = \theta_1 - \frac{m_1}{m_2} \theta_2,$$

где

$$\theta_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1), \quad \theta_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2).$$

Амплитуды частного решения уравнений движения (см. (6.85) и (6.86)) определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \left(\lambda_e^2 + \omega_0^2 + \frac{\kappa}{m_1} \right) C_{1e} - \frac{\kappa}{m_1} C_{2e} &= \frac{Q_0}{m_1 l}, \\ -\frac{\kappa}{m_2} C_{1e} + \left(\lambda_e^2 + \omega_0^2 + \frac{\kappa}{m_2} \right) C_{2e} &= 0, \end{aligned}$$

где $\lambda_e = i\omega_e$. Отсюда

$$C_{1e} = \frac{Q_0}{m_1 l} \frac{\omega_0^2 + \frac{\kappa}{m_2} - \omega_e^2}{\Delta(\omega_e)}, \quad C_{2e} = \frac{Q_0 \kappa}{m_1 m_2 l} \frac{1}{\Delta(\omega_e)},$$

где

$$\Delta(\omega_e) = (\omega_1^2 - \omega_e^2)(\omega_2^2 - \omega_e^2).$$

Общее решение исходных уравнений складывается из общего решения, описывающего собственные колебания системы, и частного решения, описывающего вынужденные колебания:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \theta_1 + \theta_2 + C_{1e} \cos \omega_e t, \\ \varphi_2 &= \theta_1 - \frac{m_1}{m_2} \theta_2 + C_{2e} \cos \omega_e t. \end{aligned}$$

Если, например, оба маятника в начальный момент времени покоятся в положении равновесия, т. е.

$$\varphi_{10} = \varphi_{20} = 0, \quad \dot{\varphi}_{10} = \dot{\varphi}_{20} = 0,$$

тогда

$$\varphi_1 = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t + C_{1e} \cos \omega_e t,$$

$$\varphi_2 = a_1 \cos \omega_1 t - \frac{m_1}{m_2} a_2 \cos \omega_2 t + C_{2e} \cos \omega_e t,$$

где

$$a_1 = - \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \left(C_{1e} + \frac{m_2}{m_1} C_{2e} \right),$$

$$a_2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} (C_{2e} - C_{1e}).$$

Это решение дает возможность ответить на вопрос, поставленный в условии примера. Действительно, если $\omega_e < \omega_0$, то можно так подобрать массу второго маятника m_2 и жесткость пружины κ , чтобы $C_{1e} = 0$. В этом случае решение принимает вид

$$\varphi_1 = \frac{m_2}{m_1} \frac{C_{2e}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} (\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t),$$

$$\varphi_2 = C_{2e} \left(\cos \omega_e t - \frac{\cos \omega_2 t}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \right) - \frac{m_2}{m_1} \frac{C_{2e}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \cos \omega_1 t.$$

Если при этом $m_2 \ll m_1$, то амплитуда колебаний первого маятника станет исчезающе малой по сравнению с амплитудой второго маятника. Таким образом, чтобы второй маятник играл роль «гасителя колебаний», должны выполняться требования:

$$\frac{\kappa}{m_2} = \omega_e^2 - \omega_0^2 \quad (\omega_e > \omega_0), \quad m_2 \ll m_1.$$

Гашение колебаний первого маятника связано с тем, что воздействия вынуждающей силы и второго маятника на первый маятник уравновешивают друг друга с точностью до величины порядка m_2/m_1 .

Глава VII

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 7.1. Собственные колебания и метод Крылова — Боголюбова

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, на которую наложены голономные стационарные связи и действуют заданные стационарные силы; при этом предположим, что у системы имеется положение устойчивого равновесия. Разложение кинетической, потенциальной и диссипативной функций в окрестности этого положения вплоть до членов второго порядка малости включительно приводит к линейному уравнению. Однако во многих практически важных задачах возникает необходимость исследования колебаний с достаточно большими амплитудами и скоростями. В таких случаях линейное приближение оказывается недостаточным и приходится учитывать последующие члены разложений, приводящие к нелинейным уравнениям. Если при этом отклонения от положения равновесия и скорости точек не слишком велики, то соответствующие уравнения будут описывать малые нелинейные колебания.

Изучим особенности таких колебаний на примере математического маятника, помещенного в среду с «линейным» сопротивлением (рис. 7.1). Его кинетическая и потенциальная энергия, а также диссипативная функция соответственно равны

$$T = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2, \quad U = mgl(1 - \cos \varphi), \quad D = \frac{kl^2}{2} \dot{\varphi}^2.$$

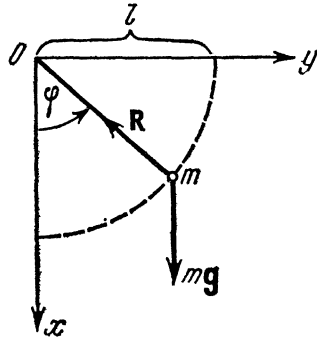


Рис. 7.1

Разлагая потенциальную энергию в положении устойчивого равновесия $\varphi_{\text{eq}} = 0$ с точностью до членов четвертого порядка малости включительно, получим

$$U = mgl \left(\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} \right),$$

а используя (5.77) и (5.80), найдем уравнение Лагранжа

$$\ddot{\varphi} + 2\mu\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \frac{\omega_0^2}{3!}\varphi^3,$$

где $\omega_0^2 = g/l$, $2\mu = k/m$. Если в этом уравнении пренебречь нелинейным членом, пропорциональным φ^3 , то придем к линейному уравнению; решением которого в случае $\omega_0 > \mu$ является функция

$$\varphi = a_0 e^{-\mu t} \cos(\omega t + \psi_0),$$

где $\omega^2 = \omega_0^2 - \mu^2$. Если же не пренебрегать нелинейным членом, то, учитывая его малость по сравнению с линейным членом, пропорциональным φ , можно предположить, что *решение, описывающее нелинейное колебание, по форме близко к решению линейного уравнения*, т. е.

$$\varphi \approx a \cos \psi, \quad (7.1)$$

где a и ψ — неизвестные амплитуды и фаза нелинейного колебания.

Величина обобщенной силы, связанной с отклонением маятника от вертикали и пропорциональной $-\varphi + \varphi^3/6$, меньше величины той же силы в линейном приближении, причем различие в этих значениях тем больше, чем больше отклонение маятника от вертикали (см., например, рис. 6.1). Следовательно, первая производная фазы ψ по времени или *частота $\dot{\psi}$ нелинейных колебаний* маятника будет меньше собственной частоты ω_0 его линейных колебаний и *будет зависеть от амплитуды колебаний*. В связи с этим можно допустить, что для собственных нелинейных колебаний, вообще говоря, имеет место зависимость:

$$\dot{\psi} = \omega(a), \quad (7.2)$$

где $\omega(a)$ — неизвестная функция, вид которой определяется видом обобщенной силы.

Предположение об изменении амплитуды нелинейного колебания, по существу, также связано с допущением (7.1) о «близости» нелинейного и линейного колебаний в течение одного периода. Действительно, в линейном приближении амплитуда математического маятника изменяется по закону

$$a = a_0 e^{-\mu t}$$

и удовлетворяет уравнению

$$\dot{a} = -\mu a.$$

Поэтому будем считать, что и в общем случае *производная от амплитуды нелинейных колебаний является функцией амплитуды*, т. е.

$$\dot{a} = f(a). \quad (7.3)$$

Характерным для нелинейных колебаний является *наличие «обертонов», т. е. частот, кратных основной частоте*. В частности, это можно видеть на примере математического маятника, уравнение которого содержит нелинейный член, приводящий к появлению высшей гармоника (см. (7.1)):

$$\varphi^3 \approx a^3 \cos^3 \psi = \frac{a^3}{4} (3 \cos \psi + \cos 3\psi).$$

Наконец, в силу нелинейности уравнения движения его *общее решение не сводится к сумме частных решений*, и, следовательно, принцип суперпозиции не имеет места. Таковы особенности нелинейных малых колебаний или, как говорят, *слабо-нелинейных колебаний*.

Рассмотрим уравнение слабо-нелинейных собственных одномерных колебаний вида

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}), \quad (7.4)$$

где ε — параметр, указывающий на малость функции εQ по сравнению с линейным членом (порядок малости членов в этом и последующих уравнениях определяется так, чтобы при $\varepsilon \rightarrow 0$ имел место случай линейных гармонических колебаний). Одним из методов решения этого уравнения является метод Крылова — Боголюбова.

Учитывая (7.1), решение уравнения (7.4) будем искать в виде ряда

$$\xi = a \cos \psi + \varepsilon \xi_1(a, \psi) + \varepsilon^2 \xi_2(a, \psi) + \dots, \quad (7.5)$$

где $\varepsilon \xi_1$, $\varepsilon^2 \xi_2$ — неизвестные функции амплитуды a и периодические функции фазы ψ . В свою очередь, *амплитуда a и фаза ψ являются неизвестными функциями времени, подчиненными «своим» дифференциальным уравнениям* (см. (7.3) и (7.2))

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a) + \dots, \\ \dot{\psi} &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1(a) + \varepsilon^2 \omega_2(a) + \dots \end{aligned} \quad (7.6)$$

Правые части этих уравнений могут быть найдены, поскольку ряд (7.5), в котором a и ψ как функции времен определяются уравнениями вида (7.6), должен удовлетворять исходному уравнению (7.4). Неизвестные функции $\varepsilon \xi_1$, $\varepsilon^2 \xi_2$, ..., εf_1 , $\varepsilon^2 f_2$, ..., $\varepsilon \omega_1$,

$\varepsilon^2 \omega_2, \dots$ определяются с некоторым произволом, который можно исключить, если потребовать, чтобы a явилась полной амплитудой основной гармоники. Тогда функции $\varepsilon \xi_1, \varepsilon^2 \xi_2, \dots$ не будут содержать членов, пропорциональных $\cos \psi$ и $\sin \psi$, и будут удовлетворять условиям:

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon^n \xi_n(a, \psi) \cos \psi d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \varepsilon^n \xi_n(a, \psi) \sin \psi d\psi = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7.7)$$

Общая схема решения исходного уравнения заключается в отыскании функций $\varepsilon f_1, \varepsilon \omega_1, \varepsilon \xi_1$ и т. д. по заданной функции εQ ; при этом амплитуда и фаза как функции времени будут определяться по найденным функциям $\varepsilon f_1, \varepsilon \omega_1$ и т. д. с помощью уравнений (7.6).

Найдем решение исходного уравнения в первом приближении. Прежде чем подставить ряд (7.5) в уравнение (7.4), получим величины $\dot{\xi}$ и $\ddot{\xi}$ как функции a и ψ с точностью до ε включительно. Дифференцируя первые два члена ряда (7.5) по времени, найдем

$$\dot{\xi} = \dot{a} \cos \psi - a \sin \psi \cdot \dot{\psi} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial \xi_1}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} \dot{\psi} \right\}. \quad (7.8)$$

Учитывая, что a и ψ подчинены уравнениям (7.6), в результате их подстановки с той же точностью получим

$$\dot{\xi} = -\omega_0 a \sin \psi + \varepsilon \left\{ f_1 \cos \psi - \omega_1 a \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} \right\}. \quad (7.9)$$

Дифференцируя (7.9) по времени, получим

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} = & -\omega_0 \dot{a} \sin \psi - \omega_0 a \cos \psi \cdot \dot{\psi} + \varepsilon \left\{ \frac{df_1}{da} \dot{a} \cos \psi - f_1 \sin \psi \cdot \dot{\psi} - \right. \\ & \left. - \frac{d\omega_1}{da} \dot{a} a \sin \psi - \omega_1 \dot{a} \sin \psi - \omega_1 a \cos \psi \cdot \dot{\psi} + \omega_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a \partial \psi} \dot{a} + \omega_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} \dot{\psi} \right\}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

а подставляя сюда (7.6), найдем с точностью до ε включительно

$$\ddot{\xi} = -\omega_0^2 a \cos \psi + \varepsilon \left\{ -2\omega_0 a \omega_1 \cos \psi - 2\omega_0 f_1 \sin \psi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} \right\}. \quad (7.11)$$

Формулы (7.11) и (7.5) дают возможность определить левую часть исходного уравнения как функцию a и ψ .

Для отыскания с точностью до ε правой части (7.4) как функции a и ψ нужно разложить $\varepsilon Q(\xi, \dot{\xi})$ в «точке» $a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi$:

$$\varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}) = \varepsilon Q(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi). \quad (7.12)$$

Подставляя (7.5), (7.11) и (7.12) в исходное уравнение (7.4), с указанной точностью получим

$$\omega_0^2 \left(\varepsilon \xi_1 + \frac{\partial^2 \varepsilon \xi_1}{\partial \psi^2} \right) = 2\omega_0 a \varepsilon \omega_1 \cos \psi + 2\omega_0 \varepsilon f_1 \sin \psi + \varepsilon Q_0(a, \psi), \quad (7.13)$$

где $\varepsilon Q_0(a, \psi) = \varepsilon Q(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi)$.

Соотношение (7.13) дает возможность определить неизвестные функции $\varepsilon \xi_1$, εf_1 и $\varepsilon \omega_1$ по заданной функции εQ_0 . Действительно, представим заданную функцию εQ_0 и неизвестную функцию $\varepsilon \xi_1$ (по предположению, она является периодической функцией ψ) в виде рядов Фурье

$$\varepsilon Q_0(a, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \varepsilon \beta_n(a) \cos n\psi + \varepsilon \alpha_n(a) \sin n\psi \}, \quad (7.14)$$

где $\varepsilon \beta_n(a)$ и $\varepsilon \alpha_n(a)$ — известные коэффициенты Фурье, и

$$\varepsilon \xi_1(a, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \varepsilon \nu_n(a) \cos n\psi + \varepsilon \gamma_n(a) \sin n\psi \}, \quad (7.15)$$

где $\varepsilon \nu_n(a)$ и $\varepsilon \gamma_n(a)$ ($n=0, 2, 3, \dots$) — коэффициенты Фурье, подлежащие определению, а коэффициенты $\varepsilon \nu_1$ и $\varepsilon \gamma_1$, согласно (7.7), равны

$$\varepsilon \nu_1 = \varepsilon \gamma_1 = 0. \quad (7.16)$$

Подставляя (7.14) и (7.15) в (7.13) и приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках, находим εf_1 , $\varepsilon \omega_1$ и коэффициенты $\varepsilon \nu_n$ и $\varepsilon \gamma_n$ *:

$$\varepsilon f_1 = -\frac{\varepsilon \alpha_1}{2\omega_0}, \quad \varepsilon \omega_1 = -\frac{\varepsilon \beta_1}{2\omega_0 a}; \quad (7.17)$$

* Приведем промежуточные вычисления:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon \xi_1}{\partial \psi^2} = \sum_{n=2}^{\infty} (-n^2) (\varepsilon \nu_n \cos n\psi + \varepsilon \gamma_n \sin n\psi),$$

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \left\{ \varepsilon \nu_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (1-n^2) (\varepsilon \nu_n \cos n\psi + \varepsilon \gamma_n \sin n\psi) \right\} &= 2\omega_0 a \varepsilon \omega_1 \cos \psi + 2\omega_0 \varepsilon f_1 \sin \psi + \\ &+ \varepsilon \beta_0 + \varepsilon \beta_1 \cos \psi + \varepsilon \alpha_1 \sin \psi + \sum_{n=2}^{\infty} (\varepsilon \beta_n \cos n\psi + \varepsilon \alpha_n \sin n\psi). \end{aligned}$$

$$\varepsilon\nu_0 = \frac{\varepsilon\beta_0}{\omega_0^2}, \quad \varepsilon\nu_n = \frac{\varepsilon\beta_n}{(1-n^2)\omega_0^2}, \quad \varepsilon\gamma_n = \frac{\varepsilon\alpha_n}{(1-n^2)\omega_0^2} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (7.18)$$

Используя (7.17), из (7.6) получим дифференциальные уравнения для амплитуды и фазы

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon\alpha_1(a)}{2\omega_0}, \quad \dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\varepsilon\beta_1(a)}{2\omega_0 a}. \quad (7.19)$$

Таким образом, в первом приближении производная амплитуды по времени и частота определяются коэффициентами Фурье заданной функции $\varepsilon Q_0(a, \psi)$, т. е. коэффициентами Фурье правой (вообще говоря, нелинейной) части исходного уравнения, взятой с точностью до ε ; производная амплитуды определяется коэффициентом Фурье при $\sin\psi$, а производная фазы определяется коэффициентом Фурье при $\cos\psi$.

Подстановка (7.18) в (7.15) приведет к определению функции

$$\varepsilon\xi_1 = \frac{\varepsilon\beta_0(a)}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-n^2} \{ \varepsilon\beta_n(a) \cos n\psi + \varepsilon\alpha_n(a) \sin n\psi \}. \quad (7.20)$$

Решая систему уравнений (7.19), получим амплитуду a и фазу ψ как функции времени и начальных значений a_0, ψ_0 . Используя эти функции с помощью (7.5) и (7.20), найдем решение исходного уравнения

$$\xi = a(t) \cos \psi(t) + \varepsilon\xi_1(a(t), \psi(t)).$$

Проводя аналогичные вычисления с точностью до ε^2 , можно получить решение во втором приближении.

На достаточно большом интервале времени первому приближению для функций \dot{a} и $\dot{\psi}$ соответствует нулевое приближение для ξ , а второму приближению для \dot{a} и $\dot{\psi}$ соответствует первое приближение для ξ и т. д. [19, с. 42—43]. Действительно, возьмем за меру большого временного интервала время $\sim 1/\varepsilon$. Для таких интервалов конечные приращения амплитуды Δa и фазы $\Delta(\psi - \omega_0 t)$ можно записать в виде (см. уравнения (7.6) в первом приближении)

$$\Delta a \sim \varepsilon \bar{f}_1 t \sim \bar{f}_1, \quad \Delta(\psi - \omega_0 t) \sim \varepsilon \bar{\omega}_1 t \sim \bar{\omega}_1, \quad (7.21)$$

где \bar{f}_1 и $\bar{\omega}_1$ — средние значения f_1 и ω_1 на рассматриваемом интервале времени. Таким образом, погрешностям порядка ε в значениях производных \dot{a} и $\dot{\psi}$ соответствуют погрешности нулевого порядка в значениях самих амплитуды и фазы. Поэтому для до-

статочно больших интервалов времени в качестве первого и второго приближений нужно брать приближения

$$\xi = a \cos \psi, \quad \dot{a} = \varepsilon f_1(a), \quad \dot{\psi} = \omega_0 + \varepsilon \omega_1(a); \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} \xi &= a \cos \psi + \varepsilon \xi_1(a, \psi), \quad \dot{a} = \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a), \\ \dot{\psi} &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1(a) + \varepsilon^2 \omega_2(a). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Пример 7.1. *Нелинейные колебания математического маятника в среде с «линейной» силой сопротивления.*

Пусть математический маятник совершает малые нелинейные колебания в среде, сила сопротивления которой пропорциональна первой степени скорости точки. Найти закон движения маятника.

Перепишем уравнение движения маятника (см. с. 311) в виде (7.4)

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \varepsilon Q(\varphi, \dot{\varphi}),$$

где $\varepsilon Q(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{\omega_0^2}{3!} \varphi^3 - 2\mu \dot{\varphi}$. Затем в первом приближении определим правую часть этого уравнения как функцию a и ψ (см. (7.13)):

$$\varepsilon Q_0(a, \psi) = \frac{\omega_0^2}{3!} a^3 \cos^3 \psi + 2\mu \omega_0 a \sin \psi.$$

Разлагая эту функцию в ряд Фурье, что в данном случае сводится к использованию формулы

$$\cos^3 \psi = \frac{3}{4} \cos \psi + \frac{1}{4} \cos 3\psi,$$

найдем

$$\varepsilon Q_0(a, \psi) = \frac{\omega_0^2 a^3}{8} \cos \psi + 2\mu \omega_0 a \sin \psi + \frac{\omega_0^2 a^3}{4!} \cos 3\psi.$$

Отсюда получим коэффициенты Фурье

$$\varepsilon \beta_1 = \frac{\omega_0^2 a^3}{8}, \quad \varepsilon \alpha_1 = 2\mu \omega_0 a,$$

а следовательно, и уравнения для амплитуды и фазы (см. (7.22))

$$\dot{a} = -\mu a, \quad \omega = \dot{\psi} = \omega_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2 a^2}{16} \right).$$

Подставляя решение первого из этих уравнений

$$a = a_0 e^{-\mu t}$$

во второе уравнение, в результате интегрирования найдем угол отклонения маятника как функцию времени

$$\varphi = a_0 e^{-\mu t} \cos \left\{ \omega_0 \left[t + \frac{a_0^2}{32\mu} (e^{-2\mu t} - 1) \right] + \psi_0 \right\}$$

(постоянные интегрирования a_0 и ψ_0 связаны с начальными условиями φ_0 и $\dot{\varphi}_0$).

Итак, в данном примере учет нелинейной потенциальной силы приводит к уменьшению частоты ω по сравнению с частотой ω_0 линейных колебаний. С течением времени благодаря сопротивлению амплитуда становится исчезающе малой, поэтому ω стремится к ω_0 (рис. 7.2).

Пример 7.2. Автоколебания математического маятника.

Подвес маятника жестко скреплен с муфтой, которая надета на вал, вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω (рис. 7.3). Сила сухого трения F^d , действующая со стороны вала на маятник, известна как функция их относительной угловой скорости; k — коэффициент трения маятника о воздух. Найти амплитуду установившихся колебаний маятника.

Уравнение движения маятника определяется кинетической и потенциальной энергиями, диссипативной функцией (см. пример 7.1), а также диссипативной силой.

$$F^d = F(\Omega - \dot{\varphi}) n_\varphi,$$

где φ — угол отклонения маятника от вертикали. Используя (5.77), получим

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = \frac{1}{ml} F(\Omega - \dot{\varphi}) - \frac{k}{m} \dot{\varphi}, \text{ где } \omega_0^2 = g/l.$$

Сила сухого трения как функция угловой скорости Ω имеет «падающие» участки (рис. 7.4), на которых $F' < 0$. Выберем скорость Ω вращения вала так, чтобы она являлась абсциссой точки перегиба на «падающем» участке функции $F(\Omega)$, тогда $F''(\Omega) = 0$; кроме того, допустим, что $F'(\Omega) + kl < 0$, а $F'''(\Omega) > 0$.

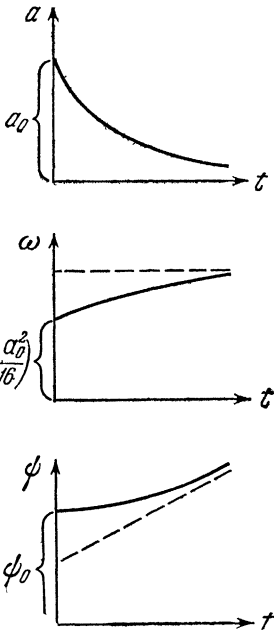


Рис. 7.2

Учитывая, что положение φ_{eq} равновесия маятника определяется соотношением $\sin \varphi_{\text{eq}} = F(\Omega)/mg$, и разлагая обе части исходного уравнения Лагранжа по степеням отклонения $\xi = \varphi - \varphi_{\text{eq}}$

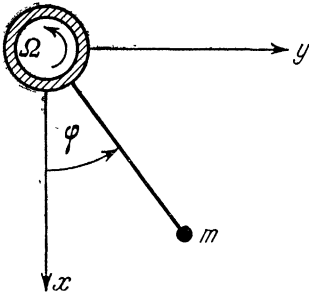


Рис. 7.3

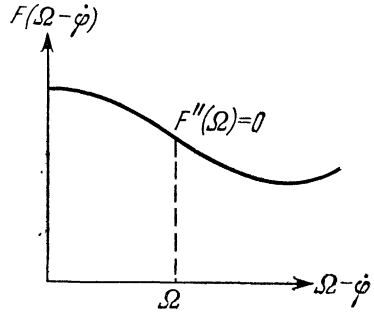


Рис. 7.4

от положения равновесия и скорости $\dot{\xi} = \dot{\varphi}$, получим уравнение для слабо-нелинейных колебаний

$$\ddot{\xi} + \omega_0^{*2} \xi = \frac{\omega_0^2 \sin \varphi_{\text{eq}}}{2} \xi^2 + \frac{\omega_0^{*2}}{6} \xi^3 + (\kappa_1 - \kappa_2 \dot{\xi}^2) \dot{\xi}, \quad (1)$$

где

$$\omega_0^{*2} = \omega_0^2 \cos \varphi_{\text{eq}},$$

$$\kappa_1 = -\frac{1}{ml} [F'(\Omega) + kl] > 0, \quad \kappa_2 = \frac{F'''(\Omega)}{6ml} > 0.$$

Знак обобщенной диссипативной силы, пропорциональной $(\kappa_1 - \kappa_2 \dot{\xi}^2) \dot{\xi}$, при $\dot{\xi} \rightarrow 0$ совпадает со знаком скорости $\dot{\xi}$; для достаточно больших значений $\dot{\xi}$ этот знак противоположен знаку $\dot{\xi}$. Это связано с тем, что в качестве «рабочего» участка выбран «падающий» участок функции $F(\Omega - \dot{\varphi})$. Итак, для очень малых $\dot{\xi}$ амплитуда колебаний маятника будет нарастать, а для достаточно больших $\dot{\xi}$ — убывать, следовательно, возможно установление стационарной амплитуды, независимой от начального значения амплитуды.

Изучаемый маятник является типичным примером автоколебательной системы. Такая система состоит из «колебательного контура» (маятника), «источника питания» (вращающегося вала) и «нелинейного элемента» (силы сухого трения), регулирующего поступление энергии в колебательный контур. Автоколебательные (механические и немеханические) системы часто

встречаются на практике (например, такой автоколебательной системой является простейший ламповый генератор).

В первом приближении правая часть уравнения (1), как функция a и ψ , равна

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_0(a, \psi) = & \frac{\omega_0^2 \sin \varphi_{\text{eq}}}{2} a^2 \cos^2 \psi + \frac{\omega_0^{*2}}{6} a^3 \cos^3 \psi - \\ & - (\kappa_1 - \kappa_2 \omega_0^{*2} a^2 \sin^2 \psi) a \dot{\omega}_0^* \sin \psi. \end{aligned}$$

Выделяя здесь первые гармоники, получим

$$\varepsilon Q_0(a, \psi) = \frac{\omega_0^{*2}}{8} a^3 \cos \psi - \omega_0^* a \left(\kappa_1 - \frac{3\kappa_2}{4} \omega_0^{*2} a^2 \right) \sin \psi + \dots$$

Отсюда, используя (7.14), (7.17) и (7.19), найдем уравнения для амплитуды a и фазы ψ

$$\dot{a} = \frac{\kappa_1 a}{2} \left(1 - \frac{3\kappa_2}{4\kappa_1} \omega_0^{*2} a^2 \right), \quad \dot{\psi} = \omega_0^* \left(1 - \frac{a^2}{16} \right). \quad (2)$$

Интегрируя первое из уравнений (2), получим амплитуду как функцию времени

$$a(t) = \frac{a_0 e^{\frac{\kappa_1}{2} t}}{\left[1 + \frac{3\kappa_2}{4\kappa_1} \omega_0^{*2} a_0^2 (e^{\kappa_1 t} - 1) \right]^{1/2}}$$

и ее значение a_∞ при $t \rightarrow +\infty$:

$$a_\infty = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\frac{-2[F'(\Omega) + kl]}{F'''(\Omega) \cos \varphi_{\text{eq}}}}, \quad (3)$$

где $\cos \varphi_{\text{eq}} = \sqrt{1 - \left(\frac{F(\Omega)}{mg} \right)^2}$. Из (3) видно, что амплитуда устоявшихся колебаний не зависит от начального значения амплитуды: достаточно сколь угодно малого начального отклонения от положения равновесия, чтобы амплитуда возросла вплоть до значения a_∞ .

§ 7.2. Вынужденные колебания и резонанс

Проанализируем физические особенности вынужденных нелинейных колебаний на примере системы с одной степенью свободы, предполагая, что на систему действует малая нестационарная сила, гармонически изменяющаяся со временем: $\varepsilon Q_0 \cos \omega_e t$. С этой целью определим среднюю мощность силы

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \varepsilon Q_{e0} \cos \omega_e t \dot{\xi} \cdot dt \quad (7.24)$$

на некотором интервале времени Δt , причем потребуем, чтобы этот интервал был, с одной стороны, достаточно большим по сравнению с периодом $2\pi/\omega_0$ собственных линейных колебаний, а с другой стороны, достаточно ограниченным с тем, чтобы форма колебаний не успевала заметно измениться (такой выбор Δt возможен ввиду малости внешней силы и нелинейных членов). Учитывая, что на интервале Δt нелинейное колебание близко к линейному (см. (7.1)), т. е.

$$\xi \approx a \cos \psi, \quad \dot{\xi} \approx -a\omega_0 \sin \psi,$$

где $\psi = \omega_0 t + \theta(t)$, и принимая во внимание, что изменения функций $a(t)$ и $\theta(t)$ на интервале Δt малы, для средней мощности получим выражение

$$\frac{\varepsilon Q_{e0} \omega_0 a(t)}{\Delta t} \left\{ \frac{\cos [(\omega_e + \omega_0)t + \theta(t)]}{\omega_e + \omega_0} - \frac{\cos [(\omega_e - \omega_0)t - \theta(t)]}{\omega_e - \omega_0} \right\} \Big|_{t_0}^{t_0+\Delta t}. \quad (7.25)$$

Отсюда видно, что в *нерезонансном случае*, когда ω_e весьма отличается от ω_0 , мощность вынуждающей силы исчезающе мала, поскольку $\Delta t \gg 2\pi/\omega_0$. Если же имеет место *резонанс*, т. е. $\omega_e \approx \omega_0$, то мощность становится порядка ε . Действительно, подставляя в (7.25) $\omega_e = \omega_0 + \Delta\omega$ и устремляя $\Delta\omega$ к нулю, за счет второго слагаемого в фигурных скобках для средней мощности получим

$$-\varepsilon Q_{e0} \omega_0 a(t) \sin \theta(t). \quad (7.26)$$

Таким образом, в случае резонанса средняя мощность является функцией как амплитуды a , так и «расстройки фазы» θ .

Основываясь на этом примере, можно предположить, что в *резонансном случае* как изменение амплитуды, так и частота зависят от значений амплитуды a и «расстройки фазы» θ . Что касается *нерезонансного случая*, то изменение амплитуды и частота зависят только от амплитуды (так же как в случае собственных колебаний).

Другая особенность вынужденных нелинейных колебаний заключается в появлении *резонанса на комбинационных частотах*. Это можно видеть из того, что в решении уравнения вынужденных нелинейных колебаний благодаря наличию нелинейных членов войдут высшие гармоники с частотами, примерно равными $n\omega_0$. Рассматривая среднюю мощность, вносимую в систему «с помощью» этих гармоник, т. е. подставляя в интеграл (7.24) не $\sin(\omega_0 t + \theta)$, а $\sin(n\omega_0 t + \theta_n)$, придем к выводу о возможности резонанса на частоте, примерно равной $n\omega_0$. В общем слу-

чае, когда правая часть уравнения (7.4) более сложным образом зависит от аргумента $\omega_e t$, возможно возникновение резонанса на комбинационных частотах вида $n\omega_0 + m\omega_e$, где n и m — целые числа. Действительно, разложение функции εQ в ряд Фурье приводит к появлению гармоник с указанными частотами. Итак, в общем случае возможен резонанс вынужденных колебаний на частотах

$$\omega_e \approx \frac{q}{p} \omega_0, \quad (7.27)$$

где p и q — целые взаимно простые числа (если $p=q$, то резонанс называется **главным**).

Изложим метод Крылова — Боголюбова применительно к вынужденным нелинейным колебаниям. В качестве исходного уравнения рассмотрим уравнение вида

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}, \omega_e t), \quad (7.28)$$

где εQ — периодическая функция относительно $\omega_e t$ с периодом 2π .

В *нерезонансном случае* решение уравнения (7.28) будем искать в виде ряда

$$\xi = a \cos \psi + \varepsilon \xi_1(a, \psi, \omega_e t) + \dots, \quad (7.29)$$

где a и ψ подчинены уравнениям (7.6). Подставляя (7.29) в (7.28) и учитывая (7.6), найдем соотношение, определяющее первое приближение (ср. с (7.13)):

$$\begin{aligned} & \omega_0^2 \frac{\partial^2 \varepsilon \xi_1}{\partial \psi^2} + 2\omega_0 \frac{\partial^2 \varepsilon \xi_1}{\partial \psi \partial t} + \frac{\partial^2 \varepsilon \xi_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 \varepsilon \xi_1 = \\ & = \varepsilon Q_0(a, \psi, \omega_e t) + 2\omega_0 a \varepsilon \omega_1 \cos \psi + 2\omega_0 \varepsilon f_1 \sin \psi, \end{aligned} \quad (7.30)$$

где

$$\varepsilon Q_0(a, \psi, \omega_e t) = \varepsilon Q(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi, \omega_e t).$$

Разлагая известную функцию εQ_0 в двойной ряд Фурье по переменным ψ и $\omega_e t$

$$\varepsilon Q_0(a, \psi, \omega_e t) = \sum_{n,m} \varepsilon \alpha_{nm}(a) e^{i(n\omega_e t + m\psi)} \quad (7.31)$$

и представляя в виде ряда Фурье неизвестную функцию

$$\varepsilon \xi_1(a, \psi, \omega_e t) = \sum_{n,m} \varepsilon \gamma_{nm}(a) e^{i(n\omega_e t + m\psi)}, \quad (7.32)$$

из (7.30) получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m} [\omega_0^2 - (n\omega_e + m\omega_0)^2] \varepsilon \gamma_{nm} e^{i(n\omega_e t + m\psi)} = \\ & = \sum_{n,m} \varepsilon \alpha_{nm} e^{i(n\omega_e t + m\psi)} + 2\omega_0 a \varepsilon \omega_1 \cos \psi + 2\omega_0 \varepsilon f_1 \sin \psi. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Из этого соотношения видно, что в решении могут появиться коэффициенты $\varepsilon \gamma_{nm}$, обращающиеся в бесконечность. Чтобы исключить появление таких членов, потребуем выполнения условия, аналогичного условиям (7.7):

$$\sum_{n,m} \varepsilon \alpha_{nm} e^{i(n\omega_e t + m\psi)} + 2\omega_0 a \varepsilon \omega_1 \cos \psi + 2\omega_0 \varepsilon f_1 \sin \psi = 0, \quad (7.34)$$

если $\omega_0^2 - (n\omega_e + m\omega_0)^2 = 0$.

Требование (7.34) позволяет определить функции $\varepsilon \omega_1$ и εf_1 . В самом деле, поскольку рассматривается нерезонансный случай, условие

$$\omega_0^2 - (n\omega_e + m\omega_0)^2 = 0$$

будет выполняться, если

$$n = 0, \quad m = \pm 1. \quad (7.35)$$

Следовательно, сумма по n и m в (7.34) сводится к сумме двух членов с коэффициентами $\alpha_{0,+1}$ и $\alpha_{0,-1}$. Таким образом, используя (7.35) и общее выражение для коэффициентов Фурье

$$\varepsilon \alpha_{nm} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0(a, \psi, \omega_e t) e^{-i(n\omega_e t + m\psi)} d(\omega_e t) d\psi, \quad (7.36)$$

из условия (7.34) найдем

$$\varepsilon f_1 = - \frac{\varepsilon}{4\pi^2 \omega_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_0(a, \psi, \omega_e t) \sin \psi d\psi d(\omega_e t), \quad (7.37)$$

$$\varepsilon \omega_1 = - \frac{\varepsilon}{4\pi^2 \omega_0 a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_0(a, \psi, \omega_e t) \cos \psi d\psi d(\omega_e t). \quad (7.38)$$

В резонансном случае частота вынуждающей силы или равна резонансной частоте или близка к ней. Следовательно, можно положить (см. (7.27)), что

$$\omega_0^2 = \left(\frac{p}{q} \omega_e \right)^2 + \varepsilon \Delta, \quad (7.39)$$

где $\varepsilon\Delta$ — малая заданная расстройка между квадратом собственной частоты ω_0 и квадратом резонансной частоты. Используя (7.39), запишем исходное уравнение (7.28) в форме

$$\ddot{\xi} + \left(\frac{p}{q} \omega_e\right)^2 \xi = \varepsilon \{Q(\xi, \dot{\xi}, \omega_e t) - \xi\Delta\}. \quad (7.40)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде ряда (7.29), где a и ψ подчинены «своим» уравнениям, имеющим более общий вид по сравнению с (7.6), так как в резонансном случае изменения амплитуды и фазы зависят не только от значения амплитуды a , но и от фазовой расстройки θ :

$$\dot{a} = \varepsilon f_1(a, \theta) + \dots, \quad \dot{\psi} = \frac{p}{q} \omega_e + \varepsilon \omega_1(a, \theta) + \dots, \quad (7.41)$$

где ψ и θ связаны соотношением

$$\psi = \frac{p}{q} \omega_e t + \theta(t). \quad (7.42)$$

Кроме того, потребуем, чтобы в решении отсутствовали члены, обращающиеся в бесконечность.

Подставляя (7.42) в (7.29) и (7.41), найдем, что

$$\xi = a \cos\left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right) + \varepsilon \xi_1(a, \theta, \omega_e t) + \dots, \quad (7.43)$$

а уравнения, которым подчинены переменные a и θ , имеют вид

$$\dot{a} = \varepsilon f_1(a, \theta) + \dots, \quad \dot{\theta} = \varepsilon \omega_1(a, \theta) + \dots \quad (7.44)$$

С помощью (7.43) и (7.44) из (7.40) получим соотношение, определяющее функции $\varepsilon \xi_1$, εf_1 и $\varepsilon \omega_1$ в резонансном случае (промежуточные вычисления аналогичны (7.8)–(7.13)):

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q} \omega_e\right)^2 \varepsilon \xi_1 + \frac{\partial^2 \varepsilon \xi_1}{\partial t^2} = \varepsilon Q_0\left(a, \frac{p}{q} \omega_e t + \theta, \omega_e t\right) + \\ + \left(2 \frac{p}{q} \omega_e \varepsilon \omega_1 - \varepsilon \Delta\right) a \cos\left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right) + \\ + 2 \frac{p}{q} \omega_e \varepsilon f_1 \sin\left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right); \quad (7.45) \end{aligned}$$

вдесь

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_0\left(a, \frac{p}{q} \omega_e t + \theta, \omega_e t\right) = \\ = \varepsilon Q\left(a \cos\left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right), -\frac{p}{q} \omega_e a \sin\left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right), \omega_e t\right). \end{aligned}$$

Разлагая $\varepsilon \xi_1$ в ряд Фурье (см. (7.32)), получим

$$\left(\frac{p}{q} \omega_e\right)^2 \varepsilon \xi_1 + \frac{\partial^2 \varepsilon \xi_1}{\partial t^2} = \sum_{n, m} \left\{ \left(\frac{p}{q}\right)^2 - \left(n + m \frac{p}{q}\right)^2 \right\} \omega_e^2 \varepsilon \gamma_{nm} e^{i \left[n \omega_e t + m \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right) \right]}. \quad (7.46)$$

Принимая далее во внимание разложение функции εQ_0 в ряд Фурье (см. (7.31)) и требуя, чтобы коэффициенты $\varepsilon \gamma_{nm}$ были конечны, из (7.45) найдем

$$\sum_{n, m} \varepsilon \alpha_{nm} e^{i \left[n \omega_e t + m \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right) \right]} + \left(2 \frac{p}{q} \omega_e \varepsilon \omega_1 - \varepsilon \Delta\right) a \cos \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right) + 2 \frac{p}{q_i} \omega_e \varepsilon f_1 \sin \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right) = 0, \quad (7.47)$$

где суммирование ведется по любым целым n и m , для которых

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \left(n + m \frac{p}{q}\right)^2 = 0, \quad (7.48)$$

причем это условие эквивалентно более простому:

$$nq + (m \pm 1)p = 0. \quad (7.49)$$

Приравнявая в (7.47) коэффициенты при $\cos \psi$ и $\sin \psi$ соответственно, можно будет найти функции εf_1 и $\varepsilon \omega_1$. С этой целью, используя (7.49), запишем показатели экспонент из (7.47) в виде

$$n \omega_e t + m \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right) = \mp \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right) - \frac{nq}{p} \theta. \quad (7.50)$$

Тогда двойную сумму в соотношении (7.47) можно будет представить как сумму только по n :

$$\begin{aligned} & \left[\sum_n \varepsilon \alpha_{n, -n \frac{q}{p} + 1} e^{-in \frac{q}{p} \theta} \right] e^{i\psi} + \left[\sum_n \varepsilon \alpha_{n, -n \frac{q}{p} - 1} e^{-in \frac{q}{p} \theta} \right] e^{-i\psi} = \\ & = \left[\sum_n \left(\varepsilon \alpha_{n, -n \frac{q}{p} + 1} + \varepsilon \alpha_{n, -n \frac{q}{p} - 1} \right) e^{-in \frac{q}{p} \theta} \right] \cos \psi + \\ & + \left[\sum_n i \left(\varepsilon \alpha_{n, -n \frac{q}{p} + 1} - \varepsilon \alpha_{n, -n \frac{q}{p} - 1} \right) e^{-in \frac{q}{p} \theta} \right] \sin \psi, \quad (7.51) \end{aligned}$$

где суммы и разности коэффициентов Фурье равны (см. (7.36))

$$\varepsilon \alpha_{n,-n \frac{q}{p} + 1} + \varepsilon \alpha_{n,-n \frac{q}{p} - 1} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 e^{in \frac{q}{p} \theta} \cos \psi d(\omega_e t) d\psi, \quad (7.52)$$

$$i \left(\varepsilon \alpha_{n,-n \frac{q}{p} + 1} - \varepsilon \alpha_{n,-n \frac{q}{p} - 1} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 e^{in \frac{q}{p} \theta} \sin \psi d(\omega_e t) d\psi.$$

Используя (7.51), (7.52) и приравнявая соответствующие коэффициенты при $\sin \psi$ и $\cos \psi$, из (7.47) получим

$$\varepsilon f_1 = - \frac{1}{4\pi^2 \frac{p}{q} \omega_e} \sum_n e^{-in \frac{q}{p} \theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0(a, \psi, \omega_e t) e^{+in \frac{q}{p} \theta} \cos \psi d(\omega_e t) d\psi, \quad (7.53)$$

$$\varepsilon \omega_1 = \frac{\varepsilon \Delta}{2 \frac{p}{q} \omega_e}$$

$$- \frac{1}{4\pi^2 \frac{p}{q} \omega_e} \sum_n e^{-in \frac{q}{p} \theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0(a, \psi, \omega_e t) e^{+in \frac{q}{p} \theta} \cos \psi d(\omega_e t) d\psi \quad (7.54)$$

(здесь $\theta = \psi - \frac{p}{q} \omega_e t$, суммирование ведется по $n = 0, +1, +2, \dots$). Эти соотношения позволяют получить решение задачи о резонансе вынужденных нелинейных колебаний в первом приближении.

Пример 7.3. Резонанс нелинейных колебаний материальной точки, подвешенной на пружине.

Точка массы m совершает колебания в вертикальном направлении в среде с сопротивлением под действием силы упругой деформации пружины и достаточно малой силы Q_e , гармонически зависящей от времени. Найти амплитудную характеристику стационарных колебаний точки вблизи резонанса.

Помещая начало отсчета в точку подвеса и направляя ось Ox вдоль оси пружины, получим выражения кинетической и потенциальной энергий точки, диссипативной функции и нестационарной силы:

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad U = -mgx + U_n(x),$$

$$D = \frac{k}{2} \dot{x}^2, \quad Q_e = F_e \sin \omega_e t,$$

где U_x — энергия упругой деформации пружины, k — коэффициент сопротивления среды (предполагается, что сила сопротивления пропорциональна скорости точки), F_e и ω_e — амплитуда и частота нестационарной силы, а x — координата точки. Определяя положение x_{eq} равновесия точки из уравнения

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{\text{eq}} = -mg + \left. \frac{\partial U_x}{\partial x} \right|_{\text{eq}} = 0,$$

разложим потенциальную энергию U в ряд по степеням отклонения $\xi = x - x_{\text{eq}}$ точки от положения равновесия с точностью до величин четвертого порядка малости включительно:

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} \right)_{\text{eq}} \xi^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 U_x}{\partial x^3} \right)_{\text{eq}} \xi^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 U_x}{\partial x^4} \right)_{\text{eq}} \xi^4.$$

Тогда уравнение движения точки можно будет записать в виде (7.28)

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}, \omega_e t) = -\kappa_1 \dot{\xi}^2 - \kappa_2 \xi^3 - 2\mu \dot{\xi} + f_e \sin \omega_e t, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{1}{m} \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} \right)_{\text{eq}}, \quad \kappa_1 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^3 U_x}{\partial x^3} \right)_{\text{eq}}, \\ \kappa_2 &= \frac{1}{6m} \left(\frac{\partial^4 U_x}{\partial x^4} \right)_{\text{eq}}, \quad 2\mu = \frac{k}{m}, \quad f_e = \frac{F_e}{m}. \end{aligned}$$

Рассматривая выражение средней мощности нестационарной силы (см. (7.24) и (7.25)), придем к выводу о возможности главного резонанса, в связи с чем решение исходного уравнения (1) будем искать в виде (см. (7.43))

$$\xi = a \cos \psi, \quad (2)$$

где $\psi = \omega_e t + \theta$. Подставляя (2) в εQ , с точностью до ε найдем (см. (7.45))

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_0 &= -\frac{3\kappa_2}{4} a^3 \cos \psi + 2\mu \omega_e a \sin \psi + f_e \sin \omega_e t - \\ &\quad - \frac{\kappa_1 a^2 \dot{\psi}}{2} (1 + \cos 2\psi) - \frac{\kappa_2}{4} a^3 \cos 3\psi. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в первом приближении коэффициент κ_1 (или третья производная функции U_x) не влияет на поведение системы.

Пользуясь выражением εQ_0 , найдем необходимые для решения коэффициенты Фурье этой функции (см. (7.53) и (7.54)). Например, коэффициенты Фурье, соответствующие $n=0$, получим, учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 \begin{Bmatrix} \sin \psi \\ \cos \psi \end{Bmatrix} d\psi d(\omega_e t) = \begin{cases} 4\pi^2 \mu \omega_e a \\ -\frac{3}{2} \pi^2 \kappa_2 a^3. \end{cases}$$

Аналогично коэффициенты Фурье, соответствующие $n = \pm 1$, найдем, вычисляя интегралы

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 (\cos \theta \pm i \sin \theta) \sin \psi d\psi d(\omega_e t),$$

где

$$\theta = \psi - \omega_e t.$$

Принимая во внимание, что величина этого интеграла определена значениями

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 \cos \psi \sin \psi \cos(\omega_e t) d\psi d(\omega_e t) = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 \sin^2 \psi \sin(\omega_e t) d\psi d(\omega_e t) = \pi^2 f_e,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 \sin^2 \psi \cos(\omega_e t) d\psi d(\omega_e t) = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 \cos \psi \sin \psi \sin(\omega_e t) d\psi d(\omega_e t) = 0,$$

найдем

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 e^{\pm i\theta} \sin \psi d\psi d(\omega_e t) = \pi^2 f_e.$$

Нетрудно убедиться, что соответствующие $n = \pm 1$ члены ряда (7.54) пропорциональны значениям

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 e^{\pm i\theta} \cos \psi d\psi d(\omega_e t) = \mp i\pi^2 f_e,$$

а интегралы с $n = \pm 2, \pm 3, \dots$ все равны нулю.

Далее, используя (7.53) и (7.54), найдем функции

$$\varepsilon f_1 = \frac{-1}{4\pi^2 \omega_e} [4\pi^2 \mu \omega_e a + (e^{-i\theta} + e^{+i\theta}) \pi^2 f_e],$$

$$\varepsilon \omega_1 = \frac{\varepsilon \Delta}{2\omega_e} - \frac{1}{4\pi^2 \omega_e a} \left[-\frac{3}{2} \pi^2 \kappa_2 a^3 + e^{-i\theta} (-i\pi^2 f_e) + e^{+i\theta} (i\pi^2 f_e) \right],$$

определяющие уравнения для a и θ (см. (7.44)):

$$\begin{aligned}\dot{a} &= -\mu a - \frac{f_e}{2\omega_e} \cos \theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{\varepsilon\Delta}{2\omega_e} + \frac{3\kappa_2 a^2}{8\omega_e} + \frac{f_e}{2\omega_e a} \sin \theta;\end{aligned}$$

здесь $\varepsilon\Delta = \omega_0^2 - \omega_e^2$ (см. (7.39)).

В случае стационарного режима $\dot{a} = 0$ и $\dot{\theta} = 0$; следовательно,

$$-\mu a \omega_e = \frac{f_e}{2} \cos \theta, \quad a \left(\frac{3\kappa_2 a^2}{8} + \frac{\varepsilon\Delta}{2} \right) = \frac{f_e}{2} \sin \theta.$$

Возводя в квадрат обе части каждого из этих уравнений и складывая результаты, найдем амплитудную характеристику $a(\omega_e)$ в виде

$$a^2 \left[\left(\frac{3\kappa_2}{8} a^2 + \frac{\varepsilon\Delta}{2} \right)^2 + \omega_e^2 \mu^2 \right] = \left(\frac{f_e}{2} \right)^2. \quad (3)$$

Это уравнение можно упростить, используя близость ω_e к ω_0 и малость всех членов, входящих в правую часть уравнения (1). Вводя вместо $\varepsilon\Delta$ разность частот $\Delta\omega = \omega_e - \omega_0$, из (3) получим

$$(\omega_0 + \Delta\omega)^2 \mu^2 + \left[\frac{3\kappa_2}{8} a^2 - \frac{\Delta\omega}{2} (2\omega_0 + \Delta\omega) \right]^2 = \left(\frac{f_e}{2a} \right)^2. \quad (4)$$

Пренебрегая в этом уравнении членами, пропорциональными $(\Delta\omega)^3$ и $(\Delta\omega)^4$, найдем

$$\begin{aligned}\left[\omega_0^2 \mu^2 + \left(\frac{3\kappa_2}{8} a^2 \right)^2 \right] + 2\omega_0 \left(\mu^2 - \frac{3\kappa_2}{8} a^2 \right) \Delta\omega + \\ + (\omega_0^2 + \mu^2) (\Delta\omega)^2 = \left(\frac{f_e}{2a} \right)^2.\end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение (5) также можно упростить, поскольку $\omega_0^2 \gg \kappa_2 a^2$, $\omega_0 \gg \mu$ (ввиду малости всех членов εQ). Полагая далее, что все члены, входящие в εQ , являются величинами одного порядка, и сопоставляя второй и третий члены εQ , найдем, что $\kappa_2 a^2 \sim \mu \omega_0$. Учитывая все приведенные оценки, получим амплитудную характеристику в виде

$$a^2 [(\lambda a^2 - \Delta\omega)^2 + \mu^2] = \left(\frac{f_e}{2\omega_0} \right)^2, \quad (6)$$

где $\lambda = \frac{3\kappa_2}{8\omega_0}$.

Разрешая это квадратное относительно $\Delta\omega$ уравнение, найдем функцию

$$\Delta\omega = \lambda a^2 \pm \left[\left(\frac{f_e}{2\omega_0 a} \right)^2 - \mu^2 \right]^{1/2}, \quad (7)$$

с помощью которой нетрудно построить амплитудную характеристику (см. рис. 7.5, где изображен случай $\kappa_2 < 0$). Дифференцируя по $\Delta\omega$ правую и левую части уравнения (6), получим

$$\frac{d(a^2)}{d(\Delta\omega)} = \frac{2a^2(\lambda a^2 - \Delta\omega)}{3(\lambda a^2)^2 - 4\lambda a^2 \Delta\omega + \mu^2 + (\Delta\omega)^2}. \quad (8)$$

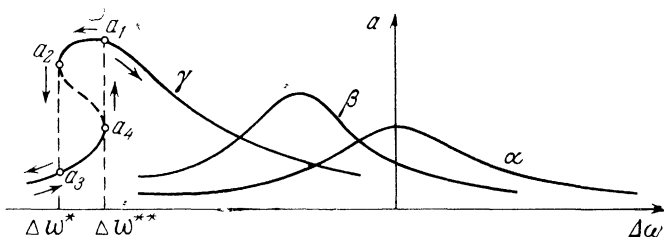


Рис. 7.5

Эти результаты позволяют исследовать амплитудную характеристику. Сначала рассмотрим известный уже предельный случай линейных колебаний. С этой целью устремим $f_e \rightarrow 0$ и $a \rightarrow 0$ в функциях (6) и (8) (см. (6.72) и кривую α на рис. 7.5); тогда

$$a^2 = \left(\frac{f_e}{2\omega_0} \right)^2 \frac{1}{\mu^2 + (\Delta\omega)^2}, \quad \frac{d(a^2)}{d(\Delta\omega)} = \left(\frac{f_e}{2\omega_0} \right)^2 \frac{-2\Delta\omega}{[\mu^2 + (\Delta\omega)^2]^2}.$$

Если нелинейным членом пренебречь нельзя, а $|\lambda|a^2 < \mu$, то амплитудная характеристика близка к соответствующей характеристике линейных колебаний: ее максимум смещен в сторону $\Delta\omega < 0$, поскольку $\kappa_2 < 0$ (см. β на рис. 7.5). Действительно, амплитуда a достигает максимума при $\Delta\omega = \lambda a^2$, а ее значение

$$a_{\max} = \left(\frac{f_e}{2\omega_0} \right) \frac{1}{\mu}$$

совпадает с соответствующим значением амплитуды линейных колебаний. В этом случае производная $\frac{d(a^2)}{d(\Delta\omega)}$ нигде в бесконечность не обращается.

Если $|\lambda|a^2 > \mu$, то производная $\frac{d(a^2)}{d(\Delta\omega)}$ обращается в бесконечность при двух значениях

$$\Delta\omega = 2\lambda a^2 \pm [(\lambda a^2)^2 - \mu^2]^{1/2}. \quad (9)$$

При этом условии, как показывает анализ выражения (6), зависимость амплитуды вынужденных колебаний в некоторой области частот оказывается неоднозначной (см. γ на рис. 7.5). Поэтому становится возможным так называемый срыв амплитуды. Это явление происходит следующим образом. Пусть частота ω_e вынуждающей силы сравнительно велика. Тогда при уменьшении ω_e до достаточно малых значений амплитуда вынужденных колебаний будет плавно изменяться в областях $\omega_e > \omega_e^*$ и $\omega_e < \omega_e^*$, а в «точке»

$$\omega_e = \omega_e^* = \omega_0 + 2\lambda a^2 + [(\lambda a^2)^2 - \mu^2]^{1/2},$$

которой соответствует бесконечное значение производной $\frac{da^2}{d(\Delta\omega)}$, произойдет скачкообразное изменение амплитуды от величины a_2 до величины a_3 . Аналогично при увеличении ω_e от достаточно малых значений до сравнительно больших значений амплитуда вынужденных колебаний изменяется скачкообразно в точке

$$\omega_e = \omega_e^{**} = \omega_0 + 2\lambda a^2 - [(\lambda a^2)^2 - \mu^2]^{1/2}$$

от величины a_4 до величины a_1 , а в областях $\omega_e < \omega_e^{**}$ и $\omega_e > \omega_e^{**}$ происходит плавное изменение амплитуды. Скачкообразное изменение амплитуды и представляет собой срыв амплитуды.

Заметим, что срыв может наблюдаться только в том случае, если область $\omega_e^* - \omega_e^{**}$ частот, в которой зависимость амплитуды от частоты неоднозначна, отлична от нуля. При $\omega_e^* - \omega_e^{**} \rightarrow 0$ явление срыва будет исчезать. Последнему условию соответствует равенство нулю подкоренного выражения (9). Используя амплитудную характеристику (6) и введенные ранее обозначения, найдем, что в этом случае

$$a^2 = \frac{8k\omega_0}{\left| \left(\frac{\partial^4 U_{\kappa}}{\partial x^4} \right)_{\text{eq}} \right|}, \quad \Delta\omega = -\frac{k}{m}, \quad F_e^2 = \frac{16k^3\omega_0}{\left| \left(\frac{\partial^4 U_{\kappa}}{\partial x^4} \right)_{\text{eq}} \right|}.$$

§ 7.3. Метод усреднения

Рассмотрим точку, совершающую периодическое движение в стационарном потенциальном поле $U(q)$ с периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Пусть на точку кроме поля $U(q)$ действует также периодическая

сила $Q(q, t)$ частоты Ω , значительно большей по сравнению с ω_0 [34, 21, 19, 35]. Тогда уравнением движения точки является

$$a\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q} + Q(q, t), \quad (7.55)$$

где сила Q может быть представлена в виде

$$Q(q, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} Q_n(q) e^{in\Omega t}, \quad (7.56)$$

$$Q_n(q) = \frac{1}{T} \int_0^T Q(q, t) e^{-in\Omega t} dt, \quad T = 2\pi/\Omega.$$

При достаточно большой частоте Ω решение уравнения (7.55) можно представить в виде суммы медленно меняющейся за период T функции η и осциллирующей с частотой Ω функции ξ , т. е. в виде

$$q = \eta + \xi. \quad (7.57)$$

Предположим также, что смещение точки в результате воздействия силы Q много меньше смещения под воздействием силы, действующей на точку в поле U . Следовательно,

$$|\xi| \ll |\eta|. \quad (7.58)$$

Разложим далее функции $\frac{\partial U(q)}{\partial q}$ и $Q(q, t)$ в ряд Тейлора в «точке» η по степеням ξ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q} &= \left(\frac{\partial U}{\partial q} + \xi \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} + \dots \right) \Big|_{q=\eta}; \\ Q(q, t) &= \sum \left(Q_n + \xi \frac{\partial Q_n}{\partial q} + \dots \right) \Big|_{q=\eta} e^{in\Omega t}. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Затем, подставляя (7.57) и (7.59) в (7.55), получим

$$\begin{aligned} a(\ddot{\eta} + \ddot{\xi}) &= - \left(\frac{\partial U(\eta)}{\partial \eta} + \xi \frac{\partial^2 U(\eta)}{\partial \eta^2} + \dots \right) + \\ &+ \sum \left(Q_n(\eta) + \xi \frac{\partial Q_n(\eta)}{\partial \eta} + \dots \right) e^{in\Omega t}. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Теперь подчеркнем, что среднее значение функции ξ по периоду T равно нулю, а изменение функции η за это же время очень мало. Поэтому при усреднении по периоду T члены, содержащие

только функцию η , можно вынести за знак интеграла по времени. Следовательно, усредняя обе части (7.60) по периоду T , найдем

$$a\ddot{\eta} = -\frac{\partial U}{\partial \eta} + Q_0(\eta) + \left\langle \xi \sum_{n \neq 0} \frac{\partial Q_n}{\partial \eta} e^{in\Omega t} \right\rangle; \quad (7.61)$$

$$\text{здесь } \langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau) d\tau.$$

Вычитая почленно (7.61) из (7.60) и пренебрегая членами порядка ξ , получим уравнение, определяющее функцию ξ :

$$a\ddot{\xi} = \sum_{n \neq 0} Q_n(\eta) e^{in\Omega t}. \quad (7.62)$$

Отсюда в силу «постоянства» коэффициентов $Q_n(\eta)$, получим

$$\xi = -\sum_{n \neq 0} \frac{Q_n(\eta)}{a(n\Omega)^2} e^{in\Omega t}. \quad (7.63)$$

С помощью (7.63) запишем (7.61) в виде

$$a\ddot{\eta} = -\frac{\partial U}{\partial \eta} + F(\eta), \quad (7.64)$$

где

$$F(\eta) = Q_0(\eta) - \frac{1}{a} \left\langle \sum_{n \neq 0} \frac{Q_n(\eta)}{(n\Omega)^2} e^{in\Omega t} \sum_{n' \neq 0} \frac{\partial Q_{n'}(\eta)}{\partial \eta} e^{in'\Omega t} \right\rangle. \quad (7.65)$$

Далее учитывая, что

$$\langle e^{i(n+n')\Omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} e^{i(n+n')\Omega t} dt = \delta_{n, -n'}, \quad (7.66)$$

вместо (7.65) найдем

$$\begin{aligned} F(\eta) &= Q_0(\eta) - \frac{1}{a} \sum_{n \neq 0} \frac{Q_n(\eta)}{(n\Omega)^2} \frac{\partial Q_n^*}{\partial \eta} = \\ &= Q_0(\eta) - \frac{1}{2a} \sum_{n \neq 0} \frac{\partial |Q_n|^2}{\partial \eta} - \frac{1}{(n\Omega)^2}, \end{aligned} \quad (7.67)$$

или

$$F(\eta) = Q_0(\eta) - \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\langle \left[\int \tilde{Q}(\eta, t) dt \right]^2 \right\rangle, \quad (7.68)$$

где

$$\tilde{Q} = Q(\eta, t) - Q_0.$$

Уравнение движения по «сглаженной» за период T траектории с учетом (7.64) и (7.68) имеет вид

$$a\ddot{\eta} = -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \eta}, \quad (7.69)$$

где эффективная потенциальная энергия

$$U_{\text{eff}} = U(\eta) + \Phi(\eta),$$

$$\Phi(\eta) = \frac{1}{2a} \left\langle \left[\int \tilde{Q}(\eta, t) dt \right]^2 \right\rangle - \int Q_0(\eta) d\eta. \quad (7.70)$$

Отсюда видно, что действие быстроосциллирующей силы сводится к возникновению эффективного потенциального поля $\Phi(\eta)$.

В частном случае гармонической силы

$$Q(q, t) = Q(q) \cos \Omega t. \quad (7.71)$$

Используя (7.63), получим

$$\xi = -\frac{Q}{a\Omega^2}; \quad (7.72)$$

а уравнение движения по «сглаженной» траектории примет вид (7.69), где согласно (7.70)

$$U_{\text{eff}} = U(\eta) + \frac{1}{4a\Omega^2} Q^2(\eta). \quad (7.73)$$

Таким образом, усредненное по осцилляциям движение точки происходит как бы под действием поля U и дополнительного стационарного поля, потенциал которого квадратично зависит от амплитуды переменной силы.

Пример 7.4. Устойчивость маятника с вибрирующим подвесом. Точка подвеса математического маятника длины l и массы m совершает вертикальные колебания по закону $s = s_0 \cos \omega t$. Найти эффективную потенциальную энергию маятника и его положения устойчивого равновесия.

Помещая начало координат в положение точки подвеса маятника при $t=0$ и направляя ось x вниз по вертикали, а ось y в плоскости качания маятника, для координат маятника получим

$$x = l \cos \varphi + s_0 \cos \omega t, \quad y = l \sin \varphi, \quad (1)$$

где φ — угол отклонения маятника от вертикали. Тогда для кинетической и потенциальной энергий маятника найдем выражения

$$T = \frac{m}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 - 2ls_0 \omega \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \omega t + s_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t), \quad (2)$$

$$U = -mgl \sin \varphi.$$

Теперь напишем уравнение движения

$$ml^2 \ddot{\varphi} = - \frac{\partial}{\partial \varphi} (-mgl \cos \varphi) - mls_0 \omega^2 \sin \varphi \cos \omega t. \quad (3)$$

Применяя метод усреднения, находим, что переменная сила (7.71) в данном случае равна

$$Q = -mgs_0 \omega^2 \cos \omega t \sin \varphi. \quad (4)$$

Поэтому эффективная потенциальная энергия (7.73) имеет вид

$$U_{\text{eff}} = -mgl \left[\cos \varphi - \frac{1}{4} \left(\frac{s_0}{l} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \sin^2 \varphi \right], \quad (5)$$

где

$$\omega_0^2 = g/l.$$

Положения устойчивого равновесия найдем из уравнения

$$\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \varphi} = -mgl \left[-\sin \varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{s_0 \omega}{l \omega_0} \right)^2 \sin \varphi \cos \varphi \right] = 0. \quad (6)$$

Отсюда

$$\varphi_{1eq} = 0, \quad \varphi_{2eq} = \pi, \quad \cos \varphi_{3eq} = -2 \left(\frac{l \omega_0}{s_0 \omega} \right)^2. \quad (7)$$

Определяя знак второй производной

$$\frac{\partial^2 U_{\text{eff}}}{\partial \varphi^2} = mgl \left[\cos \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{s_0 \omega}{l \omega_0} \right)^2 \cos 2\varphi \right], \quad (8)$$

найдем, что положение $\varphi_{1eq} = 0$ всегда устойчиво, а положение $\varphi_{2eq} = \pi$ является устойчивым, если выполняется условие

$$s_0^2 \omega^2 > 2gl. \quad (9)$$

Как видно положение $\varphi_{2eq} = \pi$ является положением динамического равновесия.

Пример 7.5. Заряженная частица в высокочастотном электромагнитном поле [50, 35].

Частица заряда e и массы m движется в стационарных полях $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$, на которые наложено неоднородное быстроосциллирующее поле $\mathbf{E}_\sim(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos \omega t$. Найти уравнение, описывающее усредненную траекторию, если частота Ω движения в стационарных полях мала по сравнению с частотой ω переменного поля.

Запишем уравнение движения частицы в виде

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_0 + e\mathbf{E}_\sim + \sigma[\mathbf{v}\mathbf{H}_\sim], \quad (1)$$

где $\mathbf{F}_0 = e\mathbf{E}_0 + \sigma[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]$, ($\sigma = e/c$), а \mathbf{H}_\sim — напряженность возникающего быстроосциллирующего магнитного поля.

Согласно (7.57) решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}, \quad (2)$$

где $|\boldsymbol{\xi}| \ll |\boldsymbol{\eta}|$. Из уравнения (1), разлагая все функции аргумента \mathbf{r} по степеням $\boldsymbol{\xi}$ с точностью до членов первого порядка, получим

$$m(\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \ddot{\boldsymbol{\xi}}) = \mathbf{F}_0(\boldsymbol{\eta}) + (\boldsymbol{\xi} \nabla) \mathbf{F}_0 + \left(\dot{\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \mathbf{F}_0 + e\mathbf{E}_\sim(\boldsymbol{\eta}) + e(\boldsymbol{\xi} \nabla) \mathbf{E}_\sim(\boldsymbol{\eta}) + \sigma[\dot{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{H}_\sim] + \sigma[\boldsymbol{\eta} (\boldsymbol{\xi} \nabla) \mathbf{H}_\sim] + \sigma[\dot{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{H}_\sim]. \quad (3)$$

Далее, усредняя все члены (3) по периоду $2\pi/\omega$, найдем

$$m\ddot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{F}_0(\boldsymbol{\eta}) + \langle e(\boldsymbol{\xi} \nabla) \mathbf{E}_\sim + \sigma[\dot{\boldsymbol{\eta}} (\boldsymbol{\xi} \nabla) \mathbf{H}_\sim] + \sigma[\dot{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{H}_\sim] \rangle, \quad (4)$$

$$m\ddot{\boldsymbol{\xi}} = (\boldsymbol{\xi} \nabla) \mathbf{F}_0 + \left(\dot{\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \mathbf{F}_0 + e\mathbf{E}_\sim + \sigma[\dot{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{H}_\sim]. \quad (5)$$

Теперь положим, что $\mathbf{E}_\sim(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos \omega t$. Тогда из уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E}_\sim = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_\sim}{\partial t}$$

следует, что

$$\mathbf{H}_\sim(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \sin \omega t, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{k} \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad k = \omega/c.$$

Затем учитывая, что двумя первыми членами правой части (5) ввиду их малости можно пренебречь, после интегрирования (5) получим

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \frac{e}{m\omega} \left(\mathbf{E} \sin \omega t - \frac{1}{c} [\dot{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{H}] \cos \omega t \right), \\ \boldsymbol{\xi} &= -\frac{e}{m\omega^2} \left(\mathbf{E} \cos \omega t + \frac{1}{c} [\dot{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{H}] \sin \omega t \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4) и пренебрегая членами порядка $\dot{\boldsymbol{\eta}}^2/c^2$, найдем

$$m\ddot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{F}_0(\boldsymbol{\eta}) + (\sigma/2) \left\{ -\frac{e}{m\omega^2} (\mathbf{E} \nabla) \mathbf{E} + \frac{\sigma}{m\omega} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \right\},$$

$$m\ddot{\eta} = \mathbf{F}_0(\eta) - \frac{e}{2m\omega^2} \{(\mathbf{E} \nabla) \mathbf{E} + [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}]\}. \quad (7)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{2} \nabla \cdot E^2 = (\mathbf{E} \nabla) \mathbf{E} + [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}],$$

запишем (7) в виде

$$m \ddot{\eta} = \mathbf{F}_0(\eta) - \nabla U(\eta),$$

где

$$U(\eta) = \frac{e^2}{4m\omega^2} E^2 = \frac{e^2}{2m} \left\langle \left[\int \mathbf{E}_{\sim}(\eta, t) dt \right]^2 \right\rangle. \quad (8)$$

Таким образом, усредненная по времени сила, действующая на частицу, потенциальна, причем потенциал силы пропорционален квадрату модуля напряженности электрического поля и не зависит от знака заряда.

Глава VIII

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Ранее (например, в гл. I) отмечалась важная роль, которую играет понятие абсолютно твердого тела как тела отсчета. С понятием твердого тела связано также введение эталона длины. Наряду с этим большое значение имеет теория движения твердых тел под действием внешних сил. Эта теория находит самое широкое применение в практике, в частности на основе этой теории решаются задачи о движении гироскопов, о вращении спутников и т. д.

§ 8.1. Уравнения движения твердого тела

Любое твердое тело можно представить как систему материальных точек, жестко соединенных между собой стержнями постоянной длины и исчезающей массы (см. § 5.2, с. 205). Иначе говоря, твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, на которые наложены внутренние идеальные связи. Поэтому число степеней свободы твердого тела меньше, чем число степеней свободы соответствующей системы свободных точек.

Для того чтобы полностью охарактеризовать движение твердого тела относительно некоторой системы отсчета S , достаточно знать закон движения системы S' , жестко связанной с изучаемым твердым телом (см. рис. 4.1 и 4.2); например, закон движения свободного твердого тела (тела, на которое не налагаются внешние связи) определяется шестью скалярными функциями: тремя проекциями радиуса-вектора $\mathbf{r}_O'(t)$ начала системы S' и тремя углами Эйлера $\varphi(t)$, $\theta(t)$ и $\psi(t)$.

Заметим, что к свободному твердому телу как системе материальных точек применимы законы изменения импульса и кинетического момента, причем эти законы (*в силу жесткой связи точек тела друг с другом*) будут полностью описывать движение тела, т. е. будут являться уравнениями движения*. В последнем можно

* Законы изменения импульса и кинетического момента в применении к произвольной системе материальных точек не дают возможности получить полную информацию о движении системы.

убедиться, показав, что законы (2.103) и (2.111) представляют собой систему шести дифференциальных уравнений второго порядка относительно шести переменных: трех проекций вектора \mathbf{r}_O' и углов φ , θ и ψ . В самом деле, *радиусы-векторы всех точек твердого тела относительно системы S' , жестко связанной с этим телом, являются постоянными относительно S' векторами, а скорости точек тела относительно S' равны нулю, т. е.*

$$\mathbf{r}'_i = x'_{i0}\mathbf{n}_{x'} + y'_{i0}\mathbf{n}_{y'} + z'_{i0}\mathbf{n}_{z'}, \quad \mathbf{v}'_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (8.1)$$

где \mathbf{r}'_i и \mathbf{v}'_i — радиус-вектор и скорость i -той точки тела относительно S' , $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$, $\mathbf{n}_{z'}$ — декартовы орты этой системы, x'_{i0} , y'_{i0} , z'_{i0} — постоянные проекции вектора \mathbf{r}'_i на оси S' , а N — число точек твердого тела. Следовательно, радиусы-векторы и скорости точек твердого тела относительно системы S соответственно равны (см. (1.6), (4.32))

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_O' + \mathbf{r}'_i, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O' + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'_i] \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (8.2)$$

где \mathbf{v}_O' и $\boldsymbol{\omega}$ — соответственно скорость начала системы S' и ее угловая скорость относительно S .

Используя эти выражения или соотношения § 4.7, получим

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_O' + m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'_m], \quad \mathbf{M} = [\mathbf{r}_O'\mathbf{P}] + m[\mathbf{r}'_m\mathbf{v}_O'] + \mathcal{M}, \quad (8.3)$$

где \mathbf{r}'_m — радиус-вектор центра масс тела относительно S' , а

$$\mathcal{M} = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}'_i [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'_i]] \quad (8.3')$$

является частью кинетического момента, обращаемой в нуль, если $\boldsymbol{\omega} = 0$ (в связи с этим вектор \mathcal{M} можно назвать кинетическим моментом вращения твердого тела). Здесь следует иметь в виду, что согласно (8.1) в системе S' , жестко связанной с телом,

$$\mathbf{v}'_m = 0, \quad \mathbf{P}' = 0, \quad \mathbf{M}' = 0. \quad (8.4)$$

Выражения векторов \mathbf{F}^e и \mathbf{L}^e в теории твердого тела имеют такой же вид, как и в общей теории (см. (2.102) и (4.63)):

$$\mathbf{F}^e = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^e, \quad \mathbf{L}^e = [\mathbf{r}_O'\mathbf{F}^e] + \mathcal{L}^e, \quad (8.5)$$

где $\mathcal{L}^e = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}'_i\mathbf{F}_i^e]$.

Таким образом, из (8.3), (4.17)—(4.19) следует, что импульс тела \mathbf{P} зависит от \mathbf{v}_O' , углов Эйлера и их производных, а кинетический момент \mathbf{M} тела, сумма внешних сил \mathbf{F}^e и сумма моментов внешних сил \mathbf{L}^e кроме указанных величин могут содержать \mathbf{g}_O' . Итак, законы изменения импульса и кинетического момента твердого тела

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^e, \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}^e \quad (8.6)$$

содержат в качестве неизвестных только функции \mathbf{g}_O' , φ , θ , ψ и, следовательно, являются уравнениями движения свободного твердого тела.

Если на твердое тело налагаются внешние связи, то уравнения движения тела примут вид (см. (5.19) и (5.20))

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^e + \mathbf{R}^e, \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}_R^e, \quad (8.7)$$

где \mathbf{R}^e и \mathbf{L}_R^e — соответственно сумма реакций всех внешних по отношению к телу связей и сумма моментов реакций этих связей (для решения уравнений (8.7) следует добавить уравнения связей, наложенных на тело).

Заметим, что выбор системы S' , жестко связанной с твердым телом, произволен и сказывается на значении момента \mathcal{L}^e внешних сил*; лишь в частном случае, когда сумма внешних сил равна нулю, момент \mathcal{L}^e внешних сил не зависит от выбора начала O' системы S' , т. е.

$$\mathbf{L}^e = \mathcal{L}^e, \quad \text{если } \mathbf{F}^e = 0. \quad (8.8)$$

Например, это имеет место, когда к телу приложена пара сил, т. е. две силы, равные по величине и противоположно направленные по различным линиям действия (рис. 8.1); тогда

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_2^e = 0,$$

$$\mathbf{L}^e = [\mathbf{r}_1 \mathbf{F}_1^e] + [\mathbf{r}_2 \mathbf{F}_2^e] = [\mathbf{r}_{21} \mathbf{F}_1^e] = \mathcal{L}^e,$$

поскольку $\mathbf{F}_2^e = -\mathbf{F}_1^e$, а $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_{21}$.

* Не зависит от выбора O' только скалярное произведение $\mathcal{L}^e \mathbf{F}^e$, равное согласно (8.5) произведению $\mathbf{L}^e \mathbf{F}^e$.

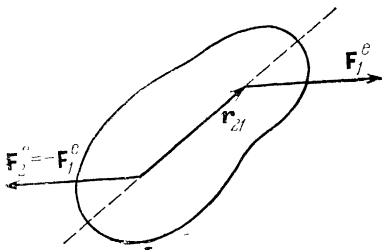


Рис. 8.1

Подчеркнем, что выбор системы S' , который отражает свойства тела и другие условия задачи, может существенно упростить ее решение. В частности, при решении задачи о движении свободного тела начало системы S' целесообразно поместить в центр масс тела, так как при этом

$$\mathbf{r}_O' = \mathbf{r}_m, \quad \mathbf{v}_O' = \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{r}'_m = 0, \quad (8.9)$$

а выражения импульса и кинетического момента примут простой вид

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_O', \quad \mathbf{M} = [\mathbf{r}_O' \mathbf{P}] + \mathcal{M}; \quad (8.10)$$

здесь \mathcal{M} является кинетическим моментом вращения тела относительно поступательно движущейся системы S_m центра масс (см. (4.50)). В этом случае в качестве уравнений движения свободного тела вместо уравнений (8.6) можно использовать уравнение движения центра масс тела относительно системы S и закон изменения момента вращения тела относительно системы S_m (см. (2.102) и (4.55)):

$$m\ddot{\mathbf{r}}_m = \mathbf{F}^e, \quad \dot{\mathcal{M}} = \mathcal{L}^e. \quad (8.11)$$

Если тело имеет одну неподвижную относительно S точку, то начала систем S и S' целесообразно совместить с этой точкой. Тогда

$$\mathbf{r}_O' = 0, \quad \mathbf{v}_O' = 0, \quad (8.12)$$

а векторы \mathbf{P} , \mathbf{M} и \mathbf{L}^e согласно (8.3) и (8.5) будут соответственно равны

$$\mathbf{P} = m[\omega \mathbf{r}'_m], \quad \mathbf{M} = \mathcal{M}, \quad \mathbf{L}^e = \mathcal{L}^e \quad (8.13)$$

(в этом случае импульс и кинетический момент полностью обусловлены вращением тела относительно системы S).

Если тело движется в однородном поле тяжести, то сумма внешних сил и их момент соответственно равны (см. определение (2.89))

$$\mathbf{F}^e = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{g} = m\mathbf{g}, \quad \mathbf{L}^e = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{g}] = [\mathbf{r}_m \mathbf{F}^e]. \quad (8.14)$$

Отсюда видно, что сумма моментов внешних сил, действующих на тело в однородном поле тяжести, равна моменту суммы внешних сил, «приложенных» к центру масс. Момент сил относительно центра масс вследствие (8.14) равен нулю, а уравнения движения свободного тела в рассматриваемом поле принимают вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = \mathbf{g}, \quad \dot{\mathcal{M}} = 0. \quad (8.15)$$

Таким образом, *если свободное твердое тело движется в однородном поле тяжести, то его кинетический момент относительно системы S_m сохраняется**.

В случае *равновесия твердого тела* $\mathbf{P}=0$ и $\mathbf{M}=0$. Следовательно, силы, действующие на покоящееся тело, и их моменты должны подчиняться уравнениям (см. (8.7))

$$\mathbf{F}^e + \sum_i \mathbf{R}_i^e = 0, \quad \mathbf{L}^e + \sum [\mathbf{r}_i \mathbf{R}_i^e] = 0, \quad (8.16)$$

где \mathbf{R}_i^e — реакции связей на i -тую точку (уравнения (8.16) должны быть дополнены уравнениями связей или некоторыми условиями, определяющими, например, направления реакций).

Все приведенные выше уравнения движения твердого тела могут быть записаны и в форме уравнений Лагранжа. Чтобы составить уравнения Лагранжа второго рода, следует определить кинетическую энергию тела, обобщенный потенциал и диссипативные силы Q^d как функции независимых переменных. Используя соотношения (4.64), (8.4) и учитывая, что $T' = 0$, найдем

$$T = \frac{mv_{O'}^2}{2} + mv_{O'} [\omega \mathbf{r}'_m] + \mathcal{T}, \quad (8.17)$$

где $mv_{O'}^2/2$ — часть кинетической энергии, обусловленная только

поступательным движением тела, $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} [\omega \mathbf{r}'_i]^2$ — часть кинетической энергии, обусловленная только вращением твердого

тела, а $mv_{O'} [\omega \mathbf{r}'_m]$ — «смешанный» член, связанный как с поступательным, так и с вращательным движением тела. Если начало O' совмещено с центром масс тела, то «смешанный» член в любом случае равен нулю, а (8.17) принимает вид (см. (4.52))

$$T = \frac{mv_m^2}{2} + \mathcal{T}, \quad (8.18)$$

где \mathcal{T} равняется кинетической энергии вращения твердого тела относительно системы S_m .

Обобщенный потенциал \mathcal{U}^e твердого тела равен потенциалу \mathcal{U} этого тела во внешних полях, так как внутренняя энергия тела постоянна ввиду неизменности расстояний между точками тела, т. е.

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^e. \quad (8.19)$$

* Формулы (8.14) и уравнения (8.15) имеют место для любой свободной механической системы, движущейся в однородном поле тяжести; однако для такой системы уравнения (8.15) не являются уравнениями движения.

Соотношения (8.17), (8.19) совместно с кинематическими формулами Эйлера (4.18) позволяют составить лагранжиан твердого тела. Если в качестве независимых координат свободного тела выбрать углы Эйлера и проекции вектора $\mathbf{r}_{O'}$ на оси системы S и выразить T , \mathcal{U}^e и Q^d через эти переменные, то из (5.77) найдем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right) = Q_j^d \quad (j = 1, \dots, 6), \quad (8.20)$$

где q_1, q_2, q_3 являются проекциями вектора $\mathbf{r}_{O'}$, $q_4 = \varphi$, $q_5 = \theta$, $q_6 = \psi$, а $\mathcal{L} = T - \mathcal{U}^e$. Если же на тело наложены голономные идеальные связи, то получим уравнения вида (8.20), но с меньшим числом степеней свободы.

Пример 8.1. Заряженная двухатомная молекула в постоянном однородном электрическом поле.

Две точки массы m_1 и m_2 с зарядами e_1 и e_2 соединены стержнем исчезающей массы и длины l . Эта «гантель» движется в постоянном однородном электрическом поле напряженности \mathcal{E} . Начальные условия выбраны так, что движение молекулы происходит в неподвижной плоскости, параллельной напряженности поля. Найти уравнения движения молекулы — «гантели» и реакции стержня на материальные точки как функции обобщенных координат и скорости.

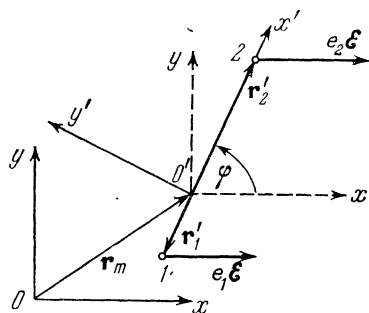


Рис. 8.2

Сориентируем инерциальную систему S так, чтобы ее ось Ox была направлена вдоль напряженности \mathcal{E} , а плоскость Oxy совпала с плоскостью движения (рис. 8.2). Начало системы S' , жестко связанной с молекулой, поместим в центр масс молекулы, ось $O'x'$ направим по оси молекулы, а плоскость $O'x'y'$ совместим с плоскостью Oxy . Проектируя на координатные оси левую и правую части уравнения движения центра масс молекулы (см. (8.11))

$$(m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{r}}_m = e_1 \mathcal{E} + e_2 \mathcal{E},$$

получим уравнения

$$\ddot{x}_m = \frac{e_1 + e_2}{m_1 + m_2} \mathcal{E}, \quad \ddot{y}_m = 0,$$

откуда найдем закон движения центра масс

$$x_m = \frac{e_1 + e_2}{m_1 + m_2} \frac{\mathcal{E}}{2} t^2 + \dot{x}_{m0} t + x_{m0}, \quad y_m = \dot{y}_{m0} t + y_{m0}.$$

Изменение ориентации молекулы определяется законом изменения кинетического момента вращения, равного

$$\mathcal{M} = \mu (x\dot{y} - y\dot{x}) \mathbf{n}_z,$$

где μ — приведенная масса. Учитывая, что $x = l \cos \varphi$, $y = l \sin \varphi$ (здесь φ — угол между осями $O'x$ и $O'x'$), преобразуем последнее выражение к виду

$$\mathcal{M} = \mu l^2 \dot{\varphi} \mathbf{n}_z.$$

Принимая во внимание, что

$$\mathcal{L}^e = [r'_1 e_1 \mathcal{E}] + [r'_2 e_2 \mathcal{E}] = - \frac{l \mathcal{E}}{m_1 + m_2} (m_1 e_2 - m_2 e_1) \sin \varphi \cdot \mathbf{n}_z,$$

в результате подстановки выражений \mathcal{M} и \mathcal{L}^e в уравнение моментов (см. (8.11)) получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{\mathcal{E}}{m_1 m_2 l} (m_1 e_2 - m_2 e_1) \sin \varphi = 0. \quad (1)$$

Отсюда видно: если начальная кинетическая энергия вращения достаточно мала, а $m_1 e_2 > m_2 e_1$, то молекула будет совершать малые колебания около положения $\varphi_{\text{eq}} = 0$ (вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ в положении равновесия молекулы направлен вдоль вектора \mathcal{E}); если же $m_1 e_2 < m_2 e_1$, то молекула будет колебаться около положения $\varphi_{\text{eq}} = \pi$ (вектор \mathbf{r} в положении равновесия направлен противоположно \mathcal{E}); наконец, если $m_1 e_2 = m_2 e_1$, то молекула будет равномерно вращаться с начальной угловой скоростью $\dot{\varphi}_0$.

Реакцию \mathbf{R}_1 стержня на точку I определим из уравнения ее движения

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = e_1 \mathcal{E} + \mathbf{R}_1.$$

Используя соотношение между ускорениями точки I относительно S и S_m (см. (4.46)) и уравнение движения центра масс, получим, что

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{e_1 + e_2}{m_1 + m_2} \mathcal{E} + \ddot{\mathbf{r}}_1',$$

и, следовательно,

$$\mathbf{R}_1 = \frac{m_1 e_2 - m_2 e_1}{m_1 + m_2} \mathcal{E} + m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1'. \quad (2)$$

Разлагая ускорение $\ddot{\mathbf{r}}_1$, равное $-(m_2/m)\ddot{\mathbf{r}}$, по ортам цилиндрических координат, найдем

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{m_2}{m} \dot{\varphi}^2 \mathbf{r} - \frac{m_2}{m} l \ddot{\varphi} \mathbf{n}_\varphi \quad (m = m_1 + m_2). \quad (3)$$

Наконец, подставим (3) в (2) и исключим $\ddot{\varphi}$ с помощью (1); тогда

$$\mathbf{R}_1 = \left[\frac{m_1 e_2 - m_2 e_1}{(m_1 + m_2) l} \mathcal{E} \cos \varphi + \mu \dot{\varphi}^2 \right] \mathbf{r}. \quad (4)$$

Таким образом, реакция стержня связана не только с различием в действии внешнего поля на заряды 1 и 2: при равных удельных зарядах ($e_1/m_1 = e_2/m_2$), так же как и в отсутствие внешнего поля, реакция \mathbf{R}_1 будет связана с вращением тела относительно инерциальной системы отсчета.

Пример 8.2. Заряженная трехатомная линейная молекула в постоянном однородном электрическом поле.

Три точки одинаковой массы m жестко скреплены с прямым стержнем исчезающей массы и длины l : первая и третья на концах стержня, а вторая — посередине (рис. 8.3). Все точки обладают одинаковым по величине электрическим зарядом: первая и третья — положительным, а вторая — отрицательным. Эта «молекула» движется в неподвижной плоскости, параллельной напряженности \mathcal{E} постоянного однородного электрического поля. Найти уравнение движения «молекулы» в независимых координатах и реакции стержня.

Выбирая системы S и S' аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере, для радиуса-вектора центра масс, радиусов-векторов точек и угловой скорости молекулы получим

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_2; \quad \mathbf{r}'_1 = -\frac{\mathbf{r}}{2}, \quad \mathbf{r}'_2 = 0,$$

$$\mathbf{r}'_3 = \frac{\mathbf{r}}{2}, \quad \omega = \dot{\varphi} \mathbf{n}_2,$$

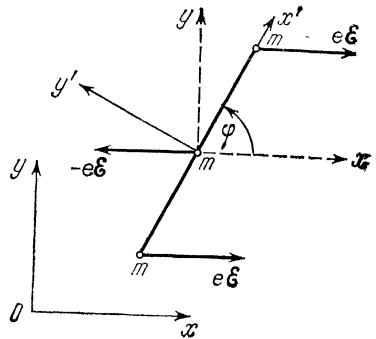


Рис. 8.3

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$, а φ — угол между осью молекулы и осью Ox . Кинетическая энергия, ввиду того что начало O' совмещено с центром масс молекулы, равна (см. (8.18))

$$T = \frac{3m}{2} v_m^2 + \frac{m}{2} \dot{\varphi}^2 \cdot \sum_{i=1}^3 [n_i r_i']^2.$$

Если за независимые координаты взять декартовы координаты x_m и y_m центра масс и угол φ , а также учесть, что все векторы \mathbf{r}_i' перпендикулярны \mathbf{n}_z , то

$$T = \frac{3m}{2} (\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) + \frac{mI^2}{4} \dot{\varphi}^2. \quad (1)$$

Потенциальная энергия молекулы в силу однородности поля равна

$$U^e = -\mathcal{E} (e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2 + e_3 \mathbf{r}_3),$$

где $e_1 = e_3 = e$, а $e_2 = -e$. Используя соотношения (4.46) для каждой точки и имея в виду, что $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_m$, а $\mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_3' = 0$, найдем энергию U^e в независимых координатах

$$U^e = -e \mathcal{E} x_m. \quad (2)$$

Наконец, учитывая (1) и (2), из уравнений Лагранжа получим

$$\ddot{x}_m = \frac{e \mathcal{E}}{3m}; \quad x_m = \frac{e \mathcal{E}}{6m} t^2 + \dot{x}_{m0} t + x_{m0}, \quad (3)$$

$$y_m = \dot{y}_{m0} t + y_{m0}, \quad \varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0.$$

Отсюда видно, что центр масс молекулы движется равноускоренно в направлении вектора \mathcal{E} , а вся молекула равномерно вращается.

Реакцию стержня \mathbf{R}_1 на точку 1 определим из уравнения движения этой точки

$$m \ddot{\mathbf{r}}_1 = e \mathcal{E} + \mathbf{R}_1.$$

Действительно, используя соотношение

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_m + \ddot{\mathbf{r}}_1'$$

и исключая $\ddot{\mathbf{r}}_m$ с помощью (3), после вычисления $\ddot{\mathbf{r}}_1'$ найдем

$$\mathbf{R}_1 = -\frac{2e}{3} \mathcal{E} + \frac{m}{2} \dot{\varphi}_0^2 \mathbf{r}' \quad (4)$$

(как видно, реакция \mathbf{R}_1 при наличии внешнего поля не параллель-

на стержню). Аналогично вычисляются реакции стержня на точки 2 и 3:

$$\mathbf{R}_2 = \frac{4e}{3} \mathcal{E}, \quad \mathbf{R}_3 = -\frac{2e}{3} \mathcal{E} - \frac{m}{2} \dot{\varphi}_0^2 \mathcal{E}. \quad (5)$$

Реакции (4) и (5) являются суммарными силами, действующими на точки со стороны всего стержня, причем составляющие реакций, перпендикулярные стержню, связаны с исчезающе малым изгибом бесконечно жесткого стержня. Нетрудно проверить, что сумма реакций и сумма их моментов равняются нулю, так как реакции стержня — это внутренние силы механической системы. Сумма действительных и виртуальных работ реакций также равна нулю, поскольку стержень — абсолютно твердое тело (см. с. 204—205).

Пример 8.3. *Равновесие тонкого неоднородного стержня.*

Плотность неоднородного тонкого стержня веса $m\mathbf{g}$ и длины l линейно зависит от расстояния до одного из его концов. Более легким концом стержень опирается на гладкий выступ высоты h , а более тяжелым — на гладкую горизонтальную опору, причем нижний конец стержня удерживается нитью (рис. 8.4). Определить реакции опор и нити.

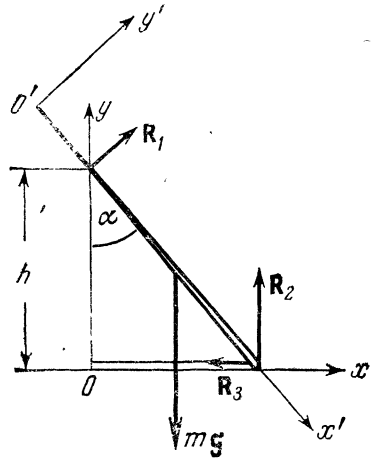


Рис. 8.4

Напишем уравнения (8.16) с учетом (8.14):

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 = 0, \quad (1)$$

$$[\mathbf{r}_m m\mathbf{g}] + [\mathbf{r}_1 \mathbf{R}_1] + [\mathbf{r}_2 \mathbf{R}_2] + [\mathbf{r}_3 \mathbf{R}_3] = 0.$$

Учитывая, что реакция \mathbf{R}_1 перпендикулярна стержню, \mathbf{R}_2 перпендикулярна горизонтальной опоре, а \mathbf{R}_3 направлена по горизонтали, выберем систему координат Oxy так, чтобы большее число компонент сил равнялось нулю. Тогда уравнения (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} R_1 \cos \alpha - R_3 &= 0, & -mgx_m - y_1 R_1 \cos \alpha + x_2 R_2 &= 0, \\ -mg + R_1 \sin \alpha + R_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя систему $O'x'y'$ (см. рис. 8.4), определим положение центра масс стержня. С этой целью заменим в (1) суммирование по точкам интегрированием по длине; тогда получим

$$y'_m = 0, \quad x'_m = \frac{\int_0^l \rho(x') x' dx'}{\int_0^l \rho(x') dx'} = \frac{2}{3} l,$$

где $\rho(x') = ax'$ — плотность массы стержня (здесь постоянная a выражается через массу стержня и равна $2m/l^2$). Отсюда найдем координату x_m центра масс стержня относительно Oxy :

$$x_m = h \operatorname{tg} \alpha - \frac{l}{3} \sin \alpha. \quad (3)$$

Используя (2) и (3), окончательно получим

$$R_1 = \frac{mgl}{6h} \sin 2\alpha, \quad R_2 = mg - R_1 \sin \alpha, \quad R_3 = R_1 \cos \alpha.$$

§ 8.2. Тензор инерции

Кинетический момент и энергия твердого тела содержат достаточно сложные выражения \mathcal{M} и \mathcal{T} , связанные с вращением тела (см. (8.3) и (8.17)). Изучим подробнее эти величины, являющиеся соответственно *линейной и квадратичной формами от проекций угловой скорости (коэффициенты этих форм зависят от распределения масс в теле)*. Принимая во внимание известное векторное соотношение

$$[\mathbf{r}'_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i]] = (r'_i)^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}'_i (\mathbf{r}'_i \boldsymbol{\omega}),$$

представим кинетический момент вращения в виде

$$\mathcal{M} = \sum_i m_i \{ (r'_i)^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}'_i (\mathbf{r}'_i \boldsymbol{\omega}) \}. \quad (8.21)$$

Поскольку векторы \mathbf{r}'_i постоянны лишь относительно системы, жестко связанной с твердым телом, целесообразно использовать проекции момента \mathcal{M} на оси системы S' . Проектируя (8.21), например, на ось $O'x'$, получим

$$\mathcal{M}_{x'} = \sum_i m_i (y_i'^2 + z_i'^2) \omega_{x'} - \sum_i m_i x'_i y'_i \omega_{y'} - \sum_i m_i x'_i z'_i \omega_{z'}.$$

Аналогично определяя $\mathcal{M}_{y'}$ и $\mathcal{M}_{z'}$ убедимся, что все проекции момента можно записать в форме

$$\mathcal{M}_\alpha = \sum_{\beta} J_{\alpha\beta} \omega_{\beta}; \quad (8.22)$$

здесь индексы α и β являются индексами координатных осей системы S' , а совокупность величин $J_{\alpha\beta}$ представляется матрицей

$$\|J_{\alpha\beta}\| = \left\| \begin{array}{ccc} \sum_i m_i (y_i'^2 + z_i'^2) & - \sum_i m_i x_i' y_i' & - \sum_i m_i x_i' z_i' \\ - \sum_i m_i y_i' x_i' & \sum_i m_i (x_i'^2 + z_i'^2) & - \sum_i m_i y_i' z_i' \\ - \sum_i m_i z_i' x_i' & - \sum_i m_i z_i' y_i' & \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \end{array} \right\|. \quad (8.23)$$

Вывод соотношения (8.22) полезно повторить, используя тензорные обозначения. Тогда (8.21) будет иметь вид

$$\mathcal{M}_\alpha = \sum m \left\{ \left(\sum_{\beta} x_{\beta}' x_{\beta}' \right) \omega_{\alpha} - x_{\alpha}' \left(\sum_{\beta} x_{\beta}' \omega_{\beta} \right) \right\}, \quad (8.24)$$

где индекс i материальной точки опущен для сокращения записи, а α и β пробегают значения 1, 2 и 3, являющиеся индексами осей $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ соответственно (например, символом x_2' обозначена проекция y_i' радиуса-вектора \mathbf{r}_i'). Учтем далее, что проекцию угловой скорости ω_{α} можно представить в виде

$$\omega_{\alpha} = \sum_{\beta} \omega_{\beta} \delta_{\alpha\beta}$$

с помощью символа Кронекера, по определению равного

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (8.25)$$

Таким образом, действительно, выражению (8.24) можно придать форму (8.22), в которой коэффициенты равны

$$J_{\alpha\beta} = \sum m \left\{ \left(\sum_{\gamma} x_{\gamma}' x_{\gamma}' \right) \delta_{\alpha\beta} - x_{\alpha}' x_{\beta}' \right\}. \quad (8.26)$$

Часть кинетической энергии \mathcal{F} , связанную только с вращением тела (см. (8.17)), также можно выразить через величины $J_{\alpha\beta}$. Действительно, учитывая, что

$$[\omega \mathbf{r}_i']^2 = (\mathbf{r}_i')^2 \omega^2 - (\mathbf{r}_i' \omega)^2,$$

найдем

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} J_{\alpha\beta} \omega_{\alpha} \omega_{\beta}. \quad (8.27)$$

Совокупность величин $J_{\alpha\beta}$ называется тензором инерции, а его отдельные компоненты — моментами инерции. Кинетический момент вращения \mathcal{M} и энергия вращения \mathcal{T} выражаются через моменты инерции $J_{\alpha\beta}$ и проекции угловой скорости ω . Заметим, что моменты инерции $J_{\alpha\beta}$, характеризующие данное твердое тело, являются постоянными величинами, которые зависят только от выбора системы S' , жестко связанной с телом, от распределения массы твердого тела и его формы. Тензор инерции является симметричным тензором, т. е. является совокупностью шести моментов инерции: трех «диагональных» моментов $J_{x'x'}$, $J_{y'y'}$, $J_{z'z'}$, которые называются осевыми моментами инерции, и трех «недиагональных» моментов $J_{x'y'}$, $J_{x'z'}$, $J_{y'z'}$, которые называются центробежными моментами инерции.

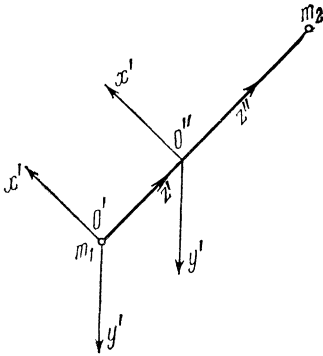


Рис. 8.5

Вычислим, например, моменты инерции двухатомной молекулы относительно систем отсчета S_1' и S_2' с началами в точке I и центре масс молекулы соответственно и с одной из координатных осей, направленной по оси молекулы (рис. 8.5). В системе S_1' координаты точек соответственно равны

$$x_1' = y_1' = z_1' = 0, \quad x_2' = y_2' = 0, \quad z_2' = l,$$

где l — расстояние между точками. Подставляя эти координаты в (8.23), найдем моменты инерции молекулы в системе S_1'

$$J_{x'y'} = J_{x'z'} = J_{y'z'} = J_{z'z'} = 0,$$

$$J_{x'x'} = J_{y'y'} = m_1 z_1'^2 + m_2 z_2'^2 = m_2 l^2.$$

Вычисления в системе S_2' также приводят к двум равным и отличным от нуля моментам инерции:

$$J_{x'x'} = J_{y'y'} = m_1 z_1''^2 + m_2 z_2''^2 = \mu l^2,$$

где

$$z_1'' = -\frac{m_2}{m} l, \quad z_2'' = \frac{m_1}{m} l, \quad m = m_1 + m_2,$$

а μ — приведенная масса. Таким образом, тензор инерции молекулы в системах S_1' и S_2' соответственно имеет вид

$$\|J_{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} m_2 l^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\|J_{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} \mu l^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Оси системы S' , жестко связанные с твердым телом, всегда можно выбрать так, чтобы все центробежные моменты инерции обратились в нуль. Действительно, часть \mathcal{T} кинетической энергии является положительно определенной квадратичной формой проекций вектора ω с вещественными симметричными коэффициентами $J_{\alpha\beta}$ (см. (8.27)). И поэтому некоторым преобразованием координат ее всегда можно привести к каноническому виду

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} (J_{x'} \omega_{x'}^2 + J_{y'} \omega_{y'}^2 + J_{z'} \omega_{z'}^2). \quad (8.28)$$

Этому процессу соответствует приведение симметричного тензора с вещественными компонентами к диагональному виду

$$\|J_{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} J_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z'} \end{vmatrix}. \quad (8.29)$$

Оси, жестко связанные с твердым телом, относительно которых тензор инерции диагонален, называются главными осями инерции. В этом случае «диагональные» моменты называются главными моментами инерции и обозначаются $J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{z'}$. Для каждого начала системы S' , жестко связанной с телом, существуют свои направления главных осей и свои значения главных моментов.

В большинстве случаев при решении конкретных задач оси системы S' целесообразно направлять по главным осям; при таком выборе осей выражение для энергии вращения \mathcal{T} упрощается (ср. (8.28) и (8.27)), упрощается также выражение (8.22) для момента вращения:

$$\mathcal{M}_{x'} = J_{x'} \omega_{x'}, \quad \mathcal{M}_{y'} = J_{y'} \omega_{y'}, \quad \mathcal{M}_{z'} = J_{z'} \omega_{z'}. \quad (8.30)$$

Общей процедурой отыскания главных осей инерции является известный алгебраический процесс приведения квадратичной формы \mathcal{T} к каноническому виду. Наиболее просто диагонализация \mathcal{T} осуществляется в тех случаях, когда тело обладает симметрией в распределении масс, или, как говорят, материальной симметрией.

Пусть, например, тело обладает *осью материальной симметрии* (это означает, что все точки тела можно разбить на пары одинаковых по массе точек, расположенных симметрично относительно данной оси). Тогда, производя соответствующую перенумерацию точек, для каждой пары симметрично расположенных точек получим

$$\begin{aligned} m_i &= m_{i+1}, \quad \mathbf{r}'_i = (x'_i, y'_i, z'_i) \\ \mathbf{r}'_{i+1} &= (-x'_i, -y'_i, z'_i) \end{aligned} \quad (8.31)$$

(здесь ось $O'z'$ совмещена с осью симметрии). Подставляя (8.31) в выражение

$$\mathbf{r}'_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i$$

и суммируя по указанным парам, приходим к выводу, что *центр масс тела находится на оси материальной симметрии*:

$$x'_m = 0, \quad y'_m = 0, \quad z'_m \neq 0; \quad (8.32)$$

а суммируя по тем же парам выражения для моментов инерции (см. (8.23)), убедимся, что $J_{x'z'} = J_{y'z'} = 0$, и, следовательно, тензор инерции имеет вид

$$\|J_{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} J_{x'x'} & J_{x'y'} & 0 \\ J_{y'x'} & J_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z'} \end{vmatrix}. \quad (8.33)$$

Таким образом, *ось материальной симметрии тела является главной осью инерции*.

В предельном случае, когда все точки тела находятся на одной прямой (такое тело называется *ротатором*), координаты x'_i и y'_i точек равны нулю и, следовательно, $J_{x'y'} = 0$. Поэтому все оси, перпендикулярные оси ротатора, являются главными осями инерции, а главные моменты инерции равны

$$J_{x'} = J_{y'} = \sum_i m_i (z'_i)^2 \quad (8.34)$$

(ротатор имеет две вращательные степени свободы, поскольку, говорить о вращении ротатора вокруг своей оси бессмысленно).

Пусть теперь тело обладает *плоскостью материальной симметрии*. Тогда, совмещая плоскость $O'x'y'$ с плоскостью симметрии, все точки (вне плоскости) можно разбить на пары, для которых

$$m_i = m_{i+1}, \quad \mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i),$$

$$\mathbf{r}_{i+1} = (x_i, y_i, -z_i). \quad (8.35)$$

Используя (8.35), определения центра масс и моментов инерции, убедимся, что в рассматриваемом случае *центр масс лежит в плоскости материальной симметрии, а любая ось, перпендикулярная этой плоскости, будет главной осью инерции*. Если все точки твер-

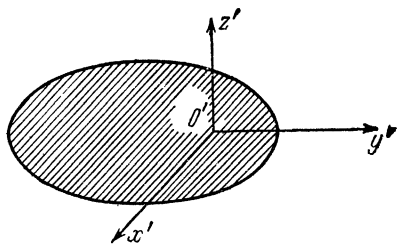


Рис. 8.6

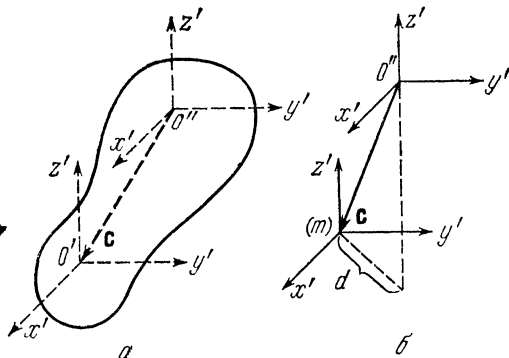


Рис. 8.7

дого тела расположены в некоторой плоскости, то наряду с отмеченными результатами найдем, что

$$J_{z'} = J_{x'} + J_{y'}, \quad (8.36)$$

где $J_{x'} = \sum_i m_i y_i'^2$, $J_{y'} = \sum_i m_i x_i'^2$.

Если тело обладает не одним признаком симметрии, то отыскание главных осей инерции еще более упрощается. Покажем это на примере плоского диска с осью материальной симметрии, совпадающей с одним из диаметров этого диска. Помещая начало O' в любую точку оси симметрии (рис. 8.6), нетрудно убедиться, что главными осями будут ось $O'z'$, перпендикулярная плоскости диска, ось $O'y'$ — ось материальной симметрии диска и ось $O'x'$, перпендикулярная первым двум осям.

В заключение рассмотрим преобразования тензора инерции в результате преобразований системы S' , жестко связанной с твердым телом. Например, в результате *параллельного переноса* получим две системы, жестко связанные с твердым телом: систему $O'x'y'z'$ и систему $O''x''y''z''$ (оси этих систем параллельны, а начала различны — см. рис. 8.7, а). Обозначая компоненты тензора

инерции относительно системы S'' (т. е. системы $O''x'y'z'$) символом $J''_{\alpha\beta}$ согласно (8.26) будем иметь

$$J''_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \{(\mathbf{r}_i'')^2 \delta_{\alpha\beta} - (\mathbf{r}_i'')_{\alpha} (\mathbf{r}_i'')_{\beta}\}, \quad (8.37)$$

где \mathbf{r}_i'' — радиус-вектор i -той точки относительно системы S'' , а $(\mathbf{r}_i'')_{\alpha}$ — его проекция на ось с индексом α . Поскольку радиусы-векторы любой точки тела относительно рассматриваемых систем связаны соотношением (см. (1.6))

$$\mathbf{r}_i'' = \mathbf{r}_i' + \mathbf{c}, \quad (8.38)$$

где $\mathbf{c} = \mathbf{r}_{O''O'}$, то, подставляя (8.38) в (8.37) и используя определение центра масс, найдем

$$J''_{\alpha\beta} = J'_{\alpha\beta} + m(c^2 \delta_{\alpha\beta} - c_{\alpha} c_{\beta}) + m \{2\mathbf{c} \mathbf{r}'_m \delta_{\alpha\beta} - (\mathbf{r}'_m)_{\alpha} c_{\beta} - (\mathbf{r}'_m)_{\beta} c_{\alpha}\}, \quad (8.39)$$

где m — масса всего тела, а \mathbf{r}'_m — радиус-вектор центра масс тела относительно S' . Если начало O' поместить в центр масс тела, то $\mathbf{r}'_m = 0$ и (8.39) сведется к более простому выражению

$$J''_{\alpha\beta} = J^m_{\alpha\beta} + m(c^2 \delta_{\alpha\beta} - c_{\alpha} c_{\beta}); \quad (8.40)$$

здесь $J^m_{\alpha\beta}$ — тензор инерции относительно системы S' с началом в центре масс тела. Такой тензор называется центральным, а главные оси инерции, проходящие через центр масс, называются главными центральными осями.

Используя (8.40), можно найти соотношение между осевыми моментами инерции относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс (теорема Штейнера). Например, соотношение между моментами $J''_{z'z'}$ и $J^m_{z'z'}$ имеет вид

$$J''_{z'z'} = J^m_{z'z'} + md^2, \quad (8.41)$$

где $d = (c_x^2 + c_y^2)^{1/2}$ — расстояние между параллельными осями $O''z'$ и $O'z'$, проходящими через начало O'' и центр масс тела соответственно (см. рис. 8.7, б).

Для того чтобы найти преобразование тензора при поворотах системы координат, выберем жестко связанные с твердым телом системы S' и S'' , имеющие общее начало (рис. 8.8). Выражая какую-либо скалярную функцию, зависящую от компонент тензора, сначала через величины, отнесенные к системе S' , а затем через аналогичные величины, отнесенные к системе S'' , можно получить закон преобразования тензора. В частности, выбирая в качестве скалярной функции кинетическую энергию \mathcal{T} , получим

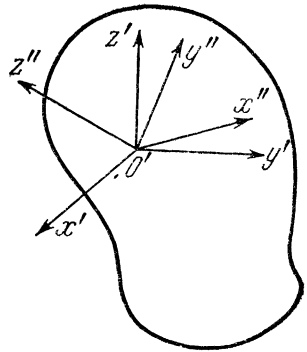
$$\sum_{\mu, \nu} J_{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu = \sum_{\alpha, \beta} J_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta, \quad (8.42)$$

где $J_{\mu\nu}$ — компоненты тензора инерции относительно системы S'' , а $J_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора инерции относительно S' . Пользуясь законом преобразования векторов при поворотах системы координат (см., например, (1.4') и (4.4)), найдем, что проекции угловой скорости на оси систем S' и S'' связаны между собой соотношениями

$$\omega_\alpha = \sum_{\mu} a_{\alpha\mu} \omega_\mu, \quad (8.43)$$

где $a_{\alpha\mu}$ — косинус угла между осями с индексами α и μ . Подставляя в правую часть равенства (8.42) выражения (8.43) и приравнявая коэффициенты при одинаковых произведениях $\omega_\mu \omega_\nu$, получим

$$J_{\mu\nu} = \sum_{\alpha, \beta} J_{\alpha\beta} a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu}. \quad (8.44)$$



Такой же вид имеют формулы преобразования любого тензора при поворотах системы координат.

Пример 8.4. Моменты инерции неоднородного тонкого стержня с плотностью массы, линейно зависящей от расстояния до одного из концов стержня.

Рис. 8.8

Найти моменты инерции указанного стержня массы m и длины l относительно главных центральных осей инерции.

Определим моменты инерции относительно главных осей с началом в более легком конце и осью $O'z'$, направленной по стержню. Имея в виду, что плотность стержня определяется функцией (см. пример 8.3)

$$\rho(z') = \frac{2m}{l^2} z',$$

получим значение для двух отличных от нуля моментов инерции:

$$J_{x'} = J_{y'} = \int_0^l \rho (z')^2 dz' = \frac{ml^2}{2}.$$

Главные центральные оси могут быть найдены параллельным переносом уже рассмотренных осей. Применяя теорему (8.41), получаем

$$J_{x'} = J_{x''}^m + m \left(\frac{2}{3} l \right)^2, \quad J_{y'} = J_{y''}^m + m \left(\frac{2}{3} l \right)^2,$$

так как расстояние от более легкого конца стержня до его центра масс равно $2l/3$ (см. пример 8.3). Отсюда

$$J_{x''}^m = J_{y''}^m = \frac{ml^2}{18}.$$

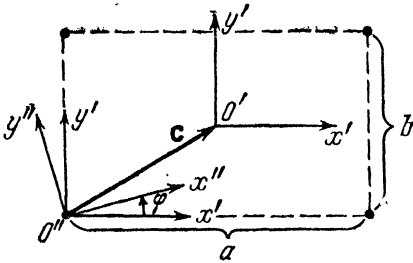


Рис. 8.9

Ось $O''z''$, перпендикулярная плоскости тела, будет главной осью инерции. Поэтому остается определить положение оси $O''x''$ в плоскости тела, т. е. определить угол φ , указанный на рис. 8.9.

Прежде чем найти моменты инерции относительно системы с началом в O'' , вычислим главные центральные моменты инерции*. Из соображений материальной симметрии следует, что центр масс находится на пересечении диагоналей прямоугольника, а оси $O'x'$ и $O'y'$ являются главными центральными осями; используя (8.36), найдем моменты инерции относительно этих осей:

$$J_{x''}^m = mb^2, \quad J_{y''}^m = ma^2, \quad J_z^m = m(a^2 + b^2).$$

Затем, применяя преобразование (8.40), получим моменты $J_{\alpha\beta}$ относительно системы $O''x''y''z''$. Используя преобразование для

* Такой путь решения не является кратчайшим, но позволяет проиллюстрировать преобразование (8.40).

Пример 8.5. Главные оси инерции твердого тела, представляющего собой систему четырех точек, расположенных в углах прямоугольника.

Определить направление главных осей инерции с началом в одной из материальных точек твердого тела (рис. 8.9), предполагая, что масса каждой точки равна m , а стороны прямоугольника равны a и b соответственно.

диагональных элементов

$$J_{\alpha\alpha} = J_{\alpha}^m + 4m(c^2 - c_{\alpha}^2)$$

и преобразование для недиагональных элементов

$$J_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta}^m - 4mc_{\alpha}c_{\beta} \quad (\alpha \neq \beta),$$

найдем

$$\begin{aligned} J_{x'x'} &= 2mb^2, & J_{y'y'} &= 2ma^2, & J_{z'z'} &= 2m(a^2 + b^2), \\ J_{x'y'} &= -tab, & J_{x'z'} &= J_{y'z'} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оси $O''x'$ и $O''y'$ не являются главными. Поэтому повернем систему $O''x'y'z'$ вокруг оси $O''z'$ так, чтобы центробежный момент $J_{x''y''}$ относительно новой системы $O''x''y''z''$ обратился в нуль. При этом повороте интересующая нас компонента преобразуется по закону (см. (8.44))

$$\begin{aligned} J_{x''y''} &= J_{x'x'}a_{x''x''}a_{x''y''} + J_{x'y'}a_{x''x''}a_{y''y''} + J_{x'z'}a_{x''x''}a_{z''y''} + \\ &+ J_{y'x'}a_{y''x''}a_{x''y''} + J_{y'y'}a_{y''x''}a_{y''y''} + J_{y'z'}a_{y''x''}a_{z''y''} + \\ &+ J_{z'x'}a_{z''x''}a_{x''y''} + J_{z'y'}a_{z''x''}a_{y''y''} + J_{z'z'}a_{z''x''}a_{z''y''}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $a_{z''x''} = a_{z''y''} = 0$, а остальные $a_{\alpha\mu}$ выражаются через угол φ согласно формулам

$$a_{x''x''} = a_{y''y''} = \cos \varphi, \quad a_{x''y''} = -\sin \varphi, \quad a_{y''x''} = \sin \varphi,$$

и требуя обращения в нуль момента инерции $J_{x''y''}$, получим следующее уравнение относительно угла φ :

$$-J_{x'x'} \cos \varphi \sin \varphi + J_{y'y'} \sin \varphi \cos \varphi + J_{x'y'} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0$$

и его решение в виде

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2J_{x'y'}}{J_{x'x'} - J_{y'y'}} = \frac{ab}{a^2 - b^2}.$$

§ 8.3. Плоскопараллельное движение твердого тела

Инерционные свойства твердого тела зависят от массы тела и ее распределения по объему тела. В связи с этим движение твердого тела представляет собой достаточно сложное механическое явление. Начнем его изучение с простейшего случая — плоскопараллельного движения, когда все точки тела движут-

ся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости (рис. 8.10).

Если движение твердого тела является плоскопараллельным, то систему S' , жестко связанную с телом, всегда можно выбрать так, чтобы плоскость $O'x'y'$ совпадала с неподвижной плоскостью

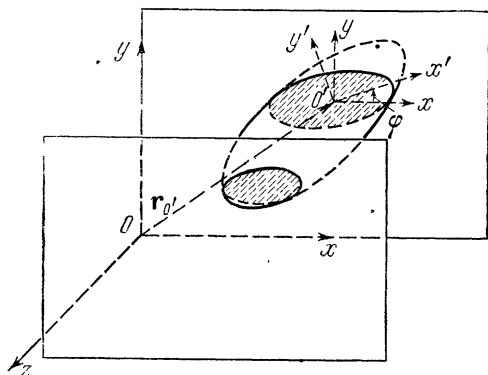


Рис. 8.10

Oxy некоторой инерциальной системы S . Тогда оси Oz и $O'z'$ будут оставаться параллельными, а положение тела будет определяться двумя координатами точки O' и одним углом Эйлера φ (если на тело не налагается каких-либо дополнительных связей). Угловая скорость тела и его момент вращения будут, вообще говоря, неколлинеарны и соответственно равны (см. (4.17) и (8.22))

$$\omega = \dot{\varphi} n_{z'}, \quad (8.45)$$

$$M_{x'} = J_{x'z'} \dot{\varphi}, \quad M_{y'} = J_{y'z'} \dot{\varphi}, \quad M_{z'} = J_{z'z'} \dot{\varphi}, \quad (8.46)$$

а кинетическая энергия \mathcal{T} , связанная с вращением тела, имеет вид (см. (8.27))

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} J_{z'z'} \dot{\varphi}^2. \quad (8.47)$$

Помещая начало системы S' в центр масс несвободного тела, получим уравнение движения его центра масс относительно системы S (см. (8.7) и (4.55))

$$m \ddot{\mathbf{r}}_m = \mathbf{F}^e + \mathbf{R}^e \quad (8.48)$$

и закон изменения момента вращения тела относительно системы S_m

$$\dot{M} = \mathcal{L}^e + \mathcal{L}^e_m. \quad (8.49)$$

Запишем уравнение (8.48) в декартовых координатах для случая плоскопараллельного движения:

$$m \ddot{x}_m = F_x^e + R_x^e, \quad m \ddot{y}_m = F_y^e + R_y^e, \quad (8.50)$$

$$0 = F_z^e + R_z^e.$$

При использовании же уравнения (8.49) нужно иметь в виду, что производная момента вращения по времени берется при постоянных ортах \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z , а сам момент \mathcal{M} задается в виде разложения (8.46) по ортам $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$, $\mathbf{n}_{z'}$, движущимся вместе с телом. Чтобы устранить эту трудность, воспользуемся соотношением

$$\frac{d\mathbf{a}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}'] + \frac{d'\mathbf{a}'}{dt},$$

справедливым для любого вектора \mathbf{a}' , заданного в виде разложения по движущимся ортам (см. (4.38)). Тогда вместо (8.49) будем иметь

$$\frac{d'\mathcal{M}}{dt} + [\boldsymbol{\omega}\mathcal{M}] = \mathcal{L}^e + \mathcal{L}_R^e, \quad (8.51)$$

где $\frac{d'}{dt}$ — производная по времени при фиксированных ортах \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z .

Отсюда, учитывая (8.45) и (8.46), найдем уравнения изменения момента в форме

$$\begin{aligned} J_{x'z'} \ddot{\varphi} - J_{y'z'} \dot{\varphi}^2 &= \mathcal{L}_{x'}^e + (\mathcal{L}_R^e)_{x'}, \\ J_{y'z'} \ddot{\varphi} + J_{x'z'} \dot{\varphi}^2 &= \mathcal{L}_{y'}^e + (\mathcal{L}_R^e)_{y'}, \\ J_{z'z'} \ddot{\varphi} &= \mathcal{L}_{z'}^e + (\mathcal{L}_R^e)_{z'}. \end{aligned} \quad (8.52)$$

Таким образом, уравнениями плоскопараллельного движения тела являются уравнения (8.50) и (8.52). Что касается уравнений в независимых координатах, то они будут определяться функцией Лагранжа вида

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) + \frac{J_{z'z'}}{2} \dot{\varphi}^2 - \mathcal{U} \quad (8.53)$$

(здесь также использованы декартовы координаты центра масс тела).

Распространенным случаем плоскопараллельного движения тела с внешними связями является движение физического маятника (так называется твердое тело, жестко связанное с неподвижной осью — осью маятника, вокруг которой оно может совершать колебания). В предположении идеальности этой связи задача легко решается в независимых координатах. Совместим одну из осей инерциальной системы с осью маятника, предполагая, что она горизонтальна. Другую ось системы координат направим вдоль напряженности поля тяготения \mathbf{g} . В качестве начала O

возьмем точку пересечения оси маятника и перпендикулярной к ней прямой, проходящей через центр масс маятника (рис. 8.11).

Далее с иллюстративной целью рассмотрим данную задачу при разных выборах системы S' , жестко связанной с твердым телом. Пусть система S' выбрана так, что O' совпадает с O , ось

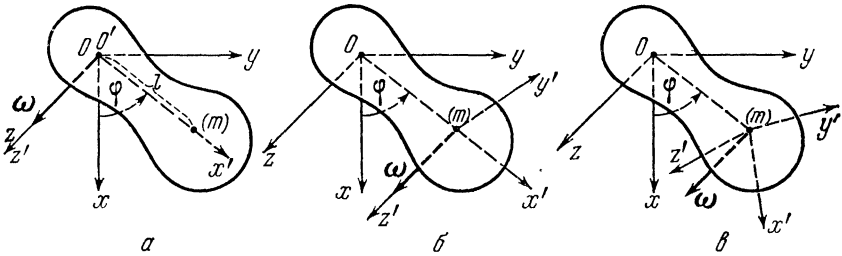


Рис. 8.11

$O'z'$ — с осью Oz , а ось $O'x'$ проходит через центр масс. Тогда, выбирая в качестве независимой координаты угол φ между осями Ox и Ox' (рис. 8.11, а), в соответствии с (8.12) и (8.17) найдем, что вся кинетическая энергия маятника будет равна кинетической энергии вращения \mathcal{T} , а в соответствии с первой из формул (8.14) и (8.19) для потенциальной энергии маятника получим

$$U = -mgr_m = -mgl \cos \varphi,$$

где m — масса маятника, а l — расстояние от центра масс маятника до его оси. Пользуясь выражениями \mathcal{T} (см. (8.47)) и U , с помощью уравнения Лагранжа найдем

$$\ddot{\varphi} + \omega_g^2 \sin \varphi = 0, \tag{8.54}$$

где $\omega_g = (mgl/J_{z'z'})^{1/2}$ — частота линейных колебаний маятника.

Если начало системы S' поместить в центр масс, а ось $O'z'$ направить параллельно оси Oz (рис. 8.11, б), то для кинетической энергии получим выражение (см. (8.9) и (8.18))

$$T = \frac{mv_m^2}{2} + \frac{J_{z'z'}^m}{2} \dot{\varphi}^2,$$

где $v_m = l\dot{\varphi}$. Учитывая, что потенциальная энергия остается той же, придем к уравнению движения маятника с квадратом частоты линейных колебаний, представленным в виде

$$\omega_g^2 = \frac{mgl}{ml^2 + J_{z'z'}^m}. \tag{8.55}$$

Наконец, совместим начало системы S' с центром масс, а ее оси направим по главным центральным осям инерции (рис. 8.11, θ). При таком выборе системы S' проекции угловой скорости ω на оси S' равны:

$$\omega_{x'} = \omega a_{\omega x'}, \quad \omega_{y'} = \omega a_{\omega y'}, \quad \omega_{z'} = \omega a_{\omega z'}, \quad (8.56)$$

где $a_{\omega\alpha}$ — косинусы угла между осью вращения и главной центральной осью с индексом α , а ω — модуль угловой скорости. Подставляя (8.56) в (8.28), получим кинетическую энергию вращения в виде

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} J_{\omega} \omega^2, \quad (8.57)$$

где $J_{\omega} = J_{x'}^m a_{\omega x'}^2 + J_{y'}^m a_{\omega y'}^2 + J_{z'}^m a_{\omega z'}^2$ — момент инерции тела относительно оси вращения, а $J_{x'}^m, J_{y'}^m, J_{z'}^m$ — главные центральные моменты. В данном случае J_{ω} совпадает с $J_{z'z'}^m$ и является постоянной величиной, так как углы между осями S и S' не изменяются*. Указанный выбор системы S' приводит нас к тому же уравнению движения с квадратом частоты линейных колебаний, представленным в виде

$$\omega_g^2 = \frac{mgl}{ml^2 + J_{x'}^m a_{\omega x'}^2 + J_{y'}^m a_{\omega y'}^2 + J_{z'}^m a_{\omega z'}^2}. \quad (8.58)$$

Подчеркнем, что закон изменения координаты φ не зависит от выбора системы S' и все полученные выражения для ω_g хотя и имеют разный вид, равны друг другу (моменты инерции $J_{z'z'}^m, J_{z''z''}^m$ и $J_{x'}^m, J_{y'}^m, J_{z'}^m$ связаны между собой соотношениями (8.40) и (8.44)).

Пример 8.6. Плоскопараллельное движение однородного шара.

Исследовать плоскопараллельное движение шара массы m радиуса R в постоянном однородном электрическом поле напряженности \mathcal{E} , если одна из точек на поверхности шара обладает электрическим зарядом e (изменением поля, обусловленным наличием тела, пренебречь).

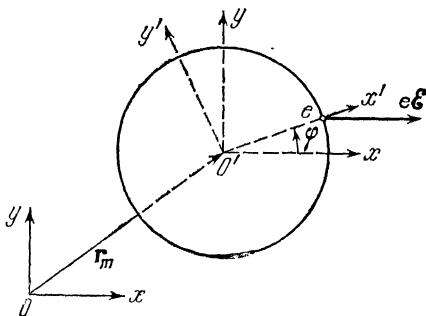


Рис. 8.12

* Кинетическая энергия, связанная с вращением тела, всегда может быть представлена в виде (8.57). Однако в общем случае J_{ω} зависит от времени, поскольку положение оси вращения относительно S' изменяется.

Выберем инерциальную систему S так, чтобы плоскость Oxy проходила через центр масс шара параллельно вектору \mathcal{E} , а ось Ox была направлена вдоль этого вектора (рис. 8.12). Начало O' системы, жестко связанной с шаром, поместим в его центр масс, а ось $O'x'$ совместим с прямой, проходящей через центр масс шара и заряд e .

Согласно (8.18) и (8.47) кинетическая энергия шара равна

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) + \frac{J_{z'}^m}{2} \dot{\varphi}^2,$$

где x_m, y_m — декартовы координаты центра масс шара, а φ — угол между осями Ox и $O'x'$. Потенциальная энергия шара в электрическом поле равна

$$U = -e\mathcal{E}r,$$

где r — радиус-вектор заряда. Выражая U через независимые координаты x_m, y_m и φ , получим

$$U = -e\mathcal{E}(x_m + R \cos \varphi).$$

Затем из уравнений Лагранжа найдем

$$x_m = \frac{e\mathcal{E}}{m} \frac{t^2}{2} + \dot{x}_{m0}t + x_{m0}, \quad y_m = \dot{y}_{m0}t + y_{m0}, \quad \ddot{\varphi} + \frac{e\mathcal{E}R}{J_{z'}^m} \sin \varphi = 0.$$

Отсюда видно, что центр масс шара движется равноускоренно вдоль напряженности поля и по инерции перпендикулярно к ней. Одновременно шар совершает движение, подобное движению математического маятника; при малых φ шар будет совершать линейные колебания с частотой

$$\omega_e = \left(\frac{e\mathcal{E}R}{J_{z'}^m} \right)^{1/2}.$$

Момент инерции $J_{z'}^m$ ввиду симметрии шара равен (см. (8.23))

$$J_{z'}^m = \frac{1}{3} (J_{x'}^m + J_{y'}^m + J_{z'}^m) = \frac{2}{3} \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho(r')^2 dV',$$

где ρ — плотность массы на единицу объема, $dV' = (r')^2 \sin \theta' \times dr' d\theta' d\varepsilon'$ — элемент объема в системе S' в сферических координатах r', θ' и ε' . Учитывая однородность шара, получим

$$J_{z'}^m = \frac{4\pi\rho}{3} \cdot \frac{2}{5} R^5.$$

Наконец, принимая во внимание, что

$$m = \int_{(V)'} \rho dV' = \frac{4\pi\rho}{3} R^3,$$

найдем значение главного центрального момента инерции

$$J_{z'}^m = \frac{2}{5} mR^2,$$

а также квадрат частоты линейных колебаний шара

$$\omega_2^2 = \frac{5}{2} \frac{e\mathcal{E}}{mR}.$$

Пример 8.7. Колебания диска.

Найти частоту линейных колебаний однородного диска массы m радиуса R (рис. 8.13) в двух случаях: а) в случае шарнирного

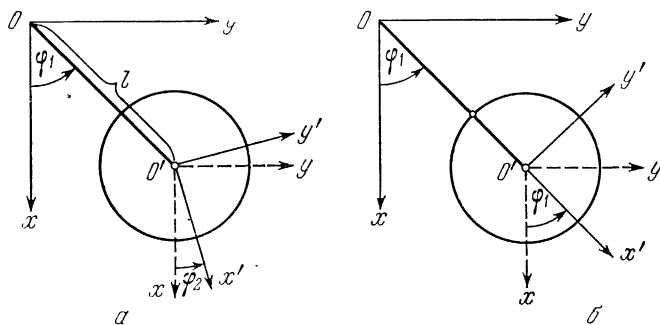


Рис. 8.13

соединения диска со стержнем в центре масс диска, б) в случае жесткого скрепления диска со стержнем (стержень невесомый длины l , трением в местах соединения пренебречь).

Выбирая в случае (а) системы S и S' так, как это показано на рис. 8.13, а, и учитывая (8.18) и (8.47), получим кинетическую энергию диска

$$T = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{J_{z'}^m}{2} \dot{\varphi}_2^2,$$

где φ_1 — угол между Ox и OO' , φ_2 — угол между $O'x$ и $O'x'$. Учитывая, что потенциальная энергия диска равна

$$U = -mgl \cos \varphi_1,$$

найдем уравнение Лагранжа, соответствующее координате φ_1 , и обобщенную скорость φ_2 :

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_a^2 \sin \varphi_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_{20},$$

где $\omega_a^2 = g/l$. Таким образом, в этом случае происходит колебание центра диска и его вращение с постоянной угловой скоростью.

В случае (б) имеем физический маятник, кинетическая энергия которого равна

$$T = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{J_z^m}{2} \dot{\varphi}_1^2,$$

где $J_z^m = mR^2/2$ — главный центральный момент инерции относительно оси, перпендикулярной диску. Поэтому квадрат частоты линейных колебаний маятника, жестко скрепленного с подвесом равен

$$\omega_{\sigma}^2 = \frac{2gl}{2l^2 + R^2}.$$

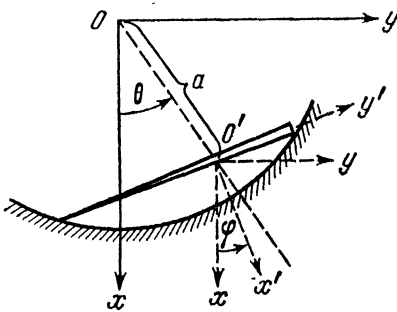


Рис. 8.14

Пример 8.8. Колебания неоднородного тонкого стержня, опирающегося на обруч.

Найти частоту линейных колебаний неоднородного тонкого стержня массы m длины l , концы которого скользят (рис. 8.14) по расположенному в вертикальной плоскости гладкому обручу радиуса R (плотность массы стержня линейно зависит от расстояния до одного из его концов).

Выбирая системы координат так, как это показано на

рис. 8.14, получим выражения для кинетической и потенциальной энергий стержня:

$$T = \frac{ma^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{J_z^m}{2} \dot{\varphi}^2, \quad U = -mga \cos \theta,$$

где $a = \left(R^2 - \frac{2l^2}{9}\right)^{1/2}$ — расстояние от центра обруча до центра масс стержня (здесь учтено, что центр масс находится на расстоянии $2l/3$ от более легкого конца стержня — см. пример 8.3). Имея в виду, что разность между углами θ и φ постоянна, а главный

центральный момент стержня равен $ml^2/18$ (см. пример 8.4), найдем значение квадрата частоты линейных колебаний стержня

$$\omega_g^2 = g \frac{\left(R^2 - \frac{2l^2}{2} \right)^{1/2}}{R^2 - \frac{l^2}{6}}$$

Пример 8.9. *Плоскопараллельное качение неоднородного цилиндра.*

По горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости катается неоднородный цилиндр массы m и радиуса a (расстояние от его геометрической оси до центра масс равно l , а ось, проходящая че-

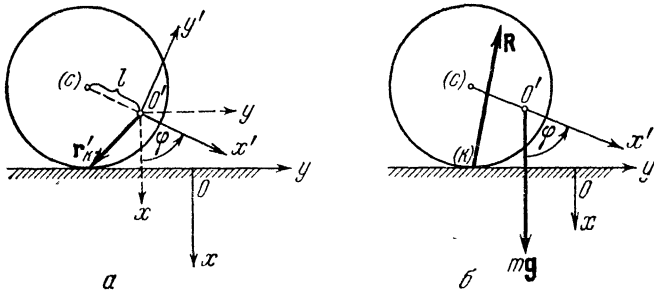


Рис 8 15

рез центр масс параллельно оси цилиндра, является главной осью инерции — момент инерции относительно этой оси равен J). Найти частоту линейных колебаний цилиндра и реакцию плоскости, если движение цилиндра плоскопараллельно.

Выберем системы S и S' (т. е. системы Oxy и $O'x'y'$) так, как показано на рис. 8.15, а. Качение цилиндра по абсолютно шероховатой плоскости представляет собой движение системы, на которую наложена идеальная связь. Действительно, скорость точки цилиндра, касающейся плоскости, будет в момент касания равна нулю и, следовательно, виртуальное перемещение такой точки равно нулю. Учитывая, что реакция плоскости приложена к точке касания цилиндра, приходим к выводу, что эта реакция не совершает виртуальной работы.

Уравнение рассматриваемой связи можно записать в виде (см. (8.2))

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_m + [\omega \mathbf{r}_K] = 0, \tag{1}$$

где \mathbf{v}_m , $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс и угловая скорость цилиндра, \mathbf{v}_k , \mathbf{r}_k — скорость точки касания относительно S и ее радиус-вектор относительно S' .

Условие (1) в случае плоскопараллельного качения приводит к двум уравнениям:

$$\dot{x}_m = \omega y'_k, \quad \dot{y}_m = -\omega x'_k, \quad (2)$$

где x_m , y_m — декартовы координаты центра масс цилиндра, x'_k , y'_k — проекции радиуса-вектора \mathbf{r}_k на оси Ox и Oy . Координаты x_k и y_k выражаются через угол φ между осями $O'x$ и $O'x'$ с помощью формул

$$x'_k = a - l \cos \varphi, \quad y'_k = -l \sin \varphi.$$

Таким образом, уравнения (2) можно представить в виде

$$\dot{x}_m = -l\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y}_m = -\dot{\varphi}(a - l \cos \varphi), \quad (3)$$

а затем проинтегрировать и тем самым получить x_m и y_m как функции φ :

$$x_m = l \cos \varphi, \quad y_m = -a\varphi + l \sin \varphi \quad (4)$$

(здесь постоянные интегрирования выбраны так, чтобы при $\varphi=0$ центр масс цилиндра находился в наинизшем положении). Следовательно, в случае плоскопараллельного качения связь (1) является голономной.

Кинетическая и потенциальная энергии цилиндра как функции независимой координаты φ и обобщенной скорости $\dot{\varphi}$ соответственно равны (см. формулы (3) и (4))

$$T = \frac{1}{2} [m(a^2 + l^2 - 2al \cos \varphi) + J] \dot{\varphi}^2, \quad U = -mgl \cos \varphi.$$

Отсюда получим уравнение линейных колебаний цилиндра

$$\ddot{\varphi} + \omega_g^2 \varphi = 0, \quad (5)$$

где

$$\omega_g^2 = \frac{mgl}{m(a-l)^2 + J}.$$

Чтобы найти реакцию плоскости, используем закон изменения импульса цилиндра (см. (8.7) и рис. 8.15, б):

$$m\ddot{x}_m = mg + R_x, \quad m\ddot{y}_m = R_y.$$

Подставим сюда проекции скорости центра масс из формулы (3) и пренебрежем членами второго порядка малости и выше по величинам φ и $\dot{\varphi}$. Тогда, используя уравнение (5), найдем

$$R_x = -mg, \quad R_y = \frac{m^2 g l (a-l)}{m(a-l)^2 + J} \varphi.$$

Отсюда видно, что при малом отклонении $\varphi > 0$ возникает составляющая реакции $R_y > 0$, стремящаяся вернуть центр масс цилиндра к положению устойчивого равновесия; момент всей реакции \mathbf{R} относительно центра масс стремится повернуть цилиндр по часовой стрелке, т. е. опять-таки к положению устойчивого равновесия.

§ 8.4. Движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Уравнения Эйлера

Изменение ориентации тела с одной закрепленной точкой связано с изменением *всех* углов Эйлера, поэтому задача о движении такого тела является более сложной по сравнению с задачей о плоскопараллельном движении.

Для исследования рассматриваемой задачи поместим в неподвижную точку тела как начало O инерциальной системы S , так и начало O' системы S' , жестко связанной с телом, а оси системы S' направим по главным осям инерции относительно неподвижной точки. Тогда векторные уравнения движения (8.7) с учетом (8.13) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^e + \mathbf{R}^e, \quad \dot{\mathcal{M}} = \mathcal{L}^e, \quad (8.59)$$

где $\mathbf{P} = m[\boldsymbol{\omega}'_m]$ — импульс тела, \mathbf{R}^e — реакция опоры в точке закрепления (момент реакции в силу выбора начала отсчета равен нулю).

Так как оси системы S' направлены по главным осям инерции, то в уравнении моментов необходимо использовать разложение вектора \mathcal{M} по этим осям (см. (8.30)). С этой целью представим уравнение для момента в форме (8.51) и, таким образом, получим

$$\frac{d'\mathcal{M}}{dt} + [\boldsymbol{\omega}'\mathcal{M}] = \mathcal{L}^e. \quad (8.60)$$

Проектируя правую и левую части уравнения (8.60) на оси системы S' , жестко связанной с телом, и учитывая, что проекции производной $\frac{d'\mathcal{M}}{dt}$ на оси S' , согласно (8.30), соответственно равны

$$J_x' \dot{\omega}'_x, \quad J_y' \dot{\omega}'_y, \quad J_z' \dot{\omega}'_z,$$

найдем динамические уравнения Эйлера

$$\begin{aligned} J_{x'} \dot{\omega}_{x'} + (J_{z'} - J_{y'}) \omega_{y'} \omega_{z'} &= \mathcal{L}_{x'}^e, \\ J_{y'} \dot{\omega}_{y'} + (J_{x'} - J_{z'}) \omega_{z'} \omega_{x'} &= \mathcal{L}_{y'}^e, \\ J_{z'} \dot{\omega}_{z'} + (J_{y'} - J_{x'}) \omega_{x'} \omega_{y'} &= \mathcal{L}_{z'}^e. \end{aligned} \quad (8.61)$$

Для решения задачи методом Лагранжа необходимо найти кинетическую энергию как функцию независимых координат φ , θ , ψ и обобщенных скоростей $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$. Учтем, что кинетическая энергия T равна энергии вращения \mathcal{T} (см. (8.17)), а оси системы S' направлены по главным осям инерции (см. (8.28)). Тогда, используя кинематические формулы Эйлера (4.18), получим*

$$\begin{aligned} T = \frac{J_{x'}}{2} (\dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + \frac{J_{y'}}{2} (\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + \\ + \frac{J_{z'}}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \end{aligned} \quad (8.62)$$

Выражение (8.62) заметно упрощается, если моменты инерции относительно двух главных осей равны друг другу (в этом случае тело называется симметричным волчком). Действительно, направляя по этим главным осям оси $O'x'$ и $O'y'$ и полагая $J_{x'} = J_{y'}$, из (8.62) найдем

$$T = \frac{J_{x'}}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{J_{z'}}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \quad (8.63)$$

Отметим известные общие решения задачи о движении тела с одной закрепленной точкой под действием однородного поля тяжести, которые справедливы при произвольных начальных условиях. Такими решениями являются решения: а) задачи Эйлера (случай уравновешенного волчка), когда неподвижная точка и центр масс тела совпадают, б) задачи Лагранжа (случай симметричного неуравновешенного волчка), когда $J_{x'} = J_{y'} \neq J_{z'}$, а центр масс находится на оси Oz' , в) задачи Ковалевской (случай симметричного неуравновешенного волчка), когда $J_{x'} = J_{y'} = 2J_{z'}$, а

* Подставляя (8.62) в (5.44), можно убедиться, что только третье уравнение системы (8.61) является уравнением Лагранжа относительно переменной ψ , а два других уравнения не являются уравнениями Лагранжа относительно φ и θ .

центр масс находится в плоскости $O'x'y'$ **. Кроме этих случаев существования общих интегралов известны также некоторые частные интегралы, т. е. интегралы, имеющие место при определенных начальных условиях.

Пример 8.10. *Изменение ориентации спутника (свободного симметричного волчка).*

Найти закон изменения ориентации спутника Земли относительно гелиоцентрической системы отсчета.

В качестве инерциальной системы S выберем систему с началом в центре Земли и осями, направленными на «неподвижные» звезды (см. пример 4.5). Начало системы S' , жестко связанной со спутником, поместим в его центр масс, а ось $O'z'$ направим по оси материальной симметрии спутника (рис. 8.16).

Уравнения движения спутника относительно S можно записать в виде (8.11)

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}}_m &= \sum_i m_i \mathbf{g}(\mathbf{r}_i), \\ \dot{\mathcal{M}} &= \sum_i [\mathbf{r}'_i m_i \mathbf{g}(\mathbf{r}_i)], \end{aligned} \quad (1)$$

где m — масса спутника, $\mathbf{g}(\mathbf{r}_i) = -\gamma \frac{m_\oplus}{r_i^2} \mathbf{r}_i$ — напряженность поля тя-

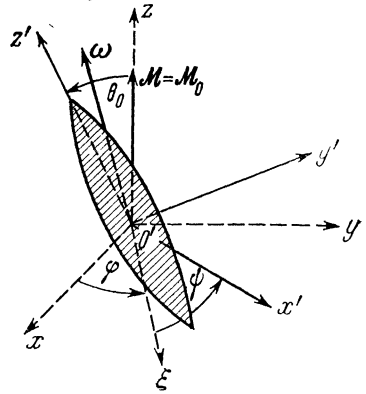


Рис. 8.16

готения Земли в точке пространства, где находится i -тая достаточно малая часть спутника с радиусом-вектором \mathbf{r}_i относительно S и радиусом-вектором \mathbf{r}'_i относительно системы S' . Учитывая, что размеры спутника исчезающе малы по сравнению с расстоянием от центра Земли до любой точки спутника, т. е. полагая, что $\mathbf{g}(\mathbf{r}_i) \approx \mathbf{g}(\mathbf{r}_m)$, получим

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = \mathbf{g}(\mathbf{r}_m), \quad \dot{\mathcal{M}} = m[\mathbf{r}'_m \mathbf{g}(\mathbf{r}_m)] = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{r}_m — радиус-вектор центра масс спутника относительно S , а $\mathbf{r}'_m = 0$ в силу выбора системы S' . Таким образом, задача о движении спутника распадается на две независимые задачи: задачу о движении центра масс, которая была рассмотрена в § 2.4, и задачу об изменении ориентации спутника относительно поступательно движущейся системы S_m центра масс.

** Подробное изложение этих случаев производится во многих книгах, например см. [9].

Из (2) видно, что кинетический момент вращения относительно S_m сохраняется. Кроме того, имеет место интеграл полной энергии спутника относительно системы S

$$\frac{mv_m^2}{2} + \mathcal{T} + U = E_0, \quad (3)$$

где $U = -mg(\mathbf{r}_m)\mathbf{r}_m$. Пользуясь уравнением движения центра масс (см. (2)), нетрудно показать, что

$$\frac{mv_m^2}{2} - mg(\mathbf{r}_m)\mathbf{r}_m = \text{const}. \quad (4)$$

Сопоставляя выражения (3) и (4), видим, что кинетическая энергия вращения \mathcal{T} также сохраняется и, следовательно, при решении задачи об изменении ориентации спутника (свободного волчка) можно исходить из двух законов сохранения:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0, \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}_0. \quad (5)$$

Направляя ось $O'z$ по вектору \mathcal{M}_0 , достигаем того, что \mathcal{M}_ξ — проекция момента на линию узлов — будет равна нулю (см. рис. 4.2). С другой стороны, эта проекция равна выражению

$$\mathcal{M}_\xi = \mathcal{M}_{x'} \cos \psi - \mathcal{M}_{y'} \sin \psi,$$

которое для симметричного волчка можно записать в виде (см. (8.30) и (4.18))

$$\mathcal{M}_\xi = J_{x'} \dot{\theta}.$$

Следовательно, в выбранной системе координат $\theta = \theta_0$, т. е. наклон оси симметрии тела по отношению к \mathcal{M}_0 , остается постоянным. Это, в свою очередь, приводит к сохранению проекции угловой скорости ω на ось симметрии волчка, поскольку (см. рис. 8.16)

$$\mathcal{M}_{z'} = \mathcal{M}_0 \cos \theta_0 = J_{z'} \omega_{z'}.$$

Используя (8.63), запишем интеграл энергии в виде

$$J_{x'}^m (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + J_{z'}^m (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 = 2\mathcal{T}_0, \quad (6)$$

где $J_{x'}^m$, $J_{z'}^m$ — главные центральные моменты инерции волчка. Отсюда, учитывая постоянство θ и $\omega_{z'}$, приходим к выводу о постоянстве $\dot{\varphi}$, что обуславливает постоянство $\dot{\psi}$ (см. третью из формул (4.18)).

Итак, симметрия волчка и законы сохранения его кинетического момента и кинетической энергии приводят к решению

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \dot{\varphi}_0, & \dot{\theta} &= 0, & \dot{\psi} &= \dot{\psi}_0, \\ \varphi &= \varphi_0 t + \varphi_0, & \theta &= \theta_0, & \psi &= \dot{\psi}_0 t + \psi_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Следовательно, свободный симметричный волчок совершает регулярную прецессию (см. пример 4.1). Для этого движения характерно, что ось симметрии волчка и его ось вращения сами вращаются относительно инерциальной системы вокруг постоянного вектора \mathcal{M}_0 с постоянной скоростью прецессии $\dot{\varphi}_0$; наклоны этих осей по отношению к вектору \mathcal{M}_0 различны, но постоянны, а угловая скорость ω изменения ориентации волчка, оставаясь по величине постоянной, все время лежит во вращающейся плоскости, образуемой осью симметрии и вектором \mathcal{M}_0 .

Если в начальный момент ось симметрии совпадала по направлению с вектором \mathcal{M}_0 , то из решения (7) следует, что

$$\theta = \theta_0 = 0, \quad \omega_{x'} = \omega_{y'} = \omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_{z'} = \omega_z = \omega,$$

т. е. в этом случае волчок все время будет вращаться вокруг главной оси инерции, сохраняющей ориентацию относительно инерциальной системы; эта ось по направлению все время будет совпадать с угловой скоростью ω и моментом \mathcal{M}_0 .

Рассмотрим тот же пример методом независимых переменных, в качестве которых возьмем углы Эйлера. Лагранжиан свободного симметричного волчка относительно S_m равен кинетической энергии вращения \mathcal{T} (см. (8.63)), т. е.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} J_{x'}^m (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + J_{z'}^m (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \quad (8)$$

Отсюда, ввиду цикличности времени и углов φ и ψ , получим интеграл энергии (6) и два интеграла для проекций момента вращения:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = J_{x'}^m \dot{\varphi} \sin^2 \theta + J_{z'}^m (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta = \mathcal{M}_{z0}, \\ \mathcal{M}_{z'} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = J_{z'}^m (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = \mathcal{M}_{z'0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Направляя ось $O'z$ по вектору \mathcal{M}_0 и используя интегралы (6) и (9), найдем решение задачи.

Если исходить из уравнений Эйлера (8.61), то, учитывая симметрию волчка ($J_{x'} = J_{y'}$) и равенство нулю момента внешних сил относительно S_m , получим

$$\dot{\omega}_{x'} + \Omega \omega_{y'} = 0, \quad \dot{\omega}_{y'} - \Omega \omega_{x'} = 0, \quad \dot{\omega}_{z'} = 0,$$

где $\Omega = \frac{J_{z'} - J_{x'}}{J_{x'}} \omega_{z'0}$. В результате решения этой системы найдем проекции угловой скорости как функции времени

$$\omega_{x'} = C \cos(\Omega t + \alpha), \quad \omega_{y'} = C \sin(\Omega t + \alpha), \quad \omega_{z'} = \omega_{z'0},$$

откуда, используя (4.18), получим решение для углов Эйлера.

Регулярная прецессия является сравнительно распространенным видом движения твердого тела. Например, такое движение совершают уравновешенный гироскоп и симметричная молекула (как твердое тело); ось вращения Земли прецессирует вокруг ее полюсов (это связано с тем, что Земля является не сферой, а слегка сплюснутым у полюсов эллипсоидом, симметричным относительно оси).

Пример 8.11. Симметричный тяжелый быстрый волчок.

Симметричный волчок с одной закрепленной точкой и центром масс, находящимся от нее на расстоянии l , движется в однородном поле тяжести. Найти закон движения волчка, если в начальный момент времени его кинетическая энергия вращения вокруг оси симметрии велика по сравнению с потенциальной энергией.

Выберем системы координат S и S' так, как это показано на рис. 8.17, и рассмотрим сначала качественное решение задачи на основе уравнения моментов (см. (8.60)). Поскольку в начальный момент времени волчок быстро вращается вокруг оси симметрии, допустим, что его угловая скорость в любой момент времени примерно равна $\omega \approx \omega_{z'} \mathbf{n}_{z'}$, т. е. $\omega_{x'} \approx \omega_{y'} \approx 0$. Тогда момент вращения волчка равен (см. (8.30))

$$\mathcal{M} \approx J_{z'} \omega_{z'} \mathbf{n}_{z'}, \quad (1)$$

где $J_{z'}$ — момент инерции относительно оси симметрии. Используя (1), а также представляя момент силы тяжести в виде

$$\mathcal{L}^e = [\mathbf{r}_m \mathbf{m} \mathbf{g}] = -mgl [\mathbf{n}_{z'} \mathbf{n}_z], \quad (2)$$

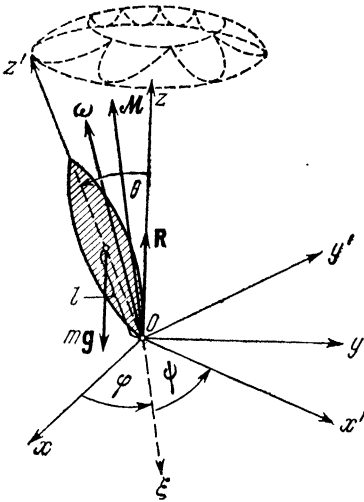


Рис. 8.17

из уравнения моментов получим

$$\dot{\mathbf{n}}_{z'} = \frac{mgl}{J_{z'} \omega_{z'}} [\mathbf{n}_z \mathbf{n}_{z'}]. \quad (3)$$

Сопоставляя уравнение (3) с соотношением (4.38), составленным для $\mathbf{n}_{z'}$, приходим к выводу, что вектор $\mathbf{n}_{z'}$ прецессирует вокруг вертикали с угловой скоростью

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{mgl}{J_{z'} \omega_{z'}} \mathbf{n}_z, \quad (4)$$

малой по сравнению с $\omega_{z'}$ (по условию задачи).

Используя $\omega = \omega_{z'} \mathbf{n}_{z'}$, получим, что $\mathbf{P} = m[\omega \mathbf{r}'_m] = 0$ и соответственно реакция опоры $\mathbf{R} = -m\mathbf{g}$ (см. (8.59)). Если же принять, что $\omega = \omega_{z'} \mathbf{n}_{z'} + \omega_{\text{пр}} \mathbf{n}_z$, то $\mathbf{P} = m\omega_{\text{пр}} l [\mathbf{n}_z \mathbf{n}_{z'}]$, однако значение реакции будет отличаться от найденного лишь на величину порядка $\omega_{\text{пр}}^2$.

Как видно из формулы (3), ось волчка все время движется в направлении, перпендикулярном силе тяжести, что в действительности возможно лишь при специальном выборе начальных условий. Рассмотрим строгое решение поставленной задачи. Учитывая, что кинетическая энергия волчка равна энергии вращения (см. (8.17)), найдем функцию Лагранжа как функцию углов Эйлера и их производных (см. (8.63)):

$$\mathcal{L} = \frac{J_{x'}}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{J_{z'}}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - mgl \cos \theta, \quad (5)$$

где $J_{x'}$, $J_{z'}$ — главные моменты инерции относительно осей $O'x'$ и $O'z'$ с началом в неподвижной точке O' . Поскольку лагранжиан (5) явно не зависит от времени и углов φ и ψ , имеют место три первых интеграла:

$$E = \frac{J_{x'}}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{J_{z'}}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + mgl \cos \theta = E_0,$$

$$\mathcal{M}_{z'} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = J_{z'} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = \mathcal{M}_{z_0}, \quad (6)$$

$$\mathcal{M}_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = J_{x'} \dot{\varphi} \sin^2 \theta + J_{z'} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta = \mathcal{M}_{z_0}.$$

Эти же интегралы можно получить и из других соображений. Действительно, момент силы тяжести перпендикулярен как к вертикали, так и к оси $O'z'$, проходящей через центр масс. Следовательно, проекция момента силы на ось $O'z$ равна нулю, а проекция \mathcal{M}_z момента вращения сохраняется. Проекция момента силы на ось $O'z'$ также равна нулю, однако ввиду подвижности этой оси

проекция $\mathcal{M}_{z'}$ сохраняется только в случае симметричного тела (см. третье уравнение Эйлера (8.61)).

Из последних двух интегралов (6) найдем $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ как функции θ :

$$\dot{\varphi} = \frac{\mathcal{M}_{z_0} - \mathcal{M}_{z'_0} \cos \theta}{J_{x'} \sin^2 \theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{\mathcal{M}_{z'_0}}{J_{z'}} - \dot{\varphi} \cos \theta. \quad (7)$$

Подставляя эти функции в интеграл энергии, получим дифференциальное уравнение относительно угла θ

$$\frac{J_{x'}}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(\mathcal{M}_{z_0} - \mathcal{M}_{z'_0} \cos \theta)^2}{2J_{x'} \sin^2 \theta} + \frac{\mathcal{M}_{z'_0}^2}{2J_{z'}} mgl \cos \theta = E_0. \quad (8)$$

В частных случаях это уравнение имеет решение в виде элементарных функций. Например, пусть в начальный момент времени наклоненный волчок закручен вокруг своей неподвижной оси симметрии, т. е. пусть

$$\theta_0 \neq 0, \quad \dot{\psi}_0 \neq 0, \quad \dot{\varphi}_0 = \dot{\theta}_0 = 0. \quad (9)$$

Учитывая, что при этом

$$E_0 = \frac{J_{z'}}{2} \dot{\psi}_0^2 + mgl \cos \theta_0, \quad \mathcal{M}_{z'_0} = J_{z'} \dot{\psi}_0, \quad \mathcal{M}_{z_0} = J_{z'} \dot{\psi}_0 \cos \theta_0,$$

сведем уравнение (8) к виду

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2mgl}{J_{x'}} (\cos \theta_0 - \cos \theta) - \left(\frac{J_{z'} \dot{\psi}_0}{J_{x'}} \right)^2 \frac{(\cos \theta_0 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}, \quad (10)$$

откуда вытекает, что угол θ не может быть меньше θ_0 .

Так как $\dot{\theta}^2 \geq 0$, а по условию задачи кинетическая энергия вращения \mathcal{T}_0 в начальный момент времени велика по сравнению с потенциальной энергией U_0 , т. е.

$$\frac{2mgl \cos \theta_0}{J_{z'} \dot{\psi}_0^2} \ll 1, \quad (11)$$

то из уравнения (10) будет следовать, что θ в любой момент времени близко к θ_0 ($\Delta\theta \ll \theta_0 \neq 0$).

Разлагая правую часть уравнения (10) в «точке» θ_0 и пренебрегая членами третьего и более высокого порядка малости, найдем

$$\left(\frac{d\Delta\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2mgl \sin \theta_0}{J_{x'}} \Delta\theta - \left(\frac{J_{z'} \dot{\psi}_0}{J_{x'}} \right)^2 (\Delta\theta)^2 \quad (12)$$

(здесь нельзя пренебречь членом, пропорциональным $(\Delta\theta)^2$, так как он умножается на большую величину). Вводя обозначения

$$\omega_{\text{nut}} = \frac{J_{z'} \dot{\psi}_0}{J_{x'}}, \quad (\Delta\theta)_{\text{max}} = \frac{2mgl J_{x'} \sin \theta_0}{J_{z'}^2 \dot{\psi}_0^2}, \quad (13)$$

запишем уравнение (12) в виде

$$\left(\frac{d\Delta\theta}{dt} \right)^2 = \omega_{\text{nut}}^2 \Delta\theta [(\Delta\theta)_{\text{max}} - \Delta\theta].$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим начальному условию $\theta_0 \neq 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$, является функция

$$\Delta\theta = (\Delta\theta)_{\text{max}} \sin^2 \left(\frac{\omega_{\text{nut}}}{2} t \right). \quad (14)$$

Используя (7) и (14), с той же степенью точности получим

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}' &= \frac{2mgl}{J_{z'} \dot{\psi}_0} \sin^2 \left(\frac{\omega_{\text{nut}}}{2} t \right), \\ \dot{\theta} &= \frac{mgl \sin \theta_0}{J_{z'} \dot{\psi}_0} \sin(\omega_{\text{nut}} t), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 \left\{ 1 - \frac{2mgl \cos \theta_0}{J_{z'} \dot{\psi}_0^2} \sin^2 \left(\frac{\omega_{\text{nut}}}{2} t \right) \right\},$$

откуда находим углы Эйлера как функции времени:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{mgl}{J_{z'} \dot{\psi}_0} t - \frac{J_{x'} mgl}{J_{z'}^2 \dot{\psi}_0^2} \sin \omega_{\text{nut}} t,$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{2J_{x'} mgl \sin \theta_0}{J_{z'}^2 \dot{\psi}_0^2} \sin^2 \frac{\omega_{\text{nut}}}{2} t,$$

$$\psi = \psi_0 + \dot{\psi}_0 \left(1 - \frac{mgl \cos \theta_0}{J_{z'} \dot{\psi}_0^2} \right) t + \frac{J_{x'} mgl \cos \theta_0}{J_{z'}^2 \dot{\psi}_0^2} \sin \omega_{\text{nut}} t.$$

Приведем также выражения для угловых скоростей, усредненных по периоду $2\pi/\omega_{\text{nut}}$:

$$\bar{\varphi} = \frac{mgl}{J_{z'} \dot{\psi}_0}, \quad \bar{\theta} = 0, \quad \bar{\psi} = \dot{\psi}_0 \left(1 - \frac{mgl \cos \theta_0}{J_{z'} \dot{\psi}_0^2} \right). \quad (16)$$

Как видно из решения, ось симметрии волчка медленно прецессирует вокруг вертикали со средней угловой скоростью, рав-

ной $\vec{\varphi}$ (сравнить с формулой (4)); эта скорость тем меньше, чем больше начальная скорость вращения вокруг оси симметрии. Значение скорости прецессии φ колеблется около своего среднего значения с малой амплитудой и большой частотой ω_{nut} , прямо пропорциональной ψ_0 . Одновременно с этим ось симметрии совершает колебания вокруг линии узлов с большой частотой ω_{nut} и малой амплитудой $\Delta\theta_{\text{max}}$ (см. рис. 8.17, на котором штриховой линией изображена траектория конца орта \mathbf{n}_z). Таким образом, в среднем получаем картину регулярной прецессии вокруг вертикали, а на это усредненное движение налагается дрожание оси с малой амплитудой, т. е. нутация. Такое движение твердого тела называется псевдорегулярной прецессией.

Эта прецессия происходит следующим образом: в начальный момент времени ось волчка опускается под действием тяжести, соответственно потенциальная энергия волчка уменьшается, а кинетическая возрастает; увеличение наклона оси, благодаря собственному вращению тела, приводит к появлению прецессионной скорости φ , пропорциональной $\Delta\theta$. Угловая скорость ω и момент \mathcal{M} тела в этом случае также прецессируют по сравнительно сложному закону вокруг вертикали, отклоняясь друг от друга и от оси волчка на малые величины, пропорциональные отношению U_0/\mathcal{T}_0 .

Заметим, что задачи, аналогичные рассмотренной, используются в теории гироскопических навигационных приборов, имеющей большое практическое значение.

Пример 8.12. *Симметричный заряженный быстрый волчок в однородном магнитном поле.*

Симметричное заряженное тело с покоящимся центром масс и одинаковыми удельными зарядами его точек ($e_i/m_i = \text{const}$) вращается в однородном постоянном магнитном поле напряженности \mathcal{H} . Определить закон движения волчка, если в начальный момент времени угловая скорость вращения вокруг оси симметрии тела велика по сравнению с частотой Лармора.

Поместим начала систем S и S' в центр масс тела, ось Oz направим по вектору \mathcal{H} , а ось Oz' — по оси симметрии тела. Представляя вектор-потенциал однородного магнитного поля в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathcal{H}\mathbf{r}], \quad (1)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки пространства, и учитывая, что электростатическая энергия твердого тела постоянна, с помощью (5.74) получим

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2c} \sum_i e_i [\mathcal{H} \mathbf{r}_i] \mathbf{v}_i.$$

Здесь \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i — радиус-вектор и скорость i -той точки тела, обладающей зарядом e_i . Так как по условию удельный заряд e_i/m_i для всех точек одинаков, положим его равным e/m , тогда для обобщенного потенциала найдем выражение:

$$\mathcal{U} = -\frac{e}{2mc} \mathcal{M} \mathcal{H}, \quad (2)$$

где \mathcal{M} — кинетический момент вращения тела. Используя разложение момента вращения по осям S' (см. (8.30)), запишем скалярное произведение $\mathcal{M} \mathcal{H}$ в виде

$$\mathcal{M} \mathcal{H} = J_{x'} (\omega_{x'} \mathcal{H}_{x'} + \omega_{y'} \mathcal{H}_{y'}) + J_{z'} \omega_{z'} \mathcal{H}_{z'},$$

затем выразим проекции напряженности \mathcal{H} на оси S' через углы Эйлера:

$$\mathcal{H}_{x'} = \mathcal{H} \sin \theta \sin \psi, \quad \mathcal{H}_{y'} = \mathcal{H} \sin \theta \cos \psi, \quad \mathcal{H}_{z'} = \mathcal{H} \cos \theta.$$

В результате найдем лагранжиан волчка

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{J_{x'}}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \\ & + \frac{J_{z'}}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + \omega_L (J_{x'} \sin^2 \theta + J_{z'} \cos^2 \theta) \dot{\varphi} + \omega_L J_{z'} \dot{\psi} \cos \theta, \quad (3) \end{aligned}$$

где $\omega_L = \frac{e \mathcal{H}}{2mc}$ — частота Лармора.

Отсюда видно, что обобщенная энергия, равная в данном случае кинетической энергии вращения, и обобщенные импульсы p_φ и p_ψ сохраняются:

$$\begin{aligned} J_{x'} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + J_{z'} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 &= 2\mathcal{T}_0, \\ (J_{x'} \sin^2 \theta + J_{z'} \cos^2 \theta) \dot{\varphi} + J_{z'} \dot{\psi} \cos \theta + \omega_L (J_{x'} \sin^2 \theta + J_{z'} \cos^2 \theta) &= p_{\varphi 0}, \quad (4) \end{aligned}$$

$$J_{z'} \dot{\psi} \cos \theta + J_{z'} \dot{\psi} + \omega_L J_{z'} \cos \theta = p_{\psi 0}.$$

Из последних двух интегралов получим $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ как функции θ :

$$\dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi 0} - p_{\psi 0} \cos \theta}{J_{x'} \sin^2 \theta} - \omega_L, \quad \dot{\psi} = \frac{p_{\psi 0}}{J_{z'}} - \frac{p_{\varphi 0} - p_{\psi 0} \cos \theta}{J_{x'} \sin^2 \theta} \cos \theta. \quad (5)$$

Подставляя эти функции в интеграл энергии, найдем уравнение для θ :

$$\dot{\theta}^2 + \frac{1}{J_{x'} \sin^2 \theta} (p_{\psi_0} - p_{\psi_0} \cos \theta - \omega_L J_{x'} \sin^2 \theta)^2 + \frac{1}{J_{x'} J_{z'}} (p_{\psi_0} - \omega_L J_{z'} \cos \theta)^2 = \frac{2\mathcal{T}_0}{J_{x'}}. \quad (6)$$

Это уравнение упрощается, если начальные условия заданы так же, как в предыдущем примере. Действительно, выражая с помощью (4) постоянные p_{ψ_0} , p_{ψ_0} , \mathcal{T}_0 через $\dot{\psi}_0$ и θ_0 :

$$J_{z'} \dot{\psi}_0 \cos \theta_0 + \omega_L (J_{x'} \sin^2 \theta_0 + J_{z'} \cos^2 \theta_0) = p_{\psi_0},$$

$$J_{z'} (\dot{\psi}_0 + \omega_L \cos \theta_0) = p_{\psi_0}, \quad \frac{J_{z'}}{2} \dot{\psi}_0^2 = \mathcal{T}_0$$

и располагая члены в уравнении (6) по степеням $\dot{\psi}_0$ и ω_L , получим

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 = & \frac{2J_{z'}}{J_{x'}} \dot{\psi}_0 \omega_L (\cos \theta - \cos \theta_0) \left[\frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta} + \frac{J_{z'} \cos \theta_0}{J_{x'} \sin^2 \theta} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \right] - \\ & - \omega_L^2 \left\{ \frac{1}{J_{x'}^2 \sin^2 \theta} [J_{z'} \cos \theta_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta) + J_{x'} (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta)]^2 + \right. \\ & \left. + \frac{J_{z'}}{J_{x'}} (\cos \theta_0 - \cos \theta)^2 \right\} - \frac{J_{z'}^2}{J_{x'}^2} \dot{\psi}_0^2 \frac{(\cos \theta_0 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}. \quad (7) \end{aligned}$$

Из этого уравнения следует (см. с. 374), что $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ должно быть малой величиной, поскольку скорость $\dot{\psi}_0$ собственного вращения велика по сравнению с частотой Лармора ω_L . Полагая для определенности $e < 0$, а $\dot{\psi}_0 > 0$, и оставляя в уравнении (7) только члены порядка $\frac{\omega_L}{\dot{\psi}_0} \Delta\theta$ и порядка $(\Delta\theta)^2$, получим

$$\left(\frac{d\Delta\theta}{dt} \right)^2 = \omega_{\text{nut}}^2 \Delta\theta [(\Delta\theta)_{\text{max}} - \Delta\theta],$$

где

$$\omega_{\text{nut}} = \frac{J_{z'}}{J_{x'}} \dot{\psi}_0, \quad (\Delta\theta)_{\text{max}} = \frac{2J_{x'}}{J_{z'}} \sin \theta_0 \cdot \frac{|\omega_L|}{\dot{\psi}_0}.$$

Отсюда (см. с. 375) найдем решение

$$\dot{\psi} = 2 |\omega_L| \sin^2 \left(\frac{\omega_{\text{nut}}}{2} t \right), \quad (8)$$

$$\dot{\theta} = |\omega_L| \sin \theta_0 \sin(\omega_{\text{nut}} t),$$

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 \left\{ 1 - \frac{2|\omega_L|}{\dot{\psi}_0} \cos \theta_0 \sin^2 \left(\frac{\omega_{\text{nut}}}{2} t \right) \right\}.$$

Следовательно, ось симметрии заряженного быстрого волчка медленно прецессирует вокруг направления напряженности однородного магнитного поля со средней угловой скоростью, равной частоте Лармора. Кроме того, ось волчка быстро нутирует с малой амплитудой и частотой порядка угловой скорости $\dot{\psi}_0$ собственного вращения волчка. Таким образом, рассматриваемое движение заряженного тела в однородном магнитном поле аналогично псевдо-регулярной прецессии волчка в поле тяжести.

§ 8.5. Линейные неголономные связи

В заключение главы кратко рассмотрим уравнения движения механической системы, с неголономными связями. Пусть на системе N точек наложено k_1 голономных связей и k_2 неголономных связей, линейных относительно скоростей точек. Тогда движение системы будет подчинено уравнениям Лагранжа (сравнить с уравнениями (5.6))

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1), \quad (8.64)$$

$$\sum_{i=1}^N a_{\beta i} \mathbf{v}_i + a_\beta = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2),$$

где все коэффициенты $a_{\beta i}$ и a_β могут быть функциями координат и времени. Допустим, что число связей $k = k_1 + k_2 < 3N$, а все связи идеальны, тогда число уравнений и неизвестных в системе (8.64) совпадает. Действительно, в силу идеальности всех связей и голономности k_1 связей имеем

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \nabla_i f_\alpha \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1); \quad (8.65)$$

кроме того, линейные неголономные связи налагают на виртуальные перемещения точек ограничения вида

$$\sum_{i=1}^N a_{\beta i} \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2). \quad (8.66)$$

Применяя метод неопределенных множителей Лагранжа к системе (8.65)—(8.66), найдем соотношения между реакциями связей и уравнениями связей (сравнить с выводом соотношений (5.17))

$$\mathbf{R}_i = \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \nabla_i f_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_{\beta} \mathbf{a}_{\beta i} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (8.67)$$

где все λ_{α} и μ_{β} — неизвестные скалярные функции. Подставляя (8.67) в (8.64), получим систему $3N + k_1 + k_2$ уравнений с $3N + k_1 + k_2$ неизвестными: \mathbf{r}_i ($i = 1, 2, \dots, N$), λ_{α} ($\alpha = 1, 2, \dots, k_1$), μ_{β} ($\beta = 1, 2, \dots, k_2$). Как легко убедиться, эта система эквивалентна общему уравнению механики с уравнениями связей (см. (5.25)—(5.27) и примечание на с. 217):

$$\sum_{i=1}^N \{m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i\} \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1), \quad (8.68)$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{\beta i} \mathbf{v}_i + a_{\beta} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2).$$

Найдем эквивалентную системе (8.68) систему уравнений Лагранжа в обобщенных координатах. С этой целью, используя голономные связи, введем $s_1 = 3N - k_1$ обобщенных координат q (см. (5.28) и (5.30)). Затем, выражая (8.68) через координаты q и повторяя вычисления, проведенные на с. 219—221, получим

$$\sum_{j=1}^{s_1} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0, \quad (8.69)$$

$$\sum_{j=1}^{s_1} A_{\beta j} \dot{q}_j + A_{\beta} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2),$$

где

$$A_{\beta j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{\beta i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad A_{\beta} = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{\beta i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + a_{\beta}.$$

Заметим, что выражения, стоящие в фигурных скобках, нельзя приравнять нулю, поскольку неголономные связи налагают на вариации обобщенных координат условия

$$\sum_{j=1}^{s_1} A_{\beta j} \delta q_j = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2), \quad (8.70)$$

и, следовательно, координаты q в данном случае не являются независимыми.

Чтобы получить дифференциальные уравнения движения, применим к первому из уравнений (8.69) и уравнениям (8.70) метод неопределенных множителей Лагранжа. В результате придем к уравнениям Лагранжа в обобщенных координатах для систем с голономными и линейными неголономными связями

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{\beta=1}^{k_2} \kappa_{\beta} A_{\beta j} \quad (j = 1, 2, \dots, s_1), \quad (8.71)$$

$$\sum_{j=1}^{s_1} A_{\beta j} \dot{q}_j + A_{\beta} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2);$$

эти $3N - k_1 + k_2$ уравнений содержат $3N - k_1 + k_2$ неизвестных: q_j, κ_{β} ($j = 1, 2, \dots, s_1; \beta = 1, 2, \dots, k_2$).

Одной из известных систем с неголономной связью является шар, катящийся по абсолютно шероховатой твердой плоскости. Ввиду отсутствия скольжения скорость точки шара, касающейся плоскости, равна нулю. В связи с этим условие качения можно записать в виде (см. (8.2) и формулу (1) примера 8.9).

$$\mathbf{v}_m + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_k] = 0, \quad (8.72)$$

где \mathbf{v}_m — скорость центра масс шара, $\boldsymbol{\omega}$ — его угловая скорость, \mathbf{r}'_k — радиус-вектор точки касания относительно системы S' , жестко связанной с шаром. Если шар однородный, то начало системы S' лучше поместить в центр шара. Тогда, направляя ось Oz системы S , связанной с плоскостью, вверх перпендикулярно к ней, и проектируя (8.72) на оси S , получим уравнения связи в виде (см. (4.19))

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= R(\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi), \\ \dot{y}_m &= -R(\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi), \end{aligned}$$

где R — радиус шара. В общем случае это, очевидно, неинтегрируемая (или неголономная) связь. Однако в частном случае плоскопараллельного качения шара ($\varphi = \psi = 0$) эта связь становится интегрируемой (т. е. голономной), так как при этом

$$\dot{x}_m = 0, \quad \dot{y}_m = -R\dot{\theta},$$

или

$$x_m = x_{m0}, \quad y_m = y_{m0} - R(\theta - \theta_0).$$

Пример 8.13. Движение конька по горизонтальной плоскости.

Пусть однородный тонкий стержень (конек) массы m движется так, что скорость его центра масс все время направлена вдоль стержня. Найти закон движения стержня (конька) по горизонтальной плоскости и ее реакцию.

Совместим координатную плоскость Oxy с горизонтальной плоскостью, по которой движется стержень. Тогда положение стержня определится двумя координатами x_m, y_m его центра масс и углом φ между стержнем и осью Ox . Кинетическая энергия стержня в этих координатах равна

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) + \frac{J_z^m}{2} \dot{\varphi}^2,$$

где J_z^m — центральный момент инерции относительно оси $O'z$. Условие того, что скорость центра масс стержня в любой момент времени направлена вдоль стержня, запишем в виде

$$\frac{\dot{y}_m}{\dot{x}_m} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1)$$

Учитывая, что $s_1=3$, $\beta=1$, а все обобщенные силы Q равны нулю, получим систему четырех уравнений (см. (8.71))

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_m &= \kappa \sin \varphi, \\ m\ddot{y}_m &= -\kappa \cos \varphi, \\ J_z^m \ddot{\varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\dot{x}_m \sin \varphi - \dot{y}_m \cos \varphi = 0$$

с четырьмя неизвестными функциями времени: x_m, y_m, φ и κ .

Из третьего уравнения системы (2) найдем

$$\varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0. \quad (3)$$

Из уравнения неголономной связи следует, что проекции скорости центра масс стержня (конька) имеют вид

$$\dot{x}_m = a \cos \varphi, \quad \dot{y}_m = a \sin \varphi, \quad (4)$$

а из первых двух уравнений системы (2) и уравнения связи (1) вытекает, что ускорение центра масс \mathbf{w}_m перпендикулярно его скорости \mathbf{v}_m , в связи с чем величина a должна быть постоянной. Таким образом, используя начальные условия, найдем

$$\dot{x}_m = \dot{v}_{m0} \cos \varphi, \quad \dot{y}_m = \dot{v}_{m0} \sin \varphi, \quad (5)$$

где v_{m0} — величина скорости центра масс в начальный момент времени, а угол φ определен формулой (3).

Интегрируя (5) по времени и определяя постоянные интегрирования, получим

$$x_m = \frac{v_{m0}}{\dot{\varphi}_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) + x_{m0}, \quad (6)$$

$$y_m = \frac{v_{m0}}{\dot{\varphi}_0} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) + y_{m0}.$$

Отсюда следует, что центр масс стержня (конька) движется по окружности

$$(x_m - x_c)^2 + (y_m - y_c)^2 = \frac{v_{m0}^2}{\dot{\varphi}_0^2} \quad (7)$$

радиуса $(v_{m0}/\dot{\varphi}_0)$ с центром в точке

$$x_c = x_{m0} - \frac{v_{m0}}{\dot{\varphi}_0} \sin \varphi_0, \quad y_c = y_{m0} - \frac{v_{m0}}{\dot{\varphi}_0} \cos \varphi_0,$$

причем движение по окружности происходит с постоянной по величине скоростью.

Наконец, дифференцируя (5), получим выражения $m\ddot{x}_m$ и $m\ddot{y}_m$, определяющие реакцию плоскости; величина этой реакции постоянна и равна

$$R = mv_{m0}\dot{\varphi}_0. \quad (8)$$

Глава IX

УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА

Как уже отмечалось, уравнения Лагранжа представляют собой систему s дифференциальных уравнений *второго* порядка относительно s обобщенных координат q как функций времени. Этим уравнениям можно сопоставить эквивалентную систему $2s$ уравнений *первого* порядка, где в качестве неизвестных взяты $2s$ функций времени: s обобщенных координат q и s обобщенных импульсов p . Переменные q, p называются каноническими, а соответствующая система $2s$ уравнений движения называется каноническими уравнениями Гамильтона.

Исследование свойств уравнений Гамильтона привело к формулировке ряда эффективных методов решения динамических задач. Кроме того, оказалось, что известная равноправность обобщенных импульсов и координат, имеющая место в уравнениях Гамильтона, является таким свойством, которое можно использовать при построении статистической и квантовой механики.

§ 9.1. Канонические уравнения

Движение механической системы с *голономными идеальными связями, обобщенно-потенциальными и диссипативными заданными силами* подчинено уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^d \quad (j = 1, 2, \dots, s),$$

(см. (5.77)). Конкретный вид этих уравнений определяется лагранжианом как функцией переменных q, \dot{q} и t . Что касается уравнений Гамильтона, то, как будет показано ниже, их конкретный вид определяется обобщенной энергией H как функцией переменных q, p и t (см. (5.91)). Эта функция, равная по определению

$$H(q, p, t) = \left\{ \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \right\}_{\dot{q} \rightarrow \dot{q}(q, p, t)}, \quad (9.1)$$

называется функцией Гамильтона (или гамильтонианом); здесь обобщенные скорости \dot{q} как функции канонических переменных определяются из системы уравнений

$$p_j = \sum_{k=1}^s a_{jk} \dot{q}_k + a_j - U_j \quad (j = 1, 2, \dots, s),$$

детерминант которой отличен от нуля — см. (5.85), (5.60).

Например, функция Гамильтона свободной точки в потенциальном поле (в декартовых, цилиндрических и сферических координатах) (см. формулы (1) и (4) примера 5.7)

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z), \quad (9.2)$$

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2 \right) + U(\rho, \varphi, z), \quad (9.3)$$

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \varphi). \quad (9.4)$$

Подставляя в (9.1) функцию Лагранжа (см. (5.65))

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} v^2 + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi$$

свободного заряда, движущегося в заданном электромагнитном поле с потенциалами \mathbf{A} и φ , и переходя к обобщенному импульсу, равному

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (9.5)$$

получим гамильтониан такого заряда:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi. \quad (9.6)$$

Функция Лагранжа свободной точки относительно произвольной неинерциальной системы S' определяется кинетической энергией точки относительно S' , обобщенным потенциалом сил инерции (5.100) и потенциалом сил взаимодействия U :

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\mathbf{v}')^2 + m[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'] \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega}_0' \cdot \mathbf{r}' + \frac{m}{2} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']^2 - U,$$

где \mathbf{r}' и \mathbf{v}' — радиус-вектор и скорость точки относительно S' ; $\boldsymbol{\omega}_0'$ и $\boldsymbol{\omega}$ — ускорение начала системы S' и ее угловая скорость относительно инерциальной системы S . Определяя обобщенный импульс

$$\mathbf{p}' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}'} = m(\mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']) \quad (9.7)$$

и обобщенную энергию (см. (5.92))

$$H = \frac{m}{2} (\mathbf{v}')^2 + m \boldsymbol{\omega}_O \cdot \mathbf{r}' - \frac{m}{2} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']^2 + U,$$

находим функцию Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}' - m[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'])^2 + m \boldsymbol{\omega}_O \cdot \mathbf{r}' - \frac{m}{2} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']^2 + U. \quad (9.8)$$

Упрощая (9.8), окончательно получим

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}')^2 + \boldsymbol{\omega} [\mathbf{p}' \mathbf{r}'] + m \boldsymbol{\omega}_O \cdot \mathbf{r}' + U. \quad (9.9)$$

Теперь выведем уравнения Гамильтона. С этой целью возьмем дифференциал от функции H , один раз как от известной функции q , p и t , а другой раз исходя из определения (9.1). Тогда получим

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (9.10)$$

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \quad (9.11)$$

Сопоставляя здесь отдельные члены и используя определение обобщенного импульса (см. с. 237), найдем соотношения

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (9.12)$$

Выражая далее с помощью уравнений движения (5.77) каждую производную $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$ через производную соответствующего обобщенного импульса p_i по времени, получим систему уравнений

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^d \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (9.13)$$

которые называются *каноническими уравнениями Гамильтона*.

Эти уравнения, как следует из вывода, эквивалентны уравнениям Лагранжа (5.77). Однако уравнения Гамильтона по сравнению с уравнениями Лагранжа имеют более симметричную форму,

что в особенности видно из сопоставления этих уравнений в отсутствие диссипативных сил:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (9.14)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (9.15)$$

Приведем в качестве примера уравнения Гамильтона свободной точки: в обычном потенциальном поле (в декартовых и цилиндрических координатах, см. (9.2) и (9.3))

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, & \dot{p}_x &= - \frac{\partial H}{\partial x} = - \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}, & \dot{p}_y &= - \frac{\partial H}{\partial y} = - \frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned} \quad (9.16)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, \quad \dot{p}_z = - \frac{\partial H}{\partial z} = - \frac{\partial U}{\partial z};$$

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \quad \dot{p}_\rho = \frac{p_\varphi^2}{m\rho^3} - \frac{\partial U}{\partial \rho},$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}, \quad \dot{p}_\varphi = - \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad (9.17)$$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m}, \quad \dot{p}_z = - \frac{\partial U}{\partial z};$$

в обобщенно-потенциальном поле (в декартовых координатах, см. (9.6))

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right),$$

$$\dot{p}_x = \frac{e}{mc} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - e \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\dot{p}_y = \frac{e}{mc} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} - e \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (9.18)$$

$$\dot{p}_z = \frac{e}{mc} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} - e \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Закон сохранения обобщенного импульса в канонических переменных формулируется аналогично (5.83). Действительно, из соотношений (9.12) видно, что частные производные \mathcal{L} и H по координатам обращаются в нуль только одновременно. Следовательно, если какая-либо координата является циклической в отно-

шении функции Лагранжа, то она будет циклической и в отношении функции Гамильтона. Таким образом, уравнения (9.13) приводят к следующей форме закона сохранения обобщенного импульса:

$$p_j = p_{j0}, \text{ если } \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \text{ и } Q_j^d = 0. \quad (9.19)$$

Частные производные от H и \mathcal{L} по времени обращаются в нуль также одновременно. Эта «циклическость» времени приводит к сохранению функции H . Действительно, из уравнения (5.90) и последнего из соотношений (9.12) получим закон изменения функции Гамильтона

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{j=1}^s Q_j^d \dot{q}_j, \quad (9.20)$$

из которого следует соответствующий закон сохранения

$$H = H_0, \text{ если } \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \text{ и } Q_j^d = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (9.21)$$

(в этом случае система называется обобщенно-консервативной).

Пример 9.1. Функция Гамильтона и интегралы канонических уравнений в задаче двух тел.

Функция Лагранжа двух материальных точек с потенциальной энергией взаимодействия U может быть представлена в виде

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} v_m^2 + \frac{\mu}{2} v^2 - U(r),$$

где m — сумма масс обеих точек, μ — их приведенная масса, \mathbf{v}_m — скорость центра масс точек, $v = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|$ — модуль разности скоростей точек, а r — расстояние между ними. Выбирая в качестве обобщенных импульсов проекции импульса системы $\mathbf{P}_m = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_m}$

и обобщенные импульсы p_r , p_θ и p_φ , характеризующие движение точек относительно центра масс, для функции Гамильтона получим выражение

$$H = \frac{p_m^2}{2m} + \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r).$$

Отсюда видно, что проекции радиуса-вектора центра масс \mathbf{r}_m и угол φ являются циклическими координатами. Это приводит к интегралам

$$\mathbf{P}_m = m\mathbf{v}_m = \mathbf{P}_{m0}, \quad p_\varphi = \mu r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} = p_{\varphi 0}.$$

Первый из этих интегралов соответствует сохранению импульса системы, а второй — сохранению кинетического момента относительно полярной оси, проходящей через центр масс. В силу произвольности выбора оси ее можно направить вдоль вектора \mathbf{g}_0 . Тогда полярный угол $\theta_0 = 0$ и, следовательно, $p_{\theta 0} = 0$. Рассматривая общий случай, когда в последующие моменты времени угол θ отличен от нуля, приходим к выводу, что $\dot{\varphi} = 0$ в любой момент времени, т. е. движение точки относительно центра масс, происходит в плоскости, сохраняющей свою ориентацию. Функция Гамильтона, описывающая движение системы в этой плоскости, будет иметь вид

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + U(r).$$

Эта функция не зависит явно от времени и координаты θ , что приводит к двум интегралам

$$\frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + U(r) = E_0, \quad p_\theta = p_{\theta 0}.$$

Получая с помощью найденного гамильтониана канонические уравнения

$$\dot{r} = \frac{p_r}{\mu}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\mu r^2}$$

и используя приведенные выше интегралы движения, нетрудно решение задачи двух тел привести к известным квадратурам (см. (3.18)).

§ 9.2. Фазовое пространство и теорема Лиувилля

Одним из важнейших положений, на которых основывается статистическая механика, является теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Эта теорема связана с понятием о фазовом пространстве. *Фазовым пространством называется воображаемое пространство $2s$ измерений, по координатным осям которого «откладываются» обобщенные координаты q_j и импульсы p_j механической системы ($j=1, 2, \dots, s$; s — число степеней свободы). Состояние механической системы в данный момент времени изображается в фазовом пространстве одной фазовой точкой. С течением времени эта точка движется по фазовой траектории.*

Если заданы гамильтониан механической системы, диссипативные силы и начальные условия q_{j0}, p_{j0} ($j=1, 2, \dots, s$), то с помощью уравнений Гамильтона можно определить скорости изменения координат и импульсов в начальный момент времени t_0 :

$$\dot{q}_{j0} = \left. \frac{\partial H}{\partial p_j} \right|_{q_0, p_0, t_0}, \quad \dot{p}_{j0} = - \left. \frac{\partial H}{\partial q_j} \right|_{q_0, p_0, t_0} + Q_j^d \Big|_{q_0, p_0, t_0} \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (9.22)$$

(здесь, как и ранее, под q и p понимается совокупность всех координат и импульсов). Через каждую точку фазового пространства проходит лишь одна фазовая траектория данной механической системы (ввиду единственности решения уравнений Гамильтона). Этим свойством не обладает, например, пространство конфигураций, «точки» которого являются совокупностью обобщенных координат q .

Рассмотрим *бесконечную совокупность одинаковых механических систем, отличающихся друг от друга только начальными условиями* [38, гл. 1]. Иначе говоря, рассмотрим бесконечное множество точных копий данной реальной системы (для всех этих систем задан одинаковый гамильтониан, одни и те же диссипативные силы, но начальные условия этих систем различны). Такая виртуальная совокупность систем называется ансамблем Гиббса. Пусть в произвольный момент времени t_0 ансамбль заполняет область (Γ_0) фазового пространства, причем фазовый объем этой области равен

$$\Gamma_0 = \int \dots \int_{(\Gamma_0)} \delta q_{10} \dots \delta q_{s0} \delta p_{10} \dots \delta p_{s0}. \quad (9.23)$$

В момент времени $t = t_0 + \Delta t$ ансамбль займет другую область (Γ) с фазовым объемом

$$\Gamma = \int \dots \int_{(\Gamma)} \delta q_1 \dots \delta q_s \delta p_1 \dots \delta p_s \quad (9.24)$$

(см. рис. 9.1, на котором изображено перемещение некоторого ансамбля систем в двумерном фазовом пространстве).

Найдем соотношение между величинами Γ и Γ_0 или закон изменения фазового объема ансамбля Гиббса. Учитывая, что действительное перемещение каждой системы ансамбля подчинено уравнениям движения, а следовательно, переменные q, p в момент t являются функциями этих же переменных, взятых в начальный момент

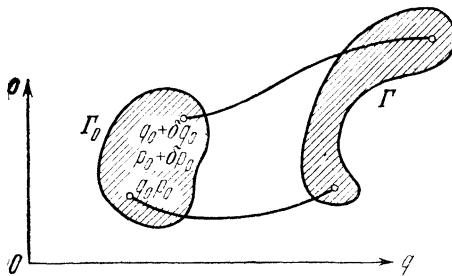


Рис 9.1

времени, запишем фазовый объем Γ в виде интеграла по области (Γ_0) :

$$\Gamma = \int \dots \int_{(\Gamma_s)} D \delta q_{10} \dots \delta q_{s0} \delta p_{10} \dots \delta p_{s0}, \quad (9.25)$$

где $D = \frac{\partial(q, p)}{\partial(q_0, p_0)}$ — якобиан преобразования от переменных q, p к значениям этих переменных q_0, p_0 в момент времени t_0 , а функции

$$q = q(q_0, p_0, t), \quad p = p(q_0, p_0, t)$$

являются решениями уравнений движения.

Из сопоставления (9.25) и (9.23) видно, что задача об отыскании закона изменения Γ сводится к отысканию закона изменения якобиана D . В связи с этим найдем значение D и его производной по времени в произвольно выбранный момент времени t_0 , учитывая, что значения координат и импульсов в момент времени $t_0 + \Delta t$ соответственно равны

$$q_i = q_{i0} + \dot{q}_{i0} \Delta t, \quad p_i = p_{i0} + \dot{p}_{i0} \Delta t \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (9.26)$$

(Несмотря на то, что эти соотношения верны лишь с точностью до первой степени малого приращения Δt включительно, приближенность (9.26) не налагает каких-либо ограничений на окончательный вывод, поскольку в процессе доказательства необходимо перейти к пределу $\Delta t \rightarrow 0$). Используя (9.26), получим элементы якобиана с той же точностью

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial q_{j0}} &= \delta_{ij} + \frac{\partial \dot{q}_{i0j}}{\partial q_{j0}} \Delta t, & \frac{\partial q_i}{\partial p_{j0}} &= \frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial p_{j0}} \Delta t, \\ \frac{\partial p_i}{\partial q_{j0}} &= \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial q_{j0}} \Delta t, & \frac{\partial p_i}{\partial p_{j0}} &= \delta_{ij} + \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial p_{j0}} \Delta t \end{aligned} \quad (9.27)$$

($i, j = 1, 2, \dots, s$).

Подставляя (9.27) в выражение для якобиана D , находим точное значение $D(t_0)$ и приближенное значение $D(t_0 + \Delta t)$

$$D(t_0) = 1, \quad D(t_0 + \Delta t) = 1 + \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{i0}} + \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial p_{i0}} \right) \Delta t \quad (9.28)$$

(здесь члены порядка Δt появляются только за счет диагональных элементов якобиана). Отсюда, переходя к пределу, находим производную якобиана при $t = t_0$

$$\dot{D}|_{t_0} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{i0}} + \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial p_{i0}} \right). \quad (9.29)$$

Поскольку движение систем ансамбля подчинено уравнениям Гамильтона, постольку каждое слагаемое в правой части (9.29) будет равно (см. (9.22))

$$\frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{i0}} + \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial p_{i0}} = \frac{\partial Q_{i0}^d}{\partial p_{i0}} \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (9.30)$$

Используя (9.30) и имея в виду произвольность t_0 , получим выражение для производной якобиана D , справедливое в любой момент времени:

$$\dot{D} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial Q_i^d}{\partial p_i}. \quad (9.31)$$

Следовательно, производная фазового объема Γ равна (см. (9.25))

$$\dot{\Gamma} = \int \dots \int_{(\Gamma_0)} \sum_{i=1}^s \frac{\partial Q_i^d}{\partial p_i} \delta q_{10} \dots \delta q_{s0} \delta p_{10} \dots \delta p_{s0}. \quad (9.32)$$

Отсюда вытекает закон сохранения фазового объема (теорема Луивилля). Согласно этому закону *фазовый объем данного ансамбля механических систем с обобщенно-потенциальными силами и голономными идеальными связями в отсутствие диссипативных сил сохраняется*, т. е.

$$\Gamma = \Gamma_0, \text{ если } Q_i^d = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (9.33)$$

В этом случае $\dot{D} = 0$ и, следовательно, величина якобиана в любой момент времени равна (см. (9.28))

$$D = 1. \quad (9.34)$$

Соотношения (9.33) и (9.34) справедливы при *любом* числе точек в системе и поэтому могут служить основой для изучения систем с большим количеством частиц, т. е. систем, которые изучаются статистической механикой.

Пример 9.2. *Сохранение фазового объема ансамбля систем с одной степенью свободы.*

Рассмотрим движение точки по линии пересечения неподвижной сферы и колеблющейся горизонтальной плоскости (см. пример 5.3). В этом случае лагранжиан, обобщенный импульс и функция Гамильтона соответственно равны

$$\mathcal{L} = \frac{ma^2}{2} \dot{\varphi}^2 \cos^2 \omega t,$$

$$p_\varphi = ma^2 \dot{\varphi} \cos^2 \omega t,$$

$$H = p_\varphi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{p_\varphi^2}{2ma^2 \cos^2 \omega t}$$

(в выражениях \mathcal{L} и H опущены члены, зависящие только от времени, поскольку они, как нетрудно видеть, не влияют на вид уравнений Лагранжа).

Отсюда получаем канонические уравнения

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ma^2 \cos^2 \omega t}, \quad \dot{p}_\varphi = 0$$

и их решение

$$\varphi = \frac{p_{\varphi 0}}{ma^2 \omega} \operatorname{tg} \omega t + \varphi_0, \quad p_\varphi = p_{\varphi 0}.$$

Фазовое пространство в данном случае двумерно, а фазовыми траекториями являются прямые, параллельные оси φ (рис. 9.2).

Изучим движение воображаемой совокупности материальных точек, отличающихся друг от друга только начальными условиями $p_{\varphi 0}$ и φ_0 (в остальном точки, силы и связи тождественны). Пусть в начальный момент времени фазовый объем этого ансамбля равен $\Gamma_0 = \Delta\varphi_0 \cdot \Delta p_{\varphi 0}$ (область (Γ_0) ограничивают прямые, соединяющие точки 1—4). С течением времени этот прямоугольник деформируется, но величина его фазового объема (в данном случае фазовой «площади») сохраняется, о чем свидетельствует прямое вычисление якобиана:

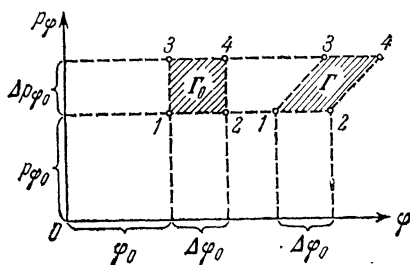


Рис. 9.2

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial \varphi}{\partial p_{\varphi 0}} \\ \frac{\partial p_\varphi}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial p_\varphi}{\partial p_{\varphi 0}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\operatorname{tg} \omega t}{ma^2 \omega} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Что касается деформации «прямоугольника», то ее можно определить, рассматривая законы движения точек 1—4 в фазовом пространстве:

$$\varphi_1 = \frac{p_{\varphi 0}}{ma^2 \omega} \operatorname{tg} \omega t + \varphi_0, \quad (p_\varphi)_1 = p_{\varphi 0},$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \frac{p_{\varphi 0}}{ma^2\omega} \operatorname{tg} \omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi_0, & (p_{\varphi})_2 &= p_{\varphi 0}, \\ \varphi_3 &= \frac{(p_{\varphi 0} + \Delta p_{\varphi 0})}{ma^2\omega} \operatorname{tg} \omega t + \varphi_0, & (p_{\varphi})_3 &= p_{\varphi 0} + \Delta p_{\varphi 0}, \\ \varphi_4 &= \frac{(p_{\varphi 0} + \Delta p_{\varphi 0})}{ma^2\omega} \operatorname{tg} \omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi_0, & (p_{\varphi})_4 &= p_{\varphi 0} + \Delta p_{\varphi 0}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\varphi_2 - \varphi_1 &= \Delta\varphi_0 = \varphi_4 - \varphi_3, \\ \varphi_3 - \varphi_1 &= \frac{\Delta p_{\varphi 0}}{ma^2\omega} \operatorname{tg} \omega t = \varphi_4 - \varphi_2,\end{aligned}$$

и, следовательно, с течением времени «прямоугольник» деформируется во все более косой «параллелограмм», «площадь» которого равна «площади» «прямоугольника».

§ 9.3. Скобки Пуассона

Движение механической системы с обобщенным потенциалом \mathcal{U} и голономными идеальными связями в отсутствие диссипативных сил подчиняется уравнениям Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

(см. (9.15)). Найдем *необходимое и достаточное условие того, чтобы некоторая функция $f(q, p, t)$ сохраняла постоянное значение с течением времени:*

$$f(q, p, t) = \operatorname{const}, \quad (9.35)$$

т. е. представляла собой первый интеграл уравнений (9.15).

Пусть (9.35) имеет место; тогда полная производная по времени от функции f равна нулю, т. е.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right\} = 0.$$

Используя уравнения (9.15), получим интересующее нас *необходимое условие* в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0, \quad (9.36)$$

где

$$[f, H] = \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right\}.$$

Обратные рассуждения убеждают в достаточности условия (9.36).

Это условие записано с помощью дифференциального выражения, обозначенного символом $[f, H]$. Вообще для двух функций канонических переменных можно составить выражение

$$[f_1, f_2] = \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial q_j} \frac{\partial f_2}{\partial p_j} - \frac{\partial f_1}{\partial p_j} \frac{\partial f_2}{\partial q_j} \right\}, \quad (9.37)$$

которое называется скобками Пуассона. Оно обладает свойством антисимметрии, так как

$$[f_1, f_1] = 0, \quad [f_1, f_2] = -[f_2, f_1], \quad (9.38)$$

и рядом других столь же очевидных свойств, вытекающих из определения (9.37):

$$[f_1, (f_2 + f_3)] = [f_1, f_2] + [f_1, f_3], \quad (9.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [f_1, f_2] = \left[\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2 \right] + \left[f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t} \right], \quad (9.40)$$

$$[f_1, (f_2, f_3)] = [f_1, f_2] f_3 + [f_1, f_3] f_2. \quad (9.41)$$

Более громоздко доказательство тождества Пуассона*

$$[f_1, [f_2, f_3]] + [f_2, [f_3, f_1]] + [f_3, [f_1, f_2]] = 0. \quad (9.42)$$

С помощью этого тождества нетрудно доказать теорему Пуассона, в которой утверждается: *если функции $f_1(q, p, t)$ и $f_2(q, p, t)$ являются первыми интегралами канонических уравнений (9.15), то и $[f_1, f_2]$ также будет интегралом этих уравнений, т. е.*

* Из определения (9.37) нетрудно видеть, что левая часть (9.42) должна представлять собой сумму членов вида: вторая производная от одной из функций f_1, f_2 или f_3 , умноженная на некоторый коэффициент. Поэтому, чтобы убедиться в справедливости тождества, достаточно показать, что левая часть (9.42) не содержит ни одной второй производной. Ввиду симметрии тождества относительно f_1, f_2 и f_3 проверку можно сделать лишь для одной функции, например для f_3 . Замечая, что вторые производные от f_3 могут входить лишь в сумму

$$[f_1 [f_2, f_3]] + [f_2, [f_3, f_1]],$$

непосредственно убедимся, что эти производные в данной сумме уничтожаются.

$$[f_1, f_2] = C. \quad (9.43)$$

Из условий теоремы и в силу (9.36) имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + [f_1, H] = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} + [f_2, H] = 0. \quad (9.44)$$

Составляя далее тождество Пуассона для функций f_1 , f_2 и H и исключая из него с помощью (9.44) скобки $[f_1, H]$ и $[f_2, H]$, получим тождество

$$- \left[f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t} \right] + \left[f_2, \frac{\partial f_1}{\partial t} \right] + [H, [f_1, f_2]] = 0,$$

которое согласно (9.38) и (9.40) сводится к условию (9.36) для функции $[f_1, f_2]$:

$$\frac{\partial [f_1, f_2]}{\partial t} + [[f_1, f_2], H] = 0, \quad (9.45)$$

что и доказывает теорему.

Пусть, например, функция Гамильтона явно от времени не зависит, а $f(q, p, t)$ является интегралом системы (9.15). Тогда на основании условия (9.36) и теоремы Пуассона, примененной к функциям f и H , можно утверждать, что частные производные $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, ... являются интегралами канонических уравнений, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = C_1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = C_2, \dots \quad (9.46)$$

Эти интегралы могут оказаться новыми интегралами, независимыми от исходного. Однако если f явно от времени не зависит, то вместо (9.46) придем к тривиальному тождеству $[fH] \equiv 0$. Это обстоятельство нужно иметь в виду, применяя теорему Пуассона*.

С помощью скобок Пуассона можно записать ряд соотношений, имеющих важные аналогии в квантовой механике. Например, фундаментальные скобки Пуассона, т. е. скобки от самих канонических переменных:

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}, \quad (9.47)$$

являются классическими аналогами *перестановочных соотношений Гейзенберга* [42, 43].

* Действительно, может случиться, что скобки Пуассона от функций f_1 и f_2 , являющихся интегралами уравнений (9.15), либо тождественно равны нулю (постоянной), либо представляют собой функцию от f_1 и f_2 . В этих случаях метод Пуассона не приводит к новым независимым интегралам.

Получим еще два легко проверяемых результата, имеющих квантовомеханические аналоги. Используя определение момента импульса одной точки, нетрудно показать, что между проекциями момента импульса в декартовых координатах имеют место соотношения

$$[M_x, M_y] = M_z, \quad [M_y, M_z] = M_x, \quad [M_z, M_x] = M_y. \quad (9.48)$$

Следовательно, две компоненты момента импульса не могут одновременно играть роль канонических переменных, так как канонические переменные должны удовлетворять фундаментальным соотношениям (9.47) (этому утверждению, справедливому в классической механике, соответствует квантовомеханическое утверждение о том, что две компоненты момента не могут быть одновременно точно вычислены). Вместе с тем квадрат момента и любая компонента момента могут одновременно играть роль обобщенных импульсов (в квантовомеханической теории этому соответствует возможность одновременного точного вычисления M^2 и M_α , $\alpha = x, y, z$). Действительно, используя тождества (9.39) и (9.41), найдем

$$[M_\alpha, M^2] = \sum_\beta [M_\alpha, M_\beta^2] = 2 \sum_\beta [M_\alpha, M_\beta] M_\beta \quad (\alpha, \beta = x, y, z).$$

Отсюда, используя (9.48), получим для любой компоненты

$$[M_\alpha, M^2] = 0 \quad (\alpha = x, y, z). \quad (9.49)$$

Наконец, покажем, как с помощью скобок Пуассона формулируется одно из основных уравнений статистической механики. Вероятность пребывания механической системы в элементарном фазовом объеме $\delta\Gamma$ определяется как отношение числа $\delta\mathcal{N}^0$ систем ансамбля Гиббса, находящихся в $\delta\Gamma$, к постоянному числу \mathcal{N}^0 всех систем этого ансамбля, наверняка находящихся в некотором фиксированном фазовом объеме $\Delta\Gamma$. Соответственно плотность вероятности \mathcal{D} определяется как отношение вероятности к соответствующему фазовому объему $\delta\Gamma$, т. е.

$$\mathcal{D} = \frac{\delta\mathcal{N}^0}{\mathcal{N}^0 \delta\Gamma} \quad (9.50)$$

(плотность вероятности является функцией $2s+1$ переменных q, p и t).

Рассматривая $\delta\mathcal{N}^0$ определенных систем, занимающих в моменты времени t_0 и t фазовые объемы $(\delta\Gamma)_{t_0}$ и $(\delta\Gamma)_t$ соответственно, получим очевидное равенство $(\delta\mathcal{N}^0)_{t_0} = (\delta\mathcal{N}^0)_t$, которое, согласно определению (9.50), можно записать в виде

$$\mathcal{D}_{t_0} (\delta\Gamma)_{t_0} = \mathcal{D}_t (\delta\Gamma)_t;$$

здесь \mathcal{D}_{t_0} — плотность вероятности пребывания системы в момент времени t_0 в фазовой точке, находящейся в объеме $(\delta\Gamma)_{t_0}$, а \mathcal{D}_t — плотность вероятности в момент t в точке, находящейся в объеме $(\delta\Gamma)_t$. Учитывая, что величины фазовых объемов $(\delta\Gamma)_{t_0}$ и $(\delta\Gamma)_t$ равны между собой (см. (9.33)), получим $\mathcal{D}_t = \mathcal{D}_{t_0}$. Таким образом, плотность вероятности оказывается интегралом канонических уравнений и, следовательно, подчиняется уравнению

$$\frac{d\mathcal{D}}{dt} = 0 \text{ или } \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial t} + [\mathcal{D}, H] = 0, \quad (9.51)$$

которое представляет собой одно из основных уравнений статистической механики.

Закон (9.51) изменения плотности вероятности в фазовом пространстве аналогичен уравнению непрерывности несжимаемой жидкости. Действительно, плотность ρ жидкости, являющаяся функцией положения \mathbf{r} частицы жидкости и времени, для данной частицы несжимаемой жидкости сохраняет постоянное значение; поэтому ее полная производная по времени равна нулю:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \text{ или } \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\nabla\rho) \mathbf{v} = 0,$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ — скорость частицы жидкости. Сравнение этого уравнения непрерывности с уравнением (9.51) показывает, что можно провести аналогию между плотностью вероятности и плотностью жидкости, между $2s$ -мерным градиентом плотности вероятности с компонентами $\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial q_i}$, $\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial p_i}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) и градиентом $\nabla\rho$ плотности жидкости, между $2s$ -мерной «скоростью» фазовой «частицы» с компонентами \dot{q}_i , \dot{p}_i ($i = 1, 2, \dots, s$) и скоростью \mathbf{v} частицы жидкости. Следовательно, движение ансамбля систем, подчиненных уравнениям Гамильтона (9.15), можно представить себе как движение «несжимаемой фазовой жидкости».

Пример 9.3. Скобки Пуассона для проекций радиуса-вектора, импульса и момента импульса точки.

Найти скобки Пуассона для проекций радиуса-вектора, импульса, момента импульса точки и показать, что в центрально-симметричном поле соответствующие скобки Пуассона приводят к интегралам момента.

Выберем в качестве независимых координат свободной материальной точки ее декартовы координаты. Обобщенными импульсами при этом будут проекции импульса точки p_x , p_y и p_z . Составляя скобки Пуассона для x и $M_x = yp_z - zp_y$, а затем для p_x и M_x и т. д., в случае произвольного потенциального внешнего поля получим

$$\begin{aligned}
 [x, M_x] &= [y, M_y] = [z, M_z] = 0, \\
 [x, M_y] &= z, \quad [y, M_z] = x, \quad [z, M_x] = y, \\
 [y, M_x] &= -z, \quad [z, M_y] = -x, \quad [x, M_z] = -y; \\
 [p_x, M_x] &= [p_y, M_y] = [p_z, M_z] = 0, \\
 [p_x, M_y] &= p_z, \quad [p_y, M_z] = p_x, \quad [p_z, M_x] = p_y, \\
 [p_y, M_x] &= -p_z, \quad [p_z, M_y] = -p_x, \quad [p_x, M_z] = -p_y
 \end{aligned}$$

(эти результаты полезно сравнить с соответствующими квантово-механическими соотношениями).

Если точка движется в центрально-симметричном поле, то, вычисляя скобку

$$\begin{aligned}
 [M_x, H] &= \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial M_x}{\partial p_x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial p_y} - \\
 &\quad - \frac{\partial M_x}{\partial p_y} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial p_z} - \frac{\partial M_x}{\partial p_z} \frac{\partial H}{\partial z},
 \end{aligned}$$

где $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(r)$ и $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, найдем

$$[M_x, H] = p_z \frac{p_y}{m} + z \frac{\partial U}{\partial r} \frac{y}{r} - p_y \frac{p_z}{m} - y \frac{\partial U}{\partial r} \frac{z}{r} = 0.$$

Последнее условие совпадает с условием (9.36), поскольку M_x явно от времени не зависит. Следовательно, M_x является интегралом движения канонических уравнений. Составляя скобку Пуассона $[M_y, H]$, аналогично убедимся, что и $M_y = M_{y0}$. Что касается проекции M_z , то она, как нетрудно подсчитать, равна скобке $[M_x, M_y]$ и согласно теореме Пуассона также сохраняется.

§ 9.4. Уравнение Гамильтона — Якоби

Наряду с уравнениями движения Лагранжа и Гамильтона, которые являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, существует уравнение в частных производных, описывающее движение механической системы в поле обобщенно-потенциальных сил при наличии голономных идеальных связей. Этому уравнению, называемому уравнением Гамильтона — Якоби, подчиняется функция действия

$$S = \int_{t_0}^t \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt, \quad (9.52)$$

с помощью которой оказывается возможным находить решение канонических уравнений Гамильтона. Прежде чем убедиться в этом, покажем, как по известному решению канонических уравнений определяется функция действия, и изучим ее основные свойства.

Пусть известны все независимые интегралы канонических уравнений (9.15) или их решение:

$$q = q(q_0, p_0, t_0, t), \quad (9.53)$$

$$p = p(q_0, p_0, t_0, t). \quad (9.54)$$

Дифференцируя (9.53) по времени, получим обобщенные скорости в виде

$$\dot{q} = \dot{q}(q_0, p_0, t_0, t). \quad (9.55)$$

Подставляя (9.53) и (9.55) в (9.52), найдем действие S как функцию начальных условий и времени:

$$S = S(q_0, p_0, t_0, t). \quad (9.56)$$

Можно найти действие как функцию координат и времени, а также начального положения и начального момента времени. Действительно, предполагая, что

$$\det \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_{j0}} \right) \neq 0, \quad (9.57)$$

и выражая начальные импульсы p_0 с помощью (9.53) через q , t , q_0 и t_0 , получим

$$p_0 = p_0(q, t, q_0, t_0), \quad (9.58)$$

а подставляя эти функции в (9.56), найдем

$$S = S(q, t, q_0, t_0). \quad (9.59)$$

Пользуясь (9.58) и (9.54), можно найти обобщенные импульсы как функции координат и времени, начального положения и начального момента t_0 :

$$p = p(q, t, q_0, t_0). \quad (9.60)$$

Покажем, что «поле импульсов», определяемое функциями (9.60), потенциально, а его потенциалом является функция действия (9.59). С этой целью найдем вариацию действия при фиксированных моментах времени t и t_0 (эту вариацию удобно сначала записать в виде вариации от интеграла (9.52)):

$$\delta S = \int_{t_0}^t \delta \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right\} dt. \quad (9.61)$$

Используя коммутативность операций дифференцирования по времени и варьирования при фиксированном времени, т. е. используя равенства

$$\delta \dot{q}_j = \delta \frac{dq_j}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q_j \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (9.62)$$

часть членов (9.61) можно будет представить в виде

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \delta q_j \right) dt = - \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) \Big|_{t_0}^t. \quad (9.63)$$

Тогда вместо (9.61) получим

$$\delta S = \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^t \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right\} \delta q_j dt + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^t. \quad (9.64)$$

Учитывая, что между измененными начальным и конечным положениями система движется по действительной траектории в соответствии с уравнениями движения (9.15) (или (9.14)), приравняем нулю выражения в фигурных скобках и тем самым найдем, что

$$\delta S = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^t. \quad (9.65)$$

Переходя в (9.65) к каноническим импульсам $p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$, окончательно найдем

$$\delta S = \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - \sum_{j=1}^s p_{j0} \delta q_{j0}, \quad (9.66)$$

откуда следует, что

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad p_{j0} = - \frac{\partial S}{\partial q_{j0}} \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (9.67)$$

где $S = S(q, t, q_0, t_0)$. Таким образом, действие как функция начального и конечного положений является потенциалом «поля импульсов», а первая и вторая группы функций (9.67) представляют собой решение канонических уравнений, записанное в виде (9.60) и (9.58) соответственно.

Найдем функцию действия и определяемые ею импульсы для твердого тела, вращающегося вокруг одной из главных осей инерции. Лагранжиан такого тела равен кинетической энергии

$\frac{J}{2} \dot{\varphi}^2$, где φ — угол поворота тела вокруг оси вращения, а J — соответствующий момент инерции. Очевидно, что здесь обобщенный импульс p_φ , равный $J\dot{\varphi}$, сохраняется, а решением уравнения движения является функция

$$\varphi = \frac{p_{\varphi 0}}{J}(t - t_0) + \varphi_0.$$

Используя это решение, получим действие в виде (9.56)

$$S = \frac{p_{\varphi 0}^2}{2J}(t - t_0),$$

а затем в виде (9.59)

$$\mathcal{S} = \frac{J}{2} \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{t - t_0},$$

откуда следует, что

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}} = J \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0}, \quad p_{\varphi 0} = - \frac{\partial S}{\partial \varphi_0} = J \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0}.$$

Итак, зная решение канонических уравнений, можно найти функцию действия и с ее помощью записать решение в форме (9.67). Более интересной и практически важной задачей является отыскание функции действия в том случае, когда решение канонических уравнений заранее не известно. Для выполнения этой задачи следует прежде всего найти уравнение, которому должна удовлетворять функция действия. Учитывая, что, с одной стороны, согласно (9.52)

$$\frac{dS}{dt} = \mathcal{L}, \quad (9.68)$$

а, с другой стороны,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (9.69)$$

найдем, что функция S как функция координат и времени подчинена уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} = 0. \quad (9.70)$$

Это уравнение с помощью определения (9.1) и первой группы соотношений (9.67) можно представить в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) = 0, \quad (9.71)$$

где $H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right)$ — гамильтониан системы, куда вместо обобщенных импульсов подставлены частные производные функции S по соответствующим координатам. Полученное уравнение в частных производных, которому удовлетворяет функция действия, называется *уравнением Гамильтона — Якоби*.

Рассмотрим полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, т. е. такое решение этого уравнения

$$S = S(q_1, \dots, q_s, t; \alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad (9.72)$$

которое зависит от s произвольных постоянных α и удовлетворяет условию *

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j}\right) \neq 0. \quad (9.73)$$

Из определения (9.72) и (9.73) видно, что функция действия (9.59) является полным интегралом уравнения Гамильтона — Якоби. В самом деле, эта функция удовлетворяет уравнению (9.71), а ввиду допущения (9.57) и соотношений (9.67) обладает свойством

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_{j_0}}\right) \neq 0 \quad (9.74)$$

(поскольку к функции S всегда можно прибавить произвольную постоянную, то некоторая комбинация из $s+1$ постоянных q_0 и t_0 войдет в S аддитивным образом). Так как функция действия может быть определена по известному решению канонических уравнений, то из вышесказанного следует, что с помощью этого решения можно найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби.

Большое практическое значение имеет обратное утверждение, основанное на теореме Якоби, которая дает возможность по известному полному интегралу уравнения Гамильтона — Якоби находить независимые интегралы канонических уравнений (9.15). Согласно этой теореме, *если некоторая функция $S(q, t, \alpha)$ является полным интегралом уравнения Гамильтона — Якоби, то реше-*

* Поскольку уравнение (9.71) не содержит саму неизвестную функцию, а только ее производные, $(s+1)$ -я произвольная постоянная будет аддитивным образом входить в полный интеграл.

ние канонических уравнений Гамильтона (9.15) определяется соотношениями

$$а) p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad б) \beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (9.75)$$

где α и β — произвольные постоянные. Соотношения (9.75, а) определяют функции вида $p = p(q, t, \alpha)$, т. е. определяют обобщенные импульсы как функции координат и времени. Соотношения (9.75, б) представляют собой вторые интегралы канонических уравнений вида $\beta = \beta(q, t, \alpha)$. Разрешая эти интегралы относительно q , найдем решение в виде $q(t, \alpha, \beta)$, т. е. найдем координаты системы как функции времени и $2s$ произвольных постоянных.

Для доказательства теоремы Якоби нужно убедиться в том, что решение (9.75) тождественно удовлетворяет каноническим уравнениям Гамильтона (9.15). С этой целью будем исходить из очевидного тождества

$$\frac{\partial S(q, t, \alpha)}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S(q, t, \alpha)}{\partial q}, t\right) = 0, \quad (9.76)$$

дифференцируя которое можно получить ряд новых тождеств. Например, дифференцируя (9.76) по всем α , получим

$$\frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial \alpha_j \partial t} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial \alpha_j \partial q_i} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (9.77)$$

а вычисляя полную производную по времени от каждого из интегралов (9.75, б), найдем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S(q, t, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right) = \frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial t \partial \alpha_j} + \sum_{i=1}^s \dot{q}_i \frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial q_i \partial \alpha_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (9.78)$$

Системы (9.77) и (9.78) являются системами неоднородных линейных уравнений относительно величин $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ и \dot{q}_i соответственно. Коэффициенты этих систем одинаковы, а определители равны и, согласно (9.73), отличны от нуля. Следовательно, корни этих систем тождественно равны, т. е.

$$\dot{q}_i \equiv \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (9.79)$$

что означает тождественное удовлетворение первой группы канонических уравнений (9.15).

Дифференцируя тождество (9.76) по всем q и вычисляя полную производную по времени от обеих частей всех равенств (9.75, а), получим две системы уравнений:

$$\frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial q_j \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial q_j \partial q_i} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (9.80)$$

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial t \partial q_j} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \quad (j = 1, 2, \dots, s),$$

первую из которых с помощью (9.79) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial q_j \partial t} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (9.81)$$

Сравнивая между собой (9.80) и (9.81), убеждаемся в том, что вторая группа уравнений (9.15) также тождественно удовлетворяется:

$$\dot{p}_j \equiv - \frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (9.82)$$

Таким образом, теорема доказана.

Основываясь на теореме Якоби, можно применять следующий метод решения задач о движении механических систем с обобщенно-потенциальными силами и голономными идеальными связями. Этот метод заключается в составлении уравнения Гамильтона — Якоби по известной функции Гамильтона и в отыскании полного интеграла этого уравнения с последующим использованием соотношений (9.75).

Например, составим уравнения Гамильтона — Якоби для свободной точки в потенциальном поле в декартовых, цилиндрических и сферических координатах (см. (9.2) — (9.4)):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} + U(x, y, z) = 0, \quad (9.83)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} + U(\rho, \varphi, z) = 0, \quad (9.84)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} + U(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (9.85)$$

и рассмотрим решение уравнения Гамильтона — Якоби для свободной точки, движущейся относительно инерциальной системы в отсутствие силовых полей. В этом простейшем случае все переменные в уравнении Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} = 0$$

разделяются, а его полный интеграл имеет вид

$$S = -E_0 t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4.$$

Определяя с помощью подстановки этого выражения в уравнение Гамильтона — Якоби связь между постоянными (число независимых неаддитивных постоянных должно равняться числу независимых переменных), найдем полный интеграл

$$S = -\frac{1}{2m} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4.$$

Отсюда на основании (9.75, а) убеждаемся, что все обобщенные импульсы сохраняются:

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \alpha_1, \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y} = \alpha_2, \quad p_z = \frac{\partial S}{\partial z} = \alpha_3,$$

а приравнявая производные $\frac{\partial S}{\partial \alpha}$ произвольным постоянным β (см. 9.75, б), находим вторые интегралы:

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -\frac{\alpha_1}{m} t + x,$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\frac{\alpha_2}{m} t + y,$$

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = -\frac{\alpha_3}{m} t + z.$$

Наконец, используя начальные условия и переобозначая постоянные, получим решение канонических уравнений

$$p_x = p_{x0}, \quad p_y = p_{y0}, \quad p_z = p_{z0},$$

$$x = x_0 + \frac{p_{x0}}{m} (t - t_0), \quad y = y_0 + \frac{p_{y0}}{m} (t - t_0), \quad z = z_0 + \frac{p_{z0}}{m} (t - t_0).$$

В заключение подчеркнем, что физические допущения, лежащие в основе канонических уравнений (9.15) и уравнения Га-

мильтона — Якоби (9.71), одинаковы*. Однако преимущество уравнения Гамильтона — Якоби является то, что основной метод решения этого уравнения — метод разделения переменных — включает в себя как частный случай метод циклических координат Лагранжа (см. § 9.5). Кроме того, при рассмотрении уравнения Гамильтона — Якоби наиболее естественно вскрывается глубокая аналогия между механикой точки и волновым процессом, которая играет важную роль при обсуждении волнового аспекта квантовомеханических явлений.

§ 9.5. Метод разделения переменных

В ряде случаев гамильтониан системы обладает свойствами, которые приводят к разделению переменных в уравнении Гамильтона — Якоби.

Рассмотрим *обобщенно-консервативную систему*, гамильтониан которой явно от времени не зависит (см. (9.21)), а уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = 0. \quad (9.86)$$

Этому уравнению удовлетворяет полный интеграл

$$S = -H_0 t + W(q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, H_0), \quad (9.87)$$

линейно зависящий от времени; здесь роль s -той неаддитивной постоянной играет постоянная обобщенной энергии H_0 , а «уточненное» действие W удовлетворяет уравнению

$$H\left(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = H_0. \quad (9.88)$$

В последнем нетрудно убедиться, подставляя (9.87) в (9.86) и имея в виду, что

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H_0, \quad \frac{\partial S}{\partial q_j} = \frac{\partial W}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (9.89)$$

Если полный интеграл уравнения (9.88) известен, то, применяя теорему Якоби, можно получить решение канонических уравнений. Действительно, учитывая последние s равенств (9.89), а также равенства

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s-1), \quad \frac{\partial S}{\partial H_0} = -t + \frac{\partial W}{\partial H_0}, \quad (9.90)$$

* О математической эквивалентности уравнения в частных производных и системы уравнений с обыкновенными производными см. [45, гл. IX, § 6, п. 1].

согласно (9.75) найдем

$$\begin{aligned} \text{а) } p_j &= \frac{\partial W}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s), \\ \text{б) } \beta_j &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s-1), \\ \text{в) } \beta_s &= -t + \frac{\partial W}{\partial H_0}. \end{aligned} \quad (9.91)$$

Поскольку W явно от времени не зависит, то «поле импульсов» (9.91, а) стационарно, $s-1$ интегралов (9.91, б) определяют совокупность «траекторий» системы в пространстве конфигураций, а последний интеграл (9.91, в) определяет закон движения системы.

При наличии *циклических координат* также имеет место разделение переменных в уравнении Гамильтона — Якоби. В самом деле, если $s-m$ независимых координат являются циклическими, то уравнение (9.71) принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_m, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0, \quad (9.92)$$

а его решение будет *линейным относительно всех циклических координат*:

$$S = V(q_1, \dots, q_m; \alpha_1, \dots, \alpha_s; t) + \sum_{j=m+1}^s \alpha_j q_j. \quad (9.93)$$

Подставляя (9.93) в (9.92) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial S}{\partial q_j} = \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, m), \\ \frac{\partial S}{\partial q_j} &= \alpha_j \quad (j = m+1, \dots, s) \end{aligned} \quad (9.94)$$

(из последних $s-m$ равенств следует постоянство импульсов, соответствующих циклическим координатам), получим уравнение для функции V :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_m; \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_s; t\right) = 0. \quad (9.95)$$

Зная полный интеграл этого уравнения и используя теорему Якоби, можно найти решение канонических уравнений.

Наконец, рассмотрим такой случай разделяющихся переменных, когда функция Гамильтона имеет форму

$$H = H \{q_1, \dots, q_m; p_1, \dots, p_m; f_{m+1}(q_{m+1}, p_{m+1}), \dots, f_s(q_s, p_s), t\}, \quad (9.96)$$

где каждая из функций f_j зависит только от соответствующей одной пары канонических переменных q_j, p_j . Тогда решение уравнения Гамильтона — Якоби будет иметь вид

$$S = V(q_1, \dots, q_m; \alpha_1, \dots, \alpha_s; t) + \sum_{j=m+1}^s W_j(q_j; \alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad (9.97)$$

где W_j — аддитивная часть действия, зависящая только от координаты q_j и постоянных α . Подставляя (9.97) в уравнение Гамильтона — Якоби, соответствующее гамильтониану (9.96), и используя очевидные равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial t}, & \frac{\partial S}{\partial q_j} &= \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, m), \\ \frac{\partial S}{\partial q_j} &= \frac{\partial W_j}{\partial q_j} \quad (j = m+1, \dots, s), \end{aligned} \quad (9.98)$$

найдем уравнение для функций V и W_j ($j = m+1, \dots, s$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + H \left\{ q_1, \dots, q_m; \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_m}; f_{m+1} \left(q_{m+1}, \frac{\partial W_{m+1}}{\partial q_{m+1}} \right); \dots \right. \\ \left. \dots f_s \left(q_s, \frac{\partial W_s}{\partial q_s} \right); t \right\} = 0. \end{aligned} \quad (9.99)$$

Если (9.97) является решением исходного уравнения, то уравнение (9.99) должно обращаться в тождество при любых значениях координат q_{m+1}, \dots, q_s . Это возможно только в том случае, когда все функции f_j будут постоянными, так как при изменении данной координаты q_i изменяется лишь функция f_i . Таким образом, уравнение (9.99) распадается на систему уравнений:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H \left\{ q_1, \dots, q_m; \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_m}; \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_s; t \right\} = 0, \quad (9.100)$$

$$f_j \left(q_j, \frac{\partial W_j}{\partial q_j} \right) = \alpha_j \quad (j = m+1, \dots, s), \quad (9.101)$$

из которых $s-m$ последних уравнений являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Если полный интеграл V уравнения (9.100) и решения уравнений (9.101) могут быть найдены, то, используя (9.98) и теорему Якоби, получим решение исходного уравнения в виде

$$p_j = \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, m), \quad p_j = \frac{\partial W_j}{\partial q_j} \quad (j = m+1, \dots, s),$$

$$\beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, \dots, s). \quad (9.102)$$

Рассматриваемый случай разделяющихся переменных включает в себя, в частности, случай циклических координат. Действительно, если в (9.96) положить $\dot{f}_j = p_j$, то система (9.101) примет вид

$$\frac{dW_j}{dq_j} = \alpha_j \quad (j = m+1, \dots, s) \quad (9.103)$$

и, таким образом, полный интеграл (9.97) совпадет с интегралом (9.93).

Заметим, что в методе разделения переменных, как и в методе циклических координат, очень большую роль играет выбор переменных. Например, в задаче двух тел полярные координаты допускают разделение, а декартовы не допускают. Может также случиться, что в одной и той же задаче несколько систем переменных допускают разделение, а может случиться, что разделение переменных вообще провести нельзя, как, например, в задаче трех тел.

Пример 9.4. Движение заряда в поле электрического диполя.

Как известно [40, с. 49], потенциальная энергия заряда e в поле неподвижного электрического диполя с моментом \mathbf{a} равна

$$U = e \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Найти общее решение уравнения движения заряда [14, гл. III].

Гамильтониан заряда в сферических координатах с началом в диполе и полярной осью, направленной по вектору \mathbf{a} , имеет вид (см. (9.4))

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \frac{ea \cos \theta}{r^2}.$$

Поскольку полная энергия заряда сохраняется, то «укороченное» действие W , зависящее от координат r , θ и φ , подчиняется уравнению (см. (9.88))

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} + \frac{ea \cos \theta}{r^2} = E_0.$$

Замечая, что φ является циклической координатой, а r и θ разделяются, полный интеграл последнего уравнения будем искать в виде (см. (9.97))

$$W = W_r(r, \alpha_1, \alpha_2, E_0) + W_\theta(\theta, \alpha_1, \alpha_2, E_0) + \alpha_2 \varphi.$$

В результате уравнение для «укороченного» действия распадается на обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2 r^2 - 2mE_0 r^2 = -\alpha_1, \quad \left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta} + 2mea \cos \theta = \alpha_1,$$

решения которых легко записать в квадратурах. Таким образом, находим полный интеграл исходного уравнения

$$W = \int \left(2mE_0 - \frac{\alpha_1}{r^2}\right)^{1/2} dr + \int \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta} - 2mea \cos \theta\right)^{1/2} d\theta + \alpha_2 \varphi, \quad (1)$$

с помощью которого нетрудно получить вторые интегралы (см. (9.91))

$$\beta_1 = -\frac{1}{2} \int \frac{dr}{r^2 \left(2mE_0 - \frac{\alpha_1}{r^2}\right)^{1/2}} + \frac{1}{2} \int \frac{d\theta}{\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta} - 2mea \cos \theta\right)^{1/2}}, \quad (2)$$

$$\beta_2 = -\alpha_2 \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta} - 2mea \cos \theta\right)^{1/2}} + \varphi, \quad (3)$$

$$\beta_3 + t = \int \frac{m dr}{\left(2mE_0 - \frac{\alpha_1}{r^2}\right)^{1/2}}. \quad (4)$$

Первые два из этих интегралов определяют траекторию заряда, а третий легко берется и представляет собой закон движения заряда:

$$r = \left[\frac{2E_0}{m} (t + \beta_3)^2 + \frac{\alpha_1}{2mE_0} \right]^{1/2}. \quad (5)$$

Производя в (3) замену констант

$$\alpha_1 \rightarrow 2mE_0 l^2, \quad \frac{ea}{l^3} \rightarrow -mg \quad (6)$$

и учитывая, что $\alpha_2 = p_{\varphi 0} = M_{z0}$, получим формулу (4) примера 5.9. Следовательно, проекция точки на сферу постоянного радиуса (с центром в диполе) будет описывать траекторию, совпадающую с траекторией подобранного соответствующим образом сферического маятника.

Первые интегралы Якоби (см. (9.91, а)) представляют собой обобщенные импульсы заряда как функции координат:

$$p_r^2 r^2 = -\alpha_1 + 2mE_0 r^2, \quad (7)$$

$$p_\theta^2 = \alpha_1 - \frac{M_{z0}^2}{\sin^2 \theta} + 2m|e|a \cos \theta, \quad (8)$$

$$p_\varphi = M_{z0} \quad (9)$$

(здесь вместо постоянной α_2 введена равная ей константа M_{z0} и для определенности выбран заряд $e < 0$). Из соотношений (7) и (8) вытекают неравенства, определяющие области изменения координат r и θ :

$$2mE_0 r^2 \geq \alpha_1, \quad (10)$$

$$\alpha_1 \geq \frac{M_{z0}^2}{\sin^2 \theta} - 2m|e|a \cos \theta, \quad (11)$$

а на основании интеграла (9) можно заключить, что при $M_{z0} \neq 0$ заряд вращается вокруг полярной оси все время в одном направлении (знак $\dot{\varphi}$ совпадает со знаком $\dot{\varphi}_0$); если же $M_{z0} = 0$, то заряд либо совершает плоское движение ($\dot{\varphi} = 0$), либо движется вдоль полярной оси ($\dot{\theta} = 0$).

Рассмотрим различные частные случаи.

Пусть, например, $E_0 < 0$, тогда $\alpha_1 < 0$ (см. (7)) и имеют место неравенства (см. (10))

$$0 \leq r^2 \leq r_{\max}^2 = \frac{|\alpha_1|}{2m|E_0|},$$

т. е. траектория финитна. Если при этом $M_{z0} = 0$, а $\theta_0 \neq 0$, то из (11) вытекает, что заряд будет двигаться в секторе меридиональной плоскости с углом раствора $2\theta_{\max}$, где

$$\theta_{\max} = \arccos \frac{|\alpha_1|}{2m|e|a}.$$

Если же $M_{z0} \neq 0$, то траектория заряда будет расположена между двумя конусами; соответственно θ будет изменяться в пределах

$$0 < \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$$

(θ_{\min} и θ_{\max} определяются из уравнения (11)). В рассматриваемом случае полной отрицательной энергии время движения заряда от $r = r_{\max}$ до $r = 0$ равно $\frac{|\alpha_1|^{1/2}}{2|E_0|}$ (см. (5)).

Пусть $E_0=0$ и $\alpha_1=0$, тогда из интеграла (7) вытекает, что $p_r^2=0$; следовательно, заряд движется по сфере конечного радиуса $r=r_0$ ($p_r=mr=0$). Если при этом $M_{z_0}=0$, то из неравенства (11) видно, что θ изменяется от 0 до $\pi/2$, т. е. заряд описывает полукруг в некоторой меридиональной плоскости. Если же $M_{z_0}\neq 0$, то движение заряда будет аналогично соответствующему движению сферического маятника.

Отметим специальный подбор начальных условий, при котором заряд совершает равномерное движение по окружности, перпендикулярной полярной оси, что соответствует тому случаю движения сферического маятника, когда $E_0=(U_{\text{eff}})_{\text{min}}$ (см. пример 5.9). Используя связь констант (6) и условие (5) примера 5.9, найдем соотношение

$$\frac{\cos \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{m |e| a}{M_{z_0}^2};$$

с другой стороны, согласно (10)

$$\frac{M_{z_0}^2}{\sin^2 \theta} = 2m |e| a \cos \theta.$$

Таким образом, получим

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{3}, \quad M_{z_0}^2 = \frac{4}{3\sqrt{3}} m |e| a,$$

причем из последнего выражения нетрудно найти

$$\dot{\varphi}_0 = 3^{1/4} \sqrt{\frac{|e| a}{m} \frac{1}{r_0^2}}.$$

Из этих результатов видно, что все круговые траектории лежат на одном и том же конусе, раствор которого не зависит ни от заряда и его массы, ни от момента диполя, а момент импульса заряда относительно оси диполя не зависит от расстояния заряда до диполя.

В случае $E_0=0$, а $\alpha_1 < 0$ движение инфинитно и будет происходить между конусами, растворы которых определяются соотношением (11), при этом r^2 будет линейно зависеть от времени.

В случае $E_0 > 0$ движение инфинитно как при $\alpha_1 < 0$, так и при $\alpha_1 > 0$, причем если $\alpha_1 > 0$, то

$$r^2 \geq r_{\text{min}}^2 = \frac{\alpha_1}{2mE_0},$$

т. е. заряд не может упасть на диполь.

Пример 9.5. *Обобщенно консервативная система с одной степенью свободы.*

Рассмотрим задачу о точке, движущейся по гладкому вращающемуся стержню (см. пример 5.10), и ее решение методом Гамильтона — Якоби.

По известной функции Лагранжа определим гамильтониан точки

$$H = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta_0 + mgr \cos \theta_0$$

(здесь $p_r = mr \dot{r}$), а затем получим уравнение Гамильтона — Якоби (см. (9.86))

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{m\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta_0 + mgr \cos \theta_0 = 0.$$

Так как функция H явно от времени не зависит и, следовательно, обобщенная энергия сохраняется ($H = H_0$), то полный интеграл этого уравнения имеет вид (см. (9.87))

$$S = -H_0 t + W(r; H_0),$$

а «укороченное» действие W подчиняется уравнению (см. (9.88))

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 - \frac{m\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta_0 + mgr \cos \theta_0 = H_0.$$

Достаточно привести решение этого обыкновенного дифференциального уравнения в квадратуре

$$W = \pm \int (2mH_0 - 2m^2gr \cos \theta_0 + m^2\omega^2 r^2 \sin^2 \theta_0)^{1/2} dr,$$

чтобы, используя теорему Якоби в форме (9.91), получить импульс p_r как функцию положения точки:

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial r} = \pm (2mH_0 - 2m^2gr \cos \theta_0 + m^2\omega^2 r^2 \sin^2 \theta_0)^{1/2},$$

и закон движения точки в форме

$$t + \beta = \frac{\partial W}{\partial H_0} = \pm \int \frac{m dr}{(2mH_0 - 2m^2gr \cos \theta_0 + m^2\omega^2 r^2 \sin^2 \theta_0)^{1/2}}.$$

Вид этого закона будет несколько различным в зависимости от знака величины

$$\Delta = 8m^3\omega^2 \sin^2 \theta_0 \left(H_0 - \frac{m}{2} \frac{g^2 \cos^2 \theta_0}{\omega^2 \sin^2 \theta_0} \right),$$

который в свою очередь зависит от соотношения постоянных H_0 и $(U_{\text{eff}})_{\text{max}}$ (см. пример 5.10 и рис. 5.9).

§ 9.6. Движение материальной точки и волновой процесс

В § 9.4 (см. 407) обращалось внимание на весьма интересную аналогию, которую можно провести между механикой точки и теорией волнового процесса. Проанализируем эту аналогию на примере свободной материальной точки, движущейся в стационарном потенциальном поле $U(\mathbf{r})$, и монохроматической волны, распространяющейся в оптически неоднородной среде. Движение точки подчиняется уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + U(\mathbf{r}) = 0, \quad (9.104)$$

где S — функция \mathbf{r} и t . Так как функция Гамильтона H в рассматриваемом случае сохраняет постоянное значение, равное полной энергии E_0 , то решение для S следует искать в виде (см. (9.87))

$$S = -E_0 t + W(\mathbf{r}). \quad (9.105)$$

Подставляя (9.105) в (9.104), получим уравнение для «укороченного» действия

$$(\nabla W)^2 = 2m [E_0 - U(\mathbf{r})]. \quad (9.106)$$

Заметим, что поверхности $W = \text{const}$ стационарны, поскольку W не зависит явно от времени, а поверхности равного действия

$$S = -E_0 t + W(\mathbf{r}) = \text{const} \quad (9.107)$$

движутся, причем в любой момент времени любая поверхность равного действия S совпадает с некоторой поверхностью «укороченного» действия. Например, поверхность $S = C$ в момент времени t совпадает с поверхностью $W = C_1$, если параметр семейства этих поверхностей C_1 равен $C + E_0 t$ (рис. 9.3). Поверхность $S = C$ в момент $t + dt$ будет совпадать с другой поверхностью $W = C_1 + E_0 dt$.

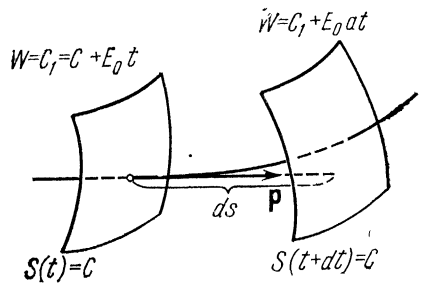


Рис. 9.3

Можно найти выражение для скорости u , с которой движется поверхность равного действия. В данной точке поверхности $S = C$

эта скорость равна $\frac{ds}{dt}$, где ds — расстояние, которое поверхность проходит за время dt в направлении, перпендикулярном к самой себе в рассматриваемой точке. Кроме того, изменение dW при передвижении поверхности $S=C$ за время dt равно $E_0 dt$. С другой стороны, как известно, $dW = |\nabla W| ds$. Следовательно (см. также (9.106)),

$$u = \frac{E_0}{|\nabla W|} = \frac{E_0}{\sqrt{2mT}} = \frac{E_0}{mv}, \quad (9.108)$$

где v — модуль скорости материальной точки (следует иметь в виду, что скорость u определена лишь с точностью до произвольной постоянной).

Одновременно с движением поверхности равного действия S материальная точка движется по траектории, перпендикулярной как к поверхности S , так и к поверхности W , поскольку импульс \mathbf{p} точки, согласно (9.89) и (9.91, а), равен

$$\mathbf{p} = \nabla S = \nabla W. \quad (9.109)$$

Вид траектории точки определяется уравнением (9.106), которое с формальной точки зрения совпадает с известным в геометрической оптике уравнением эйконала

$$(\nabla l)^2 = n^2(\mathbf{r}), \quad (9.110)$$

где l — так называемый эйконал, n — показатель преломления, равный отношению скорости света c в вакууме к скорости света в данной среде, а \mathbf{r} — радиус-вектор точки пространства.

Уравнение эйконала может быть получено из волнового уравнения

$$\nabla^2 \varphi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (9.111)$$

где φ является любой из компонент напряженности электрического или магнитного поля. Если считать n постоянным, то одним из решений уравнения (9.111) будет функция

$$\varphi = ae^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (9.112)$$

где a — постоянная амплитуда, ω — заданная частота, а \mathbf{k} — волновой вектор, направленный по лучу, т. е. по нормали к волновой поверхности (по величине $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c}$, где λ — длина волны).

Если же n является медленно меняющейся функцией \mathbf{r} , то решение уравнения (9.111) естественно искать в виде

$$\varphi = a(\mathbf{r}) e^{i[k_0 l(\mathbf{r}) - \omega t]}, \quad (9.113)$$

где $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$ — волновое число в вакууме, а l — эйконал.

Подставляя (9.113) в (9.111) и приравнивая действительную и мнимую части полученного выражения нулю, приходим к уравнениям для амплитуды a и эйконала l

$$\nabla^2 a + a k_0^2 [n^2 - (\nabla l)^2] = 0, \quad (9.114)$$

$$a \nabla^2 l + 2(\nabla a)(\nabla l) = 0. \quad (9.115)$$

Используя предположение о том, что изменением показателя преломления n на расстояниях порядка длины волны можно пренебречь (это предположение эквивалентно тому, что длина волны исчезающе мала по сравнению с линейным размером неоднородности среды), совершим в уравнении (9.114) предельный переход

$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \rightarrow \infty$. Тогда получим основное уравнение геометрической оптики (9.110)*. В этом предельном случае поверхности

$$k_0 l(\mathbf{r}) - \omega t = \text{const} \quad (9.116)$$

являются поверхностями равной фазы и определяют фронт волны, а световые лучи ортогональны к фронту волны и направлены по волновому вектору \mathbf{k} , равному

$$\mathbf{k} = k \frac{\nabla l}{|\nabla l|} = k_0 \nabla l, \quad (9.117)$$

поскольку из предыдущего ясно, что $k = nk_0$, а $n = |\nabla l|$. Сопоставляя (9.107) и (9.116), (9.109) и (9.117), (9.106) и (9.110), приходим к аналогии между величинами:

$$\begin{aligned} S &\sim k_0 l - \omega t, & W &\sim k_0 l, & E_0 &\sim \omega, \\ \mathbf{p} &\sim \mathbf{k}, & 2m(E_0 - U) &\sim n^2. \end{aligned} \quad (9.118)$$

Итак, аналогом фронта волны является поверхность равного действия; роль эйконала играет «укороченное» действие W ; волновой вектор можно сопоставить импульсу точки; роль лучей играют

* При этом в (9.114) следует пренебречь первым членом, что приводит к требованию $\nabla^2 a \ll a(4\pi^2/\lambda_0^2)$, характеризующему достаточно малое изменение амплитуды на расстоянии порядка длины волны. Что касается уравнения (9.115), то оно с точностью до постоянного множителя представляет собой закон сохранения энергии, имеющий место при распространении рассматриваемой волны. В этом нетрудно убедиться, записывая (9.115) в виде $\nabla(a^2 \nabla l) = 0$ и учитывая, что поток энергии в волне направлен по вектору $\mathbf{k} \sim \nabla l$, а величина этого потока пропорциональна a^2 .

траектории точки, а показатель преломления аналогичен величине $[2m(E_0 - U)]^{1/2}$ *

В связи с указанной аналогией возникает вопрос о механическом уравнении, соответствующем волновому уравнению не только в области коротких волн, а и в области длинных волн, т. е. вопрос, на который отвечает квантовая механика.

Пример 9.6. Движение точки в однородном поле тяжести и распространение светового луча.

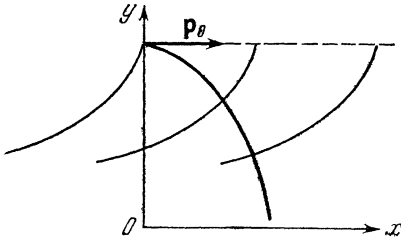


Рис. 9.4

Точка массы m движется в поле тяжести с напряженностью g . Найти показатель преломления такой оптической среды, в которой луч света будет двигаться по кривым, совпадающим с траекторией материальной точки в поле тяжести.

Совмещая плоскость Oxy с плоскостью движения точки и направляя оси Ox и Oy соответственно по горизонтали и верти-

кали (рис. 9.4), найдем функцию Гамильтона точки

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + mgy.$$

Следовательно, решение уравнения Гамильтона — Якоби

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + 2m^2 gy = 2mE_0 \quad (1)$$

нужно искать в виде

$$W = \alpha x + W_y(y). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), найдем полный интеграл

$$W = \alpha x - \frac{1}{3g} \sqrt{\frac{8}{m}} \left(E_0 - \frac{\alpha^2}{2m} - mgy \right)^{3/2},$$

а затем интересующий нас геометрический интеграл (см. (9.91, б))

$$\beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = x + \frac{\alpha}{g} \sqrt{\frac{2}{m^3}} \left(E_0 - \frac{\alpha^2}{2m} - mgy \right)^{1/2}.$$

* Для системы точек можно указать на ту же аналогию, однако она будет иметь место уже не в трехмерном пространстве, а в s -мерном пространстве конфигураций.

Отсюда, используя начальные условия, получим уравнение семейства траекторий точки (парабол)

$$y = y_0 + \frac{p_{y0}^2}{2m^2g} - \frac{m^2g}{2p_{x0}^2}(x - \beta)^2, \quad (3)$$

а приравнявая W постоянной C , найдем уравнение семейства ортогональных к траекториям кривых (полукубических парабол)

$$\frac{p_{y0}^2}{2m} + mg(y_0 - y) = \frac{(9mg^2)^{1/3}}{2}(C - p_{x0}x)^{2/3}. \quad (4)$$

Полагая в (3) и (4) для простоты $x_0=0$, $p_{y0}=0$, придем к функциям

$$y = y_0 - \frac{m^2g}{2p_{x0}^2}x^2,$$

$$y = y_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{m^2g}\right)^{1/3}(C - p_{x0}x)^{2/3},$$

графики которых изображены на рис. 9.4 (график кривой $W=C$ при различных значениях C может быть получен сдвигом вдоль оси Ox полукубической параболы, соответствующей, например, значению $C=0$).

Подбирая показатель преломления оптической среды в соответствии с уравнением (1) (см. (9.118)):

$$n \sim \sqrt{p_{x0}^2 + 2m^2g(y_0 - y)},$$

придем к выводу, что луч света в такой среде будет двигаться по параболе, а фронт волны последовательно совпадать с поверхностями семейства полукубических парабол.

§ 9.7. Интегральный инвариант Пуанкаре — Картана

Как неоднократно отмечалось, важную роль в теоретической механике играют общие теоремы о сохранении и инвариантности различных величин. Большое значение имеет инвариант Пуанкаре — Картана.

Чтобы убедиться в существовании этого инварианта, воспользуемся так называемой полной вариацией действия $S(q, t, q_0, t_0)$, когда варьируются не только начальное и конечное положения системы, но и начальный и конечный моменты времени. Используя определение

$$S = \int_{t_0}^t \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt,$$

для полной вариации действия найдем выражение (ср. с (9.61))

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} dt + \mathcal{L}_1 \delta t_1 - \mathcal{L}_0 \delta t_0, \quad (9.119)$$

где \mathcal{L}_1 — значение функции \mathcal{L} в момент t_1 , \mathcal{L}_0 — значение \mathcal{L} в момент t_0 , а δt_1 и δt_0 — вариации конечного и начального моментов времени. Повторяя вычисления, приведенные на с. 400—401, и

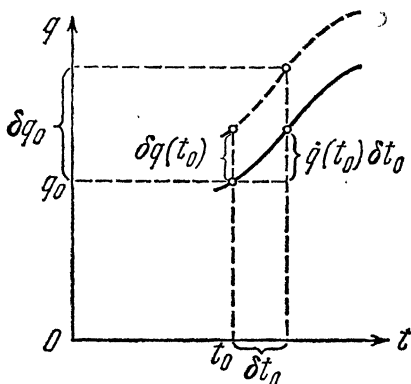


Рис. 9.5

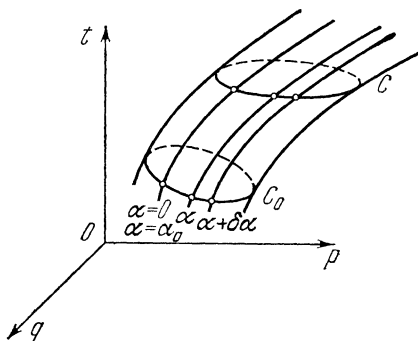


Рис. 9.6

учитывая, что между измененными положениями система движется по действительным траекториям в соответствии с уравнениями Гамильтона или уравнениями Лагранжа (см. (9.15), (9.14)), вместо (9.66) получим полную вариацию

$$\delta S = \sum_{j=1}^s p_{j1} \delta q_j(t_1) - \sum_{j=1}^s p_{j0} \delta q_j(t_0) + \mathcal{L}_1 \delta t_1 - \mathcal{L}_0 \delta t_0; \quad (9.120)$$

здесь p_{j1} и p_{j0} — импульсы в моменты времени t_1 и t_0 соответственно, а $\delta q_j(t_1)$ и $\delta q_j(t_0)$ являются вариациями функций $q_j(t)$ в моменты времени t_1 и t_0 (еще раз подчеркнем, что эти вариации связаны только с изменением вида функций $q_j(t)$ и в отличие от полных вариаций берутся при фиксированном времени t).

Найдем соотношения между вариациями функций $\delta q_j(t_0)$, $\delta q_j(t_1)$ и вариациями начального и конечного положений δq_{j0} и δq_{j1} , причем для простоты ограничимся случаем системы с одной степенью свободы (см. рис. 9.5, на котором изображены две «траектории» системы в пространстве q, t ; одна из этих «траекторий» проходит через «точку» q_0, t_0 , а вторая — через $q_0 + \delta q_0, t_0 + \delta t_0$). Нетрудно видеть, что вариация начального положения

δq_0 с точностью до бесконечно малых высшего порядка складывается из вариации $\delta q(t)$, взятой в момент времени t_0 , и члена $\dot{q}(t_0)\delta t_0$, т. е.

$$\delta q_0 = \delta q(t_0) + \dot{q}(t_0)\delta t_0; \quad (9.121)$$

аналогично вариация конечного положения равна

$$\delta q_1 = \delta q(t_1) + \dot{q}(t_1)\delta t_1 \quad (9.122)$$

(из выражений (9.121) и (9.122) следует, что *полное варьирование, связанное с изменением как вида функции, так и ее аргумента, не коммутативно с операцией дифференцирования по времени*). Наконец, используя определение функции Гамильтона (9.1), а также соотношения (9.121) и (9.122) для каждой координаты q_j , из (9.120) найдем *полную вариацию действия*

$$\delta S = \sum_{j=1}^s p_{j1}\delta q_{j1} - H_1\delta t_1 - \sum_{j=1}^s p_{j0}\delta q_{j0} + H_0\delta t_0, \quad (9.123)$$

где H_1 и H_0 — значения гамильтониана H в моменты времени t_1 и t_0 соответственно.

Теперь введем понятие о «расширенном» фазовом пространстве, по координатным осям которого «откладываются» величины q , p , t , и выберем *ансамбль механических систем с начальными состояниями q_0 , p_0 и t_0 , образующими в указанном пространстве некоторый замкнутый контур C_0* ; этот контур зададим с помощью функций

$$q_{j0} = q_{j0}(\alpha), \quad p_{j0} = p_{j0}(\alpha), \quad t_0 = t_0(\alpha) \quad (j = 1, \dots, s; \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_0), \quad (9.124)$$

где значениям $\alpha=0$ и $\alpha=\alpha_0$ соответствует одна и та же «точка» контура C_0 (см. рис. 9.6, выполненный для случая $s=1$). Через каждую «точку» контура C_0 проходит единственная действительная «траектория» системы, а совокупность этих «траекторий» образует «трубку». Каждой образующей этой трубки соответствует определенное значение α (только одной образующей соответствуют значения $\alpha=0$ и $\alpha=\alpha_0$). Выберем на данной трубке замкнутый контур C_1 так, чтобы каждая образующая трубки проходила только через одну точку контура C_1 ; контур C_1 также можно задать с помощью функций

$$q_{j1} = q_{j1}(\alpha), \quad p_{j1} = p_{j1}(\alpha), \quad t_1 = t_1(\alpha) \\ (j = 1, \dots, s; \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_0). \quad (9.125)$$

Вычислим действие S на фазовой траектории, которая проходит через соответствующие определенному значению парамет-

ра α точки контуров C_0 и C_1 . Ввиду (9.124) и (9.125) это значение действия зависит от параметра α :

$$S(\alpha) = \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \mathcal{L} dt.$$

Интегрируя полную вариацию функции $S(\alpha)$, найдем

$$\int_0^{\alpha_0} \delta S(\alpha) = S(\alpha_0) - S(0) = 0, \quad (9.126)$$

поскольку $S(\alpha_0) = S(0)$. Используя (9.123), равенство (9.126) можно записать в виде

$$\oint_{C_1} \left[\sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - H \delta t \right] = \oint_{C_0} \left[\sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - H \delta t \right], \quad (9.127)$$

где в подынтегральные выражения подставлены функции (9.125) и (9.124) соответственно, а контурными интегралами обозначены интегралы по переменной α в пределах от 0 до α_0 .

Подчеркнем, что при выводе свойства (9.127) было использовано выражение вариации δS , справедливое для систем, движение которых подчинено уравнениям (9.14) или (9.15). Поэтому можно утверждать, что для механической системы с обобщенно-потенциальными силами и голономными идеальными связями величина интеграла

$$I = \oint \left\{ \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - H \delta t \right\} \quad (9.128)$$

не зависит от выбора замкнутого контура, охватывающего данную трубку фазовых действительных траекторий в $2s+1$ -мерном пространстве (q, p, t) (лишь бы каждая фазовая траектория данной трубки проходила только через одну точку контура). Интеграл (9.128) называется интегральным инвариантом Пуанкаре — Картана (или основным интегральным инвариантом механики) (см. [12], гл. I; [23], гл. III).

Справедливо и обратное утверждение: пусть движение системы подчиняется уравнениям вида

$$\dot{q}_j = \Phi_j(q, p, t), \quad \dot{p}_j = \Psi_j(q, p, t) \quad (j = 1, \dots, s) \quad (9.129)$$

(в этом случае движение однозначно определяется по начальным условиям), а интеграл Пуанкаре — Картана является инвариантом относительно выбора замкнутого контура, охватывающего любую данную трубку действительных фазовых траекторий в пространст-

ве (q, p, t) ; тогда уравнения (9.129) будут каноническими уравнениями Гамильтона с функцией H , входящей в интеграл Пуанкаре — Картана.

С помощью дополнительного к системе (9.129) уравнения

$$\frac{dt}{d\mu} = \gamma \quad (9.130)$$

(здесь γ — произвольная функция от q, p и t), введем вспомогательный параметр μ . Проинтегрировав систему уравнений (9.129) и (9.130), найдем ее общее решение

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(\mu, q_0, p_0, t_0), \\ p_j &= p_j(\mu, q_0, p_0, t_0), \\ t &= t(\mu, q_0, p_0, t_0) \quad (j = 1, \dots, s). \end{aligned} \quad (9.131)$$

Выберем из этого общего решения только те частные решения, которые соответствуют фазовым траекториям, проходящим через точки данного (произвольно выбранного) контура C_0 . Задавая контур C_0 уравнениями (9.124) и подставляя (9.124) в (9.131), найдем уравнения действительных траекторий, проходящих через точки контура C_0 :

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(\mu, \alpha), \quad p_j = p_j(\mu, \alpha), \quad t = t(\mu, \alpha) \\ (j &= 1, \dots, s; \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_0). \end{aligned} \quad (9.132)$$

Здесь определенному значению α соответствует определенная фазовая траектория (значениям $\alpha=0$ и $\alpha=\alpha_0$ соответствует одна траектория), а определенному значению μ соответствует определенная точка каждой траектории и замкнутый контур, составленный из таких точек.

Подставляя (9.132) в интеграл (9.128), запишем условие инвариантности этого интеграла в виде

$$dI = \oint_{C_0} \left[\sum_{j=1}^s dp_j \cdot \delta q_j + \sum_{j=1}^s p_j \delta dq_j - dH \cdot \delta t - H \delta dt \right] = 0, \quad (9.133)$$

где символом d обозначено бесконечно малое приращение, связанное с изменением μ , а символом δ — приращение, связанное с изменением α . Поскольку параметры μ и α независимы, то операции d и δ коммутативны. Используя это свойство, из (9.133) получим

$$\oint_{C_0} \left\{ \sum_{j=1}^s dp_j \cdot \delta q_j + \sum_{j=1}^s p_j \delta dq_j - dH \cdot \delta t - H \delta dt \right\} = 0. \quad (9.134)$$

Учитывая, что интеграл по замкнутому контуру C_0 является интегралом по α в пределах от 0 до α_0 , а значения подинтегральной функции при $\alpha=0$ и $\alpha=\alpha_0$ совпадают, найдем, что

$$\oint_{C_0} H \delta dt + \oint_{C_0} \delta H dt = \oint_{C_0} \delta (H dt) = H dt \Big|_0^{\alpha_0} = 0, \quad (9.135)$$

и, следовательно,

$$\oint_{C_0} H \delta dt = - \oint_{C_0} \delta H dt. \quad (9.136)$$

Аналогично получим

$$\oint_{C_0} \sum_{j=1}^s p_j \delta dq_j = - \oint_{C_0} \sum_{j=1}^s dq_j \delta p_j. \quad (9.137)$$

Подставляя (9.136) и (9.137) в (9.134), найдем

$$\oint_{C_0} \left\{ \sum_{j=1}^s dp_j \delta q_j - \sum_{j=1}^s dq_j \delta p_j - dH \delta t + \delta H dt \right\} = 0, \quad (9.138)$$

а отсюда, используя вариацию δH , получим

$$\begin{aligned} \oint_{C_0} \sum_{j=1}^s \left(dp_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dt \right) \delta q_j + \oint_{C_0} \sum_{j=1}^s \left(-dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dt \right) \delta p_j + \\ + \oint_{C_0} \left(-dH + \frac{\partial H}{\partial t} dt \right) \delta t = 0 \end{aligned} \quad (9.139)$$

(следует иметь в виду, что от α зависят все аргументы функции H , см. (9.132)). Это условие инвариантности интеграла Пуанкаре — Картана с учетом (9.129) и (9.130) принимает форму

$$\begin{aligned} \oint_{C_0} \gamma \left\{ \sum_{j=1}^s \left(\Psi_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j + \sum_{j=1}^s \left(-\Phi_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j + \right. \\ \left. + \left(-\frac{dH}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt \right\} = 0. \end{aligned} \quad (9.140)$$

Ввиду произвольности функции γ , т. е. произвольности контура, охватывающего данную трубку действительных траекторий, подинтегральное выражение в (9.140) должно равняться нулю, а ввиду произвольного выбора этих трубок (см. (9.132)) коэффициенты при всех δq_j , δp_j и δt также должны быть равны нулю, т. е.

$$\Phi_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \Psi_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, s), \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (9.141)$$

и, следовательно, уравнения (9.129) будут каноническими уравнениями Гамильтона.

Таким образом, инвариантность интеграла Пуанкаре — Картана является необходимым и достаточным условием того, чтобы механическая система подчинялась каноническим уравнениям Гамильтона (9.15), т. е. была гамильтоновой системой.

Если в равенстве (9.127) интегрирование произвести по контурам C_{t_1} и C_{t_2} все точки которых будут представлять состояния системы в фиксированные моменты времени t_1 и t_2 соответственно, то вместо (9.127) получим

$$\oint_{C_{t_1}} \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j = \oint_{C_{t_2}} \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j; \quad (9.142)$$

контур C_{t_1} и C_{t_2} можно задать с помощью функций (9.125) и (9.124) с фиксированными t_1 и t_2 . Интеграл

$$I_1 = \oint_{C_t} \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j, \quad (9.143)$$

взятый по контуру C_t , точки которого представляют собой различные состояния системы в один и тот же момент времени t , называется интегралом Пуанкаре. Утверждение (9.142) удобнее интерпретировать в $2s$ -мерном фазовом пространстве (q, p) , в котором «точки» данного контура C_{t_0} через интервал времени $t_1 - t_0$ занимают соответствующее положение на контуре C_{t_1} . На основании (9.142) можно утверждать, что для механической системы с обобщенно-потенциальными силами и голономными идеальными связями значение интеграла Пуанкаре, взятого по произвольному замкнутому контуру в пространстве (q, p) , с течением времени сохраняется.

Интеграл Пуанкаре является, как говорят, универсальным инвариантом, поскольку в вышеуказанном смысле он сохраняет постоянное значение для любой гамильтоновой системы.

В заключение рассмотрим важную теорему об единственности интегрального инварианта Пуанкаре, согласно которой любой универсальный интегральный инвариант вида

$$I' = \oint \sum_{i=1}^s [A_i(q, p, t) \delta q_i + B_i(q, p, t) \delta p_i]$$

отличается от интеграла Пуанкаре лишь постоянным множителем*. Полагая для простоты $s=1$, запишем условие сохранения I' в виде

$$\frac{dI'}{dt} = \frac{d}{dt} \oint [A(q, p, t) \delta q + B(q, p, t) \delta p] = 0. \quad (9.144)$$

Здесь в подынтегральное выражение вместо q и p следует подставить решение канонических уравнений (9.15)

$$q = q(q_0, p_0, t), \quad p = p(q_0, p_0, t), \quad (9.145)$$

куда, в свою очередь, вместо начальных условий q_0 и p_0 нужно подставить функции, определяющие произвольный замкнутый контур C_{t_0} в момент времени t_0 , т. е. функции

$$q_0 = q_0(\alpha), \quad p_0 = p_0(\alpha), \quad (9.146)$$

где параметр α изменяется в пределах $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, а его значениям $\alpha=0$ и $\alpha=\alpha_0$ соответствует одна и та же точка контура C_{t_0} .

Заменяя порядок дифференцирования по времени и интегрирования по α , а также порядок дифференцирования по t и α , из (9.144) получим

$$\oint \left[\frac{dA}{dt} \delta q + A \delta \frac{dq}{dt} + \frac{dB}{dt} \delta p + B \delta \frac{dp}{dt} \right] = 0. \quad (9.147)$$

Интегрируя здесь по частям второй и четвертый члены, найдем

$$\oint \left[\frac{dA}{dt} \delta q - \delta A \frac{dq}{dt} + \frac{dB}{dt} \delta p - \delta B \frac{dp}{dt} \right] = 0. \quad (9.148)$$

Наконец, используя выражения полных производных и вариаций от A и B как функций q , p и t , получим условие сохранения I' в виде

$$\oint \left[\left(Z\dot{p} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) \delta q + \left(-Z\dot{q} + \frac{\partial B}{\partial t} \right) \delta p \right] = 0, \quad (9.149)$$

где

$$Z = \frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q}. \quad (9.150)$$

Поскольку контур интегрирования в (9.149) произволен, то подынтегральное выражение должно быть полным дифференциалом относительно переменных q и p , т. е.

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(Z\dot{p} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left(-Z\dot{q} + \frac{\partial B}{\partial t} \right).$$

* Теорема об единственности всех универсальных инвариантов в пространстве (q, p) доказана в работе Hwa—Chung Lee, см. Proc. Roy. Soc., Edinburgh, ser. A, v. LXII, 1947, p. 237—247.

Отсюда, используя уравнения Гамильтона (9.15), найдем

$$-\frac{\partial Z}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial Z}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial Z}{\partial t} = 0. \quad (9.151)$$

Это требование ввиду универсальности исходного инварианта должно удовлетворяться при любом H . Поэтому все частные производные функции Z будут равны нулю, а сама функция будет равна постоянной: $Z=c$. Таким образом,

$$\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q} = c \quad \text{или} \quad \frac{\partial(A - cp)}{\partial p} = \frac{\partial B}{\partial q}.$$

Из этого условия вытекает существование такой функции $\Phi(q, p, t)$, вариация которой равна

$$\delta\Phi = (A - cp) \delta q + B \delta p. \quad (9.152)$$

Интегрируя обе части этого равенства по замкнутому контуру, окончательно найдем, что исходный инвариант равен

$$I' = cI_1, \quad (9.153)$$

где I_1 — инвариант Пуанкаре.

§ 9.8. Канонические преобразования

Каноническими преобразованиями называются такие преобразования канонических переменных, которые не изменяют общей формы уравнений

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

для любой гамильтоновой системы. Эти преобразования дают возможность свести задачу о движении системы с данным гамильтонианом к задаче о системе с более простым гамильтонианом, в связи с чем метод канонических преобразований имеет большое значение. Итак, преобразование

$$\begin{aligned} Q_j &= Q_j(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t), \\ \mathcal{P}_j &= \mathcal{P}_j(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) \\ &\quad (j = 1, \dots, s), \end{aligned} \quad (9.154)$$

$$\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s; \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s; p_1, \dots, p_s)} \neq 0$$

называется каноническим, если оно преобразует уравнения Гамильтона с любой функцией H

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, s) \quad (9.155)$$

также в канонические уравнения с другой, вообще говоря, функцией Гамильтона:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_j}, \quad \dot{\mathcal{P}}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_j} \quad (j = 1, \dots, s). \quad (9.156)$$

Найдем условие каноничности преобразования (9.154). Из определения канонических преобразований следует, что как в «старых» переменных q, p , так и в «новых» переменных Q, \mathcal{P} уравнения движения должны иметь каноническую форму. Следовательно, и в «старых», и в «новых» переменных должны выполняться условия инвариантности интеграла Пуанкаре — Картана (9.127)

$$\oint_{\tilde{C}_1} \left(\sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - H \delta t \right) = \oint_{\tilde{C}_0} \left[\sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - H \delta t \right],$$

$$\oint_{\tilde{C}_1} \left[\sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j \delta Q_j - \mathcal{H} \delta t \right] = \oint_{\tilde{C}_0} \left[\sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j \delta Q_j - \mathcal{H} \delta t \right], \quad (9.157)$$

где согласно (9.154) контуры C_1 и C_0 преобразуются в контуры \tilde{C}_1 и \tilde{C}_0 соответственно. Пользуясь произвольностью контура C_0 , составим его из фазовых точек расширенного пространства (q, p, t) , соответствующих «одновременному состоянию» $t=t_0$. Тогда контур \tilde{C}_0 будет состоять из «точек» пространства (Q, \mathcal{P}, t) , для которых также $t=t_0$, поскольку канонические преобразования не преобразуют время t . При таком выборе контура C_0 вместо (9.157) получим

$$\oint_{\tilde{C}_1} \left[\sum_j p_j \delta q_j - H \delta t \right] = \oint_{\tilde{C}_{t_0}} \sum_j p_j \delta q_j,$$

$$\oint_{\tilde{C}_1} \left[\sum_j \mathcal{P}_j \delta Q_j - \mathcal{H} \delta t \right] = \oint_{\tilde{C}_{t_0}} \sum_j \mathcal{P}_j \delta Q_j. \quad (9.158)$$

Учитывая, что интеграл $\oint_{\tilde{C}_{t_0}} \sum_j \mathcal{P}_j \delta Q_j$, преобразованный к «старым» переменным, согласно теореме об единственности интегрального инварианта Пуанкаре (см. (9.153)), равен

$$\oint_{\tilde{C}_{t_0}} \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j \delta Q_j \Big|_{\mathcal{P}^{(q,p,t)}}^{Q^{(q,p,t)}} = c \oint_{\tilde{C}_{t_0}} \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j, \quad (9.159)$$

из (9.158) найдем

$$\oint_{C_1} \left\{ \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j \delta Q_j - \mathcal{H} \delta t - c \left[\sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - H \delta t \right] \right\} = 0, \quad (9.160)$$

где «новые» переменные должны быть выражены через «старые» с помощью (9.154). Ввиду произвольности контура C_1 подынтегральное выражение в (9.160) будет полным дифференциалом — $\delta\Phi$ некоторой функции $2s+1$ переменных q , p и t , т. е.

$$\left(\sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j \delta Q_j - \mathcal{H} \delta t \right) - c \left(\sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - H \delta t \right) = -\delta\Phi. \quad (9.161)$$

Подчеркнем, что исходные равенства (9.157) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы уравнения движения в переменных q , p и переменных Q , \mathcal{P} были каноническими. Следовательно, *тождественное удовлетворение равенства (9.161) данным преобразованием (9.154) при некоторой функции Φ и постоянной c является необходимым и достаточным условием каноничности этого преобразования.* Иначе говоря, если дано каноническое преобразование, то оно обращает (9.161) в тождество при некоторой функции Φ и постоянной c ; и, наоборот, если дана произвольная функция Φ и постоянная c , то преобразование вида (9.154), обращающее (9.161) в тождество, является каноническим.

В связи с отмеченной ролью функция Φ называется производящей функцией. Эта функция является функцией $2s+1$ независимых переменных, в число которых входит время t и $2s$ координат и импульсов, причем они могут быть выбраны произвольно из $4s$ «старых» и «новых» координат и импульсов, связанных между собой соотношениями (9.154). Например, при выводе условия (9.161) функция Φ считалась функцией q , p и t . Допуская, что

$$\det \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \right) \neq 0, \quad (9.162)$$

и выражая с помощью (9.154) «старые» импульсы через «старые» и «новые» координаты

$$p_j = p_j(q, Q, t) \quad (j = 1, \dots, s), \quad (9.163)$$

представим производящую функцию в виде

$$\Phi(q, p(q, Q, t), t) = \Phi_1(q, Q, t). \quad (9.164)$$

Рассмотрим наиболее распространенный случай канонических преобразований, когда $c=1$, а в качестве аргументов производящей функции взят один из следующих наборов переменных*:

$$q, Q; q, \mathcal{P}; p, Q: p, \mathcal{P}. \quad (9.165)$$

Если аргументами являются «старые» и «новые» координаты, то, записывая основное тождество (9.161) в виде

$$\delta\Phi_1(q, Q, t) = \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j \delta Q_j - (H - \mathcal{H}) \delta t, \quad (9.166)$$

получим формулы, определяющие каноническое преобразование:

$$p_j = \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_j}, \quad \mathcal{P}_j = - \frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_j} \quad (j = 1, \dots, s), \quad (9.167)$$

а также соотношение между «новой» и «старой» функциями Гамильтона

$$\mathcal{H} = H + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}. \quad (9.168)$$

Действительно, записывая (9.167) в виде (см. (9.164))

$$p_j = p_j(q, Q, t), \quad \mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j(q, Q, t) \quad (j = 1, \dots, s) \quad (9.169)$$

и выражая с помощью s первых соотношений «новые» координаты Q через q и p , в результате подстановки $Q(q, p, t)$ в функции $\mathcal{P}(q, Q, t)$ получим все формулы канонического преобразования (9.154). При этом следует иметь в виду, что определение Q как функций q, p и t возможно лишь при отличном от нуля якобиане с элементами

$$\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial Q_i \partial q_j} = - \frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial q_j} \quad (i, j = 1, \dots, s). \quad (9.170)$$

Если в качестве аргументов производящей функции выбрать вторую группу переменных из (9.165), то вместо Φ_1 следует взять производящую функцию

$$\Phi_2(q, \mathcal{P}, t) = \Phi_1 + \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j Q_j \quad (9.171)$$

(преобразование от q, Q к q, \mathcal{P} является преобразованием Лежандра). Тогда условие каноничности (9.166) перейдет в условие

$$\delta\Phi_2(q, \mathcal{P}, t) = \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j + \sum_{j=1}^s Q_j \delta \mathcal{P}_j - (H - \mathcal{H}) \delta t, \quad (9.172)$$

* Подробное изложение теории произвольных канонических преобразований см. в [23, гл. IV].

а формулы, определяющие каноническое преобразование, и соотношение между функциями Гамильтона \mathcal{H} и H примут вид

$$p_j = \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_j}, \quad Q_j = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathcal{P}_j} \quad (j = 1, \dots, s), \quad (9.173)$$

$$\mathcal{H} = H + \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}; \quad (9.174)$$

при этом функция $\Phi_2(q, \mathcal{P}, t)$ должна удовлетворять требованию: якобиан с элементами

$$\frac{\partial p_j}{\partial \mathcal{P}_i} = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \mathcal{P}_i \partial q_j} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \quad (i, j = 1, \dots, s) \quad (9.175)$$

должен отличаться от нуля.

Переход к третьей группе переменных (см. (9.165)), выполняемый с помощью функции

$$\Phi_3(p, Q, t) = \Phi_1 - \sum_{j=1}^s p_j q_j, \quad (9.176)$$

приводит к основному тождеству

$$\delta \Phi_3(p, Q, t) = - \sum_{j=1}^s q_j \delta p_j - \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j \delta Q_j - (H - \mathcal{H}) \delta t, \quad (9.177)$$

а также к формулам канонического преобразования

$$q_j = - \frac{\partial \Phi_3}{\partial p_j}, \quad \mathcal{P}_j = - \frac{\partial \Phi_3}{\partial Q_j} \quad (j = 1, \dots, s) \quad (9.178)$$

и соотношению для функций Гамильтона

$$\mathcal{H} = H + \frac{\partial \Phi_3}{\partial t}; \quad (9.179)$$

при этом якобиан с элементами

$$- \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} = \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial Q_i \partial p_j} = - \frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial p_j} \quad (i, j = 1, \dots, s) \quad (9.180)$$

должен отличаться от нуля. Заметим, что формулы канонического преобразования в переменных q, \mathcal{P} и Q, p по существу эквивалентны, так как наименования «старые» координаты и «новые» импульсы или «новые» координаты и «старые» импульсы относительны.

Наконец, используя производящую функцию

$$\Phi_4(p, \mathcal{P}, t) = \Phi_1 - \sum_{j=1}^s p_j q_j + \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j Q_j, \quad (9.181)$$

получим основное тождество, формулы преобразования и соотношение для функций Гамильтона в виде

$$\delta\Phi_4(p, \mathcal{P}, t) = - \sum_{j=1}^s q_j \delta p_j + \sum_{j=1}^s Q_j \delta \mathcal{P}_j - (H - \mathcal{H}) \delta t; \quad (9.182)$$

$$q_j = - \frac{\partial \Phi_4}{\partial p_j}, \quad Q_j = \frac{\partial \Phi_4}{\partial \mathcal{P}_j} \quad (j = 1, \dots, s), \quad (9.183)$$

$$\mathcal{H} = H + \frac{\partial \Phi_4}{\partial t} \quad (9.184)$$

при условии неравенства нулю якобиана с элементами

$$- \frac{\partial q_j}{\partial \mathcal{P}_i} = \frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial \mathcal{P}_i \partial p_j} = \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \quad (i, j = 1, \dots, s). \quad (9.185)$$

Теперь убедимся, что *якобиан канонического преобразования равен единице*. В самом деле, используя известное свойство якобианов, его можно записать, например, в виде такой дроби:

$$\frac{\partial(Q, \mathcal{P})}{\partial(q, p)} = \frac{\partial(Q, \mathcal{P})}{\partial(q, \mathcal{P})} \bigg/ \frac{\partial(q, p)}{\partial(q, \mathcal{P})}; \quad (9.186)$$

здесь числитель и знаменатель соответственно равны

$$\frac{\partial(Q, \mathcal{P})}{\partial(q, \mathcal{P})} = \left| \begin{array}{cc|ccc} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_s} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Q_s}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial Q_s}{\partial q_s} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial q_s} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \mathcal{P}_s}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \mathcal{P}_s}{\partial q_s} & 0 & \dots & 1 \end{array} \right| = \frac{\partial(Q)}{\partial(q)}, \quad (9.187)$$

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(q, \mathcal{P})} = \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & \frac{\partial q_1}{\partial \mathcal{P}_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial \mathcal{P}_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \frac{\partial q_s}{\partial \mathcal{P}_1} & \dots & \frac{\partial q_s}{\partial \mathcal{P}_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial p_1}{\partial \mathcal{P}_1} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial \mathcal{P}_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial p_s}{\partial \mathcal{P}_1} & \dots & \frac{\partial p_s}{\partial \mathcal{P}_s} \end{array} \right| = \frac{\partial(p)}{\partial(\mathcal{P})}. \quad (9.188)$$

Отсюда, учитывая, что согласно (9.175) последние два якобиана равны между собой, получим (ср. с. (9.34)) *

$$\frac{\partial(Q, \mathcal{P})}{\partial(q, p)} = 1. \quad (9.189)$$

В качестве примера простейшего канонического преобразования приведем тождественное преобразование

$$p_j = \mathcal{P}_j, \quad Q_j = q_j \quad (j = 1, \dots, s), \quad (9.190)$$

определяемое производящей функцией (см. (9.173))

$$\Phi_2 = \sum_{j=1}^s q_j \mathcal{P}_j. \quad (9.19.1)$$

Пример 9.7. Простейшие канонические преобразования.

1. Производящая функция

$$\Phi_1 = \sum_{j=1}^s q_j Q_j$$

определяет (см. (9.167)) преобразование

$$p_j = Q_j, \quad \mathcal{P}_j = -q_j \quad (j = 1, \dots, s),$$

которое по существу эквивалентно переобозначению импульсов из координат.

2. Функция

$$\Phi_2 = - \sum_{j=1}^s q_j \mathcal{P}_j$$

определяет (см. (9.173)) преобразование инверсии в фазовом пространстве

$$Q_j = -q_j, \quad \mathcal{P}_j = -p_j \quad (j = 1, \dots, s).$$

3. Линейное преобразование переменных q, p

$$Q = \alpha q + \beta p,$$

$$\mathcal{P} = \gamma q + \nu p$$

для системы с одной степенью свободы будет каноническим, если постоянные α, β, γ и ν удовлетворяют условию (см. (9.189))

$$\alpha\nu - \beta\gamma = 1.$$

* Аналогично, используя (9.170), (9.180) или (9.185), приходим к такому же результату.

Пользуясь условием каноничности (9.166) в виде

$$\delta\Phi = p\delta q - \mathcal{P}\delta Q,$$

найдем производящую функцию рассматриваемого преобразования. Подставляя сюда исходные функции и учитывая, что якобиан преобразования равен единице, получим

$$\delta\Phi = -\beta\gamma\delta(pq) - \frac{\alpha\gamma}{2}\delta(q^2) - \frac{\beta\nu}{2}\delta(p^2),$$

откуда

$$\Phi = -\beta\gamma pq - \frac{1}{2}\alpha\gamma q^2 - \frac{1}{2}\beta\nu p^2 \quad (\alpha\nu - \beta\gamma = 1).$$

Если $\alpha = \nu$, а $\beta = -\gamma$, то преобразование, условие его каноничности и производящая функция принимают вид

$$Q = \alpha q + \beta p,$$

$$\mathcal{P} = -\beta q + \alpha p, \quad (\alpha^2 + \beta^2 = 1),$$

$$\Phi = \beta^2 pq + \frac{1}{2}\alpha\beta(q^2 - p^2)$$

(например, преобразование этого типа используется при анализе явления сверхпроводимости металлов).

Пример 9.8. Точечные преобразования.

1. Согласно формулам канонических преобразований «новые» координаты, вообще говоря, зависят как от «старых» координат, определяющих положение системы, так и от «старых» импульсов. Поэтому с помощью «новых» координат нельзя задать положения системы, и только совокупность всех «новых» переменных Q и \mathcal{P} определяет положения и скорости точек механической системы. Однако в частном случае канонических преобразований с производящей функцией

$$\Phi_2(q, \mathcal{P}, t) = \sum_{j=1}^s \varphi_j(q, t) \mathcal{P}_j \quad (1)$$

(здесь φ_j — произвольные независимые функции) «новые» координаты будут определять положение системы. Действительно, используя (1) и (9.173), получим точечные преобразования

$$Q_j = \varphi_j(q, t) \quad (j = 1, \dots, s), \quad (2)$$

(см. (5.97)).

2. Если производящая функция имеет вид

$$\Phi_2 = \sum_{i=1}^s \varphi_i \mathcal{P}_i,$$

где $\varphi_i = \sum_{j=1}^s a_{ij} q_j$, а постоянные коэффициенты a_{ij} удовлетворяют условию ортогональности

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} a_{i'j} = \delta_{ii'},$$

то, используя формулы (9.173), найдем

$$p_i = \sum_{i',j} a_{i'j} \delta_{ij} \mathcal{P}_{i'} = \sum_{i'} a_{i'i} \mathcal{P}_{i'}, \quad (1)$$

$$Q_i = \sum_j a_{ij} q_j \quad (i = 1, \dots, s). \quad (2)$$

Умножая каждое из s уравнений (1) на a_{ij} и суммируя результаты по j , получим

$$\sum_j a_{ij} p_j = \sum_{j,i'} a_{ij} a_{i'j} \mathcal{P}_{i'} = \sum_{i'} \delta_{ii'} \mathcal{P}_{i'}.$$

Следовательно, рассматриваемое каноническое преобразование представляет собой совокупность точечного ортогонального преобразования (2) и ортогонального преобразования обобщенных импульсов

$$\mathcal{P}_i = \sum_j a_{ij} p_j \quad (i = 1, \dots, s). \quad (3)$$

3. Преобразование от декартовых координат точки к ее цилиндрическим координатам можно осуществить с помощью производящей функции

$$\Phi_3 = \sum_{i=1}^3 f_i(Q) p_i,$$

которая также приводит к точечным преобразованиям. Положим, что «старые» координаты q_1 , q_2 и q_3 соответственно равны декартовым координатам точки x , y и z , а «новые» координаты Q_1 , Q_2 , Q_3 соответственно равны цилиндрическим координатам точки ρ , φ , z . Тогда, используя функцию

$$\Phi_3 = -\rho x \cos \varphi - \rho y \sin \varphi - p_z \cdot z$$

и (9.178), найдем формулы преобразования координат и обобщенных импульсов

$$\begin{aligned}x &= -\frac{\partial\Phi_3}{\partial p_x} = \rho \cos \varphi, & p_\rho &= -\frac{\partial\Phi_3}{\partial \rho} = p_x \cos \varphi + p_y \sin \varphi, \\y &= -\frac{\partial\Phi_3}{\partial p_y} = \rho \sin \varphi, & p_\varphi &= -\frac{\partial\Phi_3}{\partial \varphi} = -p_x \rho \sin \varphi + p_y \rho \cos \varphi, \\z &= -\frac{\partial\Phi_3}{\partial p_z} = z, & p_z &= -\frac{\partial\Phi_3}{\partial z} = p_z.\end{aligned}\quad (1)$$

Замечая, что производящая функция Φ_3 явно от времени не зависит, и преобразуя с помощью формул (1) «старый» гамильтониан

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z)$$

к новым переменным, получим

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2 \right) + U(\rho, \varphi, z).$$

Используя производящую функцию

$$\Phi_2 = \mathcal{P}_r \sqrt{\rho^2 + z^2} + \mathcal{P}_\theta \arctg \left(\frac{\rho}{z} \right) + \mathcal{P}_\varphi \cdot \varphi,$$

перейдем от цилиндрических координат к сферическим координатам r, θ, φ . Тогда согласно (9.173) найдем

$$\begin{aligned}p_\rho &= \mathcal{P}_r \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \mathcal{P}_\theta \frac{z}{\rho^2 + z^2}, & r &= \sqrt{\rho^2 + z^2}, \\p_\varphi &= \mathcal{P}_\varphi, & \theta &= \arctg \frac{\rho}{z}, \\p_z &= \mathcal{P}_r \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} - \mathcal{P}_\theta \frac{\rho}{\rho^2 + z^2}, & \varphi &= \varphi,\end{aligned}\quad (2)$$

а, учитывая (9.174) и преобразование (2), вместо «старого» гамильтониана получим гамильтониан в сферических переменных

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{2m} \left(\mathcal{P}_r^2 + \frac{\mathcal{P}_\theta^2}{r^2} + \frac{\mathcal{P}_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \varphi).$$

Пример 9.9. *Неизотропный пространственный осциллятор.*

Пусть на точку действует сила, проекции которой на декартовы оси равны

$$F_x = -\kappa_1 x, \quad F_y = -\kappa_2 y, \quad F_z = -\kappa_3 z.$$

Найти общее решение уравнения движения точки методом канонических преобразований.

Запишем гамильтониан рассматриваемого осциллятора в декартовых координатах:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2} (\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2 + \kappa_3 z^2) \quad (1)$$

и совершим каноническое преобразование к «новым» переменным Q, \mathcal{P} с помощью функции

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^3 k_i q_i^2 \operatorname{ctg} Q_i, \quad (2)$$

где k_i — постоянные, которые соответствующим образом подберем ниже, а $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$. Каноническое преобразование будет определяться формулами (9.167)

$$p_i = 2k_i q_i \operatorname{ctg} Q_i, \quad \mathcal{P}_i = \frac{k_i q_i^2}{\sin^2 Q_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3)$$

(здесь символами p_1, p_2, p_3 обозначены проекции импульса p_x, p_y, p_z соответственно).

Записывая (3) в виде

$$q_i = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_i}{k_i}} \sin Q_i, \quad p_i = 2\sqrt{k_i \mathcal{P}_i} \cos Q_i \quad (4)$$

и подставляя (4) в (1), найдем гамильтониан осциллятора в «новых» переменных

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{2k_i}{m} \cos^2 Q_i + \frac{\kappa_i}{2k_i} \sin^2 Q_i \right) \mathcal{P}_i. \quad (5)$$

Полагая здесь $2k_i = \sqrt{\kappa_i m}$, сведем (5) к функции

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathcal{P}_i \quad \left(\omega_i = \sqrt{\frac{\kappa_i}{m}} \right), \quad (6)$$

которая не зависит от координат Q . Составляя уравнения Гамильтона в «новых» переменных (см. (9.156)), получим

$$\dot{Q}_i = \omega_i, \quad \dot{\mathcal{P}}_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (7)$$

откуда найдем решение

$$Q_i = \omega_i t + Q_{i0}, \quad \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_{i0} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (8)$$

Решение в «старых» (декартовых) переменных

$$q_i = \sqrt{\frac{2\mathcal{P}_{i0}}{m\omega_i}} \sin(\omega_i t + Q_{i0}), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (9)$$

$$p_j = \sqrt{2m\omega_j \mathcal{P}_{j0}} \cos(\omega_j t + Q_{j0})$$

можно получить, используя (4) и (8).

§ 9.9. Переменные «действие—угол» и адиабатические инварианты

При исследовании систем, совершающих движения, близкие к периодическим, большую роль играет метод канонических преобразований, с помощью которого можно получить частоты, характеризующие это движение, не отыскивая самого закона движения системы.

Пусть механическая система является обобщенно-консервативной, а хотя бы один набор канонических переменных разделяется, причем либо каждая из соответствующих переменных q_i , p_i является периодической функцией времени с одинаковым периодом, либо каждый импульс p_i является периодической функцией координаты q_i , в то время как сама координата не является периодической функцией времени. Движение первого типа обычно называется либрацией, а второго типа — вращением. Примером либрации могут служить колебания неизотропного осциллятора (см. пример 9.9), а примером вращения — движение математического маятника при достаточно большом значении начальной энергии. В самом деле, получая из интеграла энергии маятника обобщенный импульс

$$p_\theta = \sqrt{2ml^2(E_0 + mgl \cos \theta)}$$

как функцию угла θ отклонения маятника от вертикали, убедимся, что при $E_0 > mgl$ (когда осуществляется вращение маятника) импульс p изменяется периодически, в то время как θ неограниченно растет.

Решение уравнения Гамильтона — Якоби

$$H \left\{ f_1 \left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1} \right), \dots, f_s \left(q_s, \frac{\partial W}{\partial q_s} \right) \right\} = H_0 \quad (9.192)$$

для рассматриваемых систем имеет вид (см. (9.88), (9.96), (9.97))

$$W(q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s) = \sum_{i=1}^s W_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_s). \quad (9.193)$$

Подставляя (9.193) в (9.192), сведем решение задачи к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. (9.101))

$$f_i \left(q_i, \frac{dW_i}{dq_i} \right) = \alpha_i \quad (i = 1, \dots, s); \quad (9.194)$$

Отсюда определяются функции $W_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_s)$, где постоянные α связаны соотношением

$$H(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = H_0. \quad (9.195)$$

Разрешая систему (9.194) относительно производных dW_i/dq_i , найдем каждый импульс p_i как функцию координаты q_i :

$$p_i = \frac{\partial W_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_s)}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, s) \quad (9.196)$$

(по условию эти функции являются периодическими функциями соответствующих координат).

Идея излагаемого метода решения поставленной задачи заключается в применении канонического преобразования от переменных q, p к таким переменным, где роль новых импульсов играют специальным образом выбранные постоянные, являющиеся функциями постоянных α , а «новый» гамильтониан зависит только от «новых» импульсов. *В качестве таких импульсов вводятся величины, равные*

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i \quad (i = 1, \dots, s), \quad (9.197)$$

где интегралы берутся по полным периодам изменения импульсов p_i как функций соответствующих координат q_i . Эти величины называются «переменными действия» и являются независимыми функциями постоянных α .

$$I_i = I_i(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \quad (i = 1, \dots, s), \quad (9.198)$$

что следует из независимости функций (9.196). Если обе соответствующие переменные p_i и q_i являются периодическими функциями времени с одинаковым периодом, переменная действия I_i равна «площади» фигуры, ограниченной проекцией фазовой траектории на плоскость p_i, q_i (эта проекция будет замкнутой кривой). Если же функция $p_i(q_i)$ периодическая, а q_i неограниченно возрастает, то I_i равна «площади» фигуры, ограниченной кривой $p_i(q_i)$, осью q_i и двумя ординатами, соответствующими полному периоду этой функции (см. рис. 9.7 и рис. 9.8, на которых изображены проекции фазовых траекторий неизотропного осциллятора на плоскость (p_x, x) и математического маятника в случае вращения на плоскость (p_θ, θ) соответственно).

Разрешая систему (9.198) относительно α , получим

$$\alpha_i = \alpha_i(I_1, \dots, I_s) \quad (i = 1, \dots, s), \quad (9.199)$$

а подставляя эти функции в полный интеграл (9.193), найдем W как функцию «старых» координат и «новых» импульсов — переменных действия:

$$W = W(q_1, \dots, q_s; I_1, \dots, I_s). \quad (9.200)$$

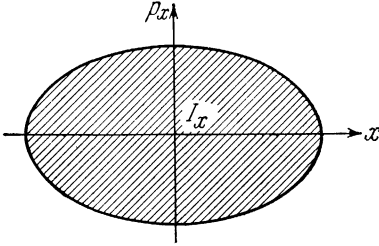


Рис. 9.7

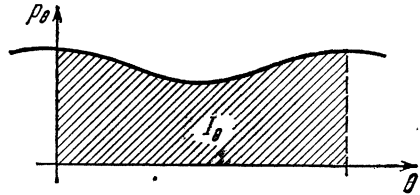


Рис. 9.8

Используя это «укороченное» действие в качестве производящей функции указанного выше канонического преобразования, найдем (см. (9.173))

$$p_i = \frac{\partial W(q, I)}{\partial q_i}, \quad \Phi_i = \frac{\partial W(q, I)}{\partial I_i} \quad (i = 1, \dots, s), \quad (9.201)$$

где величины Φ_i являются «новыми» координатами и называются угловыми переменными. Принимая во внимание, что W явно от времени не зависит, в результате подстановки функций (9.199) в функцию Гамильтона (см. (9.195)) найдем

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(I_1, \dots, I_s). \quad (9.202)$$

Поскольку гамильтониан в переменных «действие — угол» зависит лишь от импульсов, канонические уравнения в новых переменных примут вид

$$\dot{\Phi}_i = \frac{\partial \mathcal{H}(I)}{\partial I_i}, \quad \dot{I}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, s), \quad (9.203)$$

откуда следует, что *угловые переменные являются линейными функциями времени:*

$$\Phi_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_i} t + \Phi_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (9.204)$$

Угловые переменные обладают еще одним важным свойством, заключающимся в том, что величина $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_i}$ является часто-

той изменения импульса p_i . Чтобы убедиться в этом, найдем приращение $\Delta\varphi_i$ за полный период изменения функции $p_j(q_j)$ при условии постоянства всех координат, кроме q_j , т. е. найдем

$$\Delta\varphi_i = \oint \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j} dq_j. \quad (9.205)$$

Представляя это приращение в виде (см. (9.201))

$$\Delta\varphi_i = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial I_i} dq_j \quad (9.206)$$

и учитывая, что переменной интегрирования является координата q_j , получим

$$\Delta\varphi_i = \frac{\partial}{\partial I_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j.$$

Отсюда (см. (9.201) и (9.197)) следует, что приращение угловой переменной равно

$$\Delta\varphi_i = 2\pi \frac{\partial I_j}{\partial I_i} = \begin{cases} 2\pi, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad (9.207)$$

С другой стороны, согласно (9.204) имеем

$$\Delta\varphi_i = \frac{\partial H}{\partial I_i} T_i, \quad (9.208)$$

где T_i — полный период изменения импульса p_i . Сопоставление (9.207) и (9.208) показывает, что частота ω_i изменения импульса p_i действительно равна $\frac{\partial H}{\partial I_i}$.

Итак, для вычисления частот ω_i нужно определить функции

$$p_i = p_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_s),$$

затем найти переменные действия как функции α (см. (9.198)), определить гамильтониан как функцию переменных действия α , наконец, с помощью уравнений (9.203) найти

$$\omega_i = \frac{\partial \mathcal{H}(I_1, \dots, I_s)}{\partial I_i} \quad (i = 1, \dots, s). \quad (9.209)$$

Проиллюстрируем изложенный метод на примере неизотропного осциллятора, для которого уравнение Гамильтона — Якоби в декартовых координатах имеет вид (см. формулу (1) примера 9.9)

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 + m\kappa_1 x^2 + m\kappa_2 y^2 + m\kappa_3 z^2 = 2mH_0.$$

Это уравнение согласно (9.192)—(9.194) сводится к трем уравнениям

$$p_x^2 + m\kappa_1 x^2 = \alpha_1, \quad p_y^2 + m\kappa_2 y^2 = \alpha_2, \quad p_z^2 + m\kappa_3 z^2 = \alpha_3,$$

где $p_x = \frac{dW_1}{dx}$, $p_y = \frac{dW_2}{dy}$, $p_z = \frac{dW_3}{dz}$, а постоянные α связаны с постоянной H_0 соотношением (см. (9.195))

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2mH_0.$$

Переменная действия I_x осциллятора будет равна

$$I_x = \frac{1}{2\pi} \oint p_x dx = \frac{1}{2\pi} 2 \sqrt{m\kappa_1} \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\alpha_1}{2\sqrt{m\kappa_1}}$$

$$\left(a = \sqrt{\frac{\alpha_1}{m\kappa_1}} \right),$$

поскольку p_x совершает полный цикл изменения при изменении x от $-a$ до $+a$ и обратно до $-a$ (величину I_x можно подсчитать как площадь эллипса, по которому движется проекция фазовой точки на плоскость (p_x, x) — см. рис. 9.7). Аналогично вычисляются переменные действия I_y и I_z :

$$I_y = \frac{\alpha_2}{2\sqrt{m\kappa_2}}, \quad I_z = \frac{\alpha_3}{2\sqrt{m\kappa_3}}.$$

Принимая во внимание (9.195) и (9.199), получим гамильтониан в переменных действия (сравнить с формулой (6) примера 9.9)

$$\mathcal{H} = \sqrt{\frac{\kappa_1}{m}} I_x + \sqrt{\frac{\kappa_2}{m}} I_y + \sqrt{\frac{\kappa_3}{m}} I_z,$$

откуда согласно (9.209) найдем частоты неизотропного осциллятора

$$\omega_x = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_x} = \sqrt{\frac{\kappa_1}{m}}, \quad \omega_y = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_y} = \sqrt{\frac{\kappa_2}{m}}, \quad \omega_z = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_z} = \sqrt{\frac{\kappa_3}{m}}.$$

Если эти частоты несоизмеримы, то траектория точки будет незамкнутой и, следовательно, точка никогда не займет повторно того положения, которое она уже занимала, хотя через достаточно большой интервал времени точка как угодно близко подойдет к этому положению (такое движение является примером условно-периодического движения).

Если же частоты соизмеримы, т. е. подчиняются условиям

$$\sum_{i=1}^3 n_i \omega_i = 0 \quad (9.210)$$

(здесь n_i — целые числа), то говорят, что движение вырождено. В том случае, когда частоты подчиняются двум независимым соотношениям вида (9.210), говорят, что движение полностью вырождено; при этом фазовая траектория системы становится замкнутой, а движение строго периодическим.

Очень важным свойством переменных действия является их адиабатическая инвариантность. Это свойство заключается в том, что переменные действия сохраняют постоянные значения при достаточно медленном изменении параметров системы (изменения параметров за время, сравнимое с периодами системы $T_i = 2\pi/\omega_i$, весьма малы). Для доказательства этого утверждения рассмотрим систему, которая в каждый момент времени близка по свойствам к изученной выше обобщенно-консервативной системе с разделяющимися и периодически изменяющимися со временем переменными. Гамильтониан такой системы явно зависит от медленно меняющихся со временем параметров λ , т. е. имеет вид

$$H = H\{f_1(q_1, p_1, \lambda_1), \dots, f_s(q_s, p_s, \lambda_s)\}, \quad (9.211)$$

где каждый импульс p_i является периодической функцией соответствующей координаты q_i при постоянном λ_i . Система с гамильтонианом (9.211) неконсервативна, однако решение уравнения Гамильтона — Якоби можно искать в виде, близком к (9.87):

$$S = -H_0(\alpha_1, \dots, \alpha_s)t + W(q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s; \lambda_1, \dots, \lambda_s), \quad (9.212)$$

где параметры λ , а следовательно, и величины α и H_0 являются медленно меняющимися функциями времени. Используя (9.212) и пренебрегая в уравнении Гамильтона — Якоби (по сравнению с H_0) членами, пропорциональными $\dot{\lambda}$, найдем уравнение «нулевого приближения» рассматриваемого метода:

$$H\left\{f_1\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \lambda_1\right), \dots, f_s\left(q_s, \frac{\partial W}{\partial q_s}, \lambda_s\right)\right\} = H_0(\alpha_1, \dots, \alpha_s). \quad (9.213)$$

Это уравнение отличается от уравнения (9.192) зависимостью от λ , но согласно условию его следует решать так, как будто бы все λ постоянны, а в решении λ считать заданными функциями времени. Поэтому формулы (9.194), (9.196) — (9.201) справедливы и для рассматриваемой системы, однако во все эти соотношения войдут параметры λ ; например, обобщенные импульсы будут функциями вида

$$p_i = p_i(q_i; \alpha; \lambda) \quad (i = 1, \dots, s). \quad (9.214)$$

Подставляя (9.214) в (9.197) и интегрируя при постоянных λ и α (поскольку за период изменения импульса p_i функции λ и α остаются практически неизменными), вместо (9.198) получим

$$I_i = I_i(\alpha, \lambda). \quad (9.215)$$

Эти величины оказываются постоянными, несмотря на изменение α и λ со временем. Чтобы убедиться в этом, выберем в качестве «новых» импульсов переменные действия (9.215) и произведем соответствующее каноническое преобразование. Выражая α с помощью (9.215) через I и λ и исключая α из $W(q, \alpha, \lambda)$, найдем производящую функцию интересующего нас преобразования:

$$W = W(q_1, \dots, q_s; I_1, \dots, I_s; \lambda_1, \dots, \lambda_s). \quad (9.216)$$

Эта функция определяет каноническое преобразование к переменным действие — угол (см. (9.201))

$$p_i = \frac{\partial W(q, I, \lambda)}{\partial q_i}, \quad \varphi_i = \frac{\partial W(q, I, \lambda)}{\partial I_i} \quad (i = 1, \dots, s); \quad (9.217)$$

новыми уравнениями движения при этом будут уравнения (ср. с (9.203))

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_i}, \quad \dot{I}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_i} \quad (i = 1, \dots, s), \quad (9.218)$$

где (см. (9.174))

$$\mathcal{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (9.219)$$

Используя (9.219), найдем выражение гамильтониана \mathcal{H} в «новых» переменных φ , I и t (см. (9.195), (9.215) и (9.216))

$$\mathcal{H} = H(I_1, \dots, I_s; \lambda) + \sum_{i=1}^s \frac{\partial W(q(\varphi, I, \lambda), I, \lambda)}{\partial \lambda_i} \dot{\lambda}_i; \quad (9.220)$$

при этом «новые» уравнения движения (9.218) примут вид

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial H(I, \lambda)}{\partial I_i} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 W(q(\varphi, I, \lambda), I, \lambda)}{\partial I_i \partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j, \quad (9.221)$$

$$\dot{I}_i = -\sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 W(q(\varphi, I, \lambda), I, \lambda)}{\partial \varphi_i \partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j \quad (i = 1, \dots, s).$$

Усредним вторую группу этих уравнений по интервалу времени, достаточно малому по сравнению со временем заметного изменения параметров λ и достаточно большому по сравнению с периодами системы T_i . Допущение о малости интервала усреднения позволяет считать величины λ и $\dot{\lambda}$ постоянными при усреднении; следовательно,

$$\bar{I}_i = - \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \varphi_i \partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j \quad (i = 1, \dots, s). \quad (9.222)$$

Функция \bar{W} , входящая в уравнения (9.222), является неоднозначной функцией координат. Действительно, эта функция, равная сумме интегралов (см. (9.193) и (9.196))

$$W = \sum_{i=1}^s \int p_i dq_i, \quad (9.223)$$

за полный период изменения координаты q_i (при прочих постоянных координатах) получает приращение (см. (9.197))

$$\Delta W_i = \oint p_i dq_i = 2\pi I_i. \quad (9.224)$$

Однако частные производные $\frac{\partial W}{\partial \lambda_j}$ будут однозначными функциями координат, так как неоднозначность W вызывается добавлением величин, кратных $2\pi I_i$ и исчезающих при дифференцировании по λ . Производные $\frac{\partial W(q(\varphi, I, \lambda), I, \lambda)}{\partial \lambda}$ являются периодическими функциями угловых переменных φ , поскольку координаты q в свою очередь являются периодическими функциями φ (при полном цикле изменения координаты q_i угловая переменная φ_i получает приращение, равное 2π —см. (9.207)). Так как производные $\frac{\partial W}{\partial \lambda}$ являются однозначными периодическими функциями φ , то они могут быть разложены в ряды Фурье с коэффициентами, зависящими от I и λ . Поэтому ряды Фурье для производных $\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)$ не будут содержать постоянных членов и, следовательно, при усреднении по достаточно большому интервалу времени все производные $\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \varphi_i \partial \lambda_j}$ обратятся в нуль, что и доказывает адиабатическую инвариантность переменных действия:

$$\bar{I}_i = 0 \quad (i = 1, \dots, s). \quad (9.225)$$

Наконец, пренебрегая в уравнениях (9.221) членами, пропорциональными λ_j , найдем приближенные выражения для частот

$$\omega_i(t) = \frac{\partial H(I; \lambda(t))}{\partial I_i} \quad (i = 1, \dots, s), \quad (9.226)$$

с которыми изменяются импульсы p_i (в свою очередь, сами частоты являются медленно меняющимися функциями времени).

Пример 9.10. Адиабатическое изменение длины математического маятника.

Определить изменение амплитуды линейных колебаний математического маятника при адиабатическом изменении длины его подвеса.

Уравнение (9.213) для случая линейных колебаний маятника имеет вид

$$\left(\frac{dW}{d\theta}\right)^2 + m^2 g l^3 \theta^2 = 2m l^2 E,$$

где E — медленно меняющаяся полная энергия маятника. Интегрируя это уравнение при постоянных l и E , найдем полный интеграл

$$W = \sqrt{m^2 g l^3} \left\{ \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{2E}{mgl} - \theta^2} + \frac{E}{mgl} \arcsin \frac{\theta}{\sqrt{\frac{2E}{mgl}}} \right\},$$

который является неоднозначной функцией θ . Приращение функции W за полный цикл изменения θ в пределах $\pm \sqrt{2E/mgl}$ (см. (9.197) и (9.224)) равно

$$\Delta W = 2\pi \frac{E}{\omega} = 2\pi I,$$

где $\omega = \sqrt{g/l}$, а I — переменная действия. Поскольку I является адиабатическим инвариантом, то полная энергия маятника будет пропорциональна медленно изменяющейся частоте маятника:

$$E(t) = I\omega(t). \quad (1)$$

В соответствии с доказательством инвариантности действия I энергия в формуле (1) является энергией, усредненной по некоторому интервалу времени:

$$\bar{E} = \frac{m l^2}{2} \bar{\dot{\theta}}^2 + mgl \frac{\bar{\theta}^2}{2} \quad (2)$$

(здесь мы пренебрегли членом, пропорциональным \dot{l}^2 , и вынесли адиабатически изменяющиеся функции за знак усреднения).

Учитывая, что маятник совершает гармоническое колебание с медленно меняющейся амплитудой $\theta_0(t)$ и частотой $\omega(t)$, в результате усреднения получим

$$\bar{\theta}^2 = \frac{\theta_0^2}{2}, \quad \bar{\dot{\theta}}^2 = \frac{\theta_0^2}{2} \omega^2,$$

и, таким образом, вместо (2) найдем

$$\bar{E} = \frac{mg}{2} l \theta_0^2. \quad (3)$$

Наконец, из формул (1) и (3) получим соотношение

$$l^{3/4} \theta_0 = \text{const}, \quad (4)$$

согласно которому при бесконечно медленном удлинении подвеса маятника его угловая амплитуда θ_0 уменьшается, а линейная амплитуда $l\theta_0$ увеличивается; при этом энергия маятника (согласно (1)) уменьшается обратно пропорционально \sqrt{l} .

Пример 9.11. *Переменные «действие — угол» в задаче двух тел.*

Найти переменные «действие — угол» в случае финитного движения двух тел с приведенной массой μ и энергией взаимодействия $U = -\alpha/r$.

Гамильтониан двух точек относительно системы их центра масс равен (см. пример 9.1)

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) - \frac{\alpha}{r}.$$

Составляя уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2\mu r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{\alpha}{r} = E$$

и отыскивая его решение в виде

$$W = W_r(r, E, M) + W_\varphi(\varphi, E, M),$$

получим уравнения для функций W_r и W_φ

$$\left(\frac{dW_r}{dr} \right)^2 = -2\mu |E| + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}, \quad \frac{dW_\varphi}{d\varphi} = M,$$

где $|E| = -E$ в силу финитности движения. Эти уравнения (см. (9.196)) определяют функции $p_r(r, E, M)$ и $p_\varphi(M)$, которые необходимы для вычисления переменных действия:

$$I_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{-2\mu |E| + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}} dr,$$

$$I_{\varphi} = \frac{1}{2\pi} \oint p_{\varphi} d\varphi = \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = M.$$

В силу очевидной периодичности движения первый интеграл можно представить в виде удвоенного интеграла от

$$r_{\min} = p/(1 + \varepsilon) \text{ до } r_{\max} = p/(1 - \varepsilon),$$

где $p = M^2/\mu\alpha$, а $\varepsilon = (1 + 2EM^2/\mu\alpha^2)^{1/2}$.

Тогда находим

$$I_r = -I_{\varphi} + \alpha \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}},$$

откуда получаем гамильтониан в переменных действия

$$H = E = -\frac{\mu\alpha^2}{2(I_r + I_{\varphi})^2}. \quad (1)$$

Отсюда следует, что частоты ω_r и ω_{φ} совпадают друг с другом (см. (9.209), (9.210)):

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial I_r} = \frac{\partial H}{\partial I_{\varphi}} = \frac{\mu\alpha^2}{(I_r + I_{\varphi})^3}, \quad (2)$$

т. е. имеет место вырождение (последние два соотношения приводят к третьему закону Кеплера, см. (2.80)). Наконец, используя формулы для параметра и эксцентриситета эллипса, найдем

$$p = \frac{I_{\varphi}^2}{\mu\alpha}, \quad \varepsilon^2 = 1 - \left(\frac{I_{\varphi}}{I_{\varphi} + I_r} \right)^2. \quad (3)$$

В классической механике непрерывному изменению начальных условий соответствует непрерывное изменение постоянных I_r и I_{φ} , а также энергии E и момента M ; при таком изменении эллиптические орбиты обеих точек будут изменяться непрерывным образом. Другая картина имеет место в квантовой механике. В частности, в теории Бора, сыгравшей большую роль в становлении квантовой механики, постулировалась дискретность постоянных I_r и I_{φ} , т. е. постулировалось, что

$$I_r = n_r \hbar, \quad I_{\varphi} = n_{\varphi} \hbar, \quad (4)$$

где \hbar — «квант действия» (постоянная Планка), а n_r и n_{φ} — целые числа. В этом случае энергия системы (см. (1)) будет дискретной; например, для атома водорода ($\alpha = e^2$) было найдено

$$E = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad (5)$$

где $n = n_r + n_{\varphi} = 1, 2, \dots$, [13, § 45].

§ 9.10. Уравнения движения и интегральные вариационные принципы

Как мы видели, движение механических систем можно описать с помощью различных дифференциальных уравнений: уравнений Ньютона, уравнений Лагранжа с реакциями связей, уравнений Лагранжа в обобщенных координатах, канонических уравнений Гамильтона и уравнения Гамильтона — Якоби.

Уравнения движения определяют действительное изменение механического состояния системы за бесконечно малый элемент времени и тем самым (если заданы начальные условия) определяют изменение состояния системы на конечном интервале времени. В связи с этим становится возможным отыскание, как говорят, интегральных принципов, характеризующих движение механической системы на таких конечных интервалах. Примером интегрального принципа может служить утверждение об инвариантности интеграла Пуанкаре — Картана; инвариантность этого интеграла была установлена с помощью полной вариации функции действия. При этом, по существу, производилось сопоставление значений функции действия на различных *действительных* траекториях механической системы. Однако возможно сопоставляющее сопоставление значения какой-либо функции на *действительной* траектории с ее значениями на *виртуальных* траекториях. Такое сопоставление (как будет видно) также приводит к некоторому интегральному принципу.

Рассмотрим, например, в пространстве конфигураций близкие друг к другу действительную и виртуальную траектории системы, предполагая, что в начальный и конечный моменты времени обе траектории пересекаются. Действительная траектория определяется функциями $\mathbf{r}_i(t)$, удовлетворяющими уравнениям движения и уравнениям связей, в то время как виртуальные траектории определяются функциями $\mathbf{r}_i(t, \varepsilon)$, подчиненными только уравнениям связей. Полагая, что $\mathbf{r}_i(t, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \mathbf{r}_i(t)$, зададим виртуальные перемещения точек системы в виде

$$\delta \mathbf{r}_i(t, \varepsilon) = \mathbf{r}_i(t, \varepsilon) - \mathbf{r}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (9.227)$$

Действительное и виртуальное положения системы совпадут друг с другом в начальный и конечный моменты времени, если потребовать, чтобы

$$\delta \mathbf{r}_i(t_0) = 0, \quad \delta \mathbf{r}_i(t_1) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (9.228)$$

В каждой точке действительной траектории удовлетворяется общее уравнение механики, являющееся необходимым и достаточным условием движения системы в соответствии с уравнениями движения, а виртуальное «движение» отличается от действитель-

ного тем, что для него не удовлетворяется общее уравнение механики.

Преобразуем общее уравнение механики (5.27) к виду, более удобному для дальнейшего исследования. Используя очевидные соотношения

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i) - \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_i$$

и коммутативность дифференцирования по времени и варьирования по параметру ϵ (см. (9.62)), получим

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \dot{\delta \mathbf{r}}_i. \quad (9.229)$$

Учитывая, что $\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \dot{\delta \mathbf{r}}_i$ равна вариации δT кинетической энергии системы, представим общее уравнение механики в форме:

$$\delta T + \delta A = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i \right), \quad (9.230)$$

где δA — виртуальная работа заданных сил.

Интегрируя обе части (9.230) по времени и учитывая (9.228), получим интегральное условие

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0, \quad \delta \mathbf{r}_i(t_0) = \delta \mathbf{r}_i(t_1) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (9.231)$$

которое вместе с уравнениями связей (см., например, (8.68))

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) &= 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1), \\ \sum_{i=1}^N a_{\beta i} \mathbf{v}_i + a_\beta &= 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2) \end{aligned} \quad (9.232)$$

описывает движение механической системы. Действительно, если имеют место уравнения движения (8.64) совместно с (8.67), то удовлетворяется система (8.68), а следовательно, удовлетворяется и (9.231) совместно с (9.232). Исходя из этих последних уравнений и выполняя все вычисления в обратном порядке, нетрудно убедиться в справедливости уравнений (8.64) совместно с (8.67). Таким образом, можно утверждать, что условие (9.231) (вместе с уравнениями связей (9.232)) представляет собой *интегральный вариационный принцип для систем с любыми заданными силами*

и идеальными (голономными и линейными неголономными) связями.

Используя обобщенные координаты (обращающие уравнения голономных связей в тождества), этот принцип можно записать в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0, \quad (9.233)$$

$$\sum_{j=1}^{s_1} A_{\beta j} \dot{q}_j + A_{\beta} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2),$$

$$\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s_1; s_1 = 3N - k_1).$$

Полагая здесь все $A_{\beta j}$ и A_{β} равными нулю, найдем *интегральный вариационный принцип для механических систем с идеальными голономными связями*:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0, \quad \delta q_j'(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (9.234)$$

где s — число степеней свободы.

Этому принципу можно придать еще более компактную форму, если допустить, что заданными силами являются обобщенно-потенциальные силы. Действительно, используя выражение для виртуальной работы таких сил (см. (5.42) и (5.70))

$$\delta A = \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \quad (9.235)$$

и соотношения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \delta q_j \quad (j = 1, \dots, s).$$

найдем

$$\delta A = \sum_{j=1}^s \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \delta \mathcal{U}, \quad (9.236)$$

а подставляя (9.236) в интеграл (9.234), получим:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta \mathcal{U}) \delta t = - \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Отсюда, учитывая определение функции Лагранжа \mathcal{L} и действия S и то, что $\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$, найдем *интегральный вариаци-*

онный принцип для систем с обобщенно-потенциальными силами и идеальными голономными связями (принцип Гамильтона — Остроградского):

$$\delta S = 0, \quad \delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (9.237)$$

Согласно этому принципу функция действия на действительной траектории имеет экстремальное значение по сравнению с ее значениями на виртуальных траекториях, точки которых в начальный и конечный моменты времени совпадают соответственно с начальным и конечным положениями системы.

Из принципа Гамильтона — Остроградского следует, что действие и лагранжиан данной механической системы определяются неоднозначно: к действию можно прибавить любую постоянную, а к лагранжиану — полную производную по времени от любой функции координат и времени. Действительно, вычисляя действие с помощью функции Лагранжа

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} f(q, t), \quad (9.238)$$

получим

$$S' = S + f(q_1, t_1) - f(q_0, t_0).$$

Таким образом, условие $\delta S' = 0$ эквивалентно условию $\delta S = 0$, и, следовательно, уравнения движения в обоих случаях совпадают.

Можно убедиться в том, что для сравнительно малых интервалов времени $t_1 - t_0$ вторая вариация $\delta^2 S > 0$ и, следовательно, на действительных траекториях имеет место минимум действия. В самом деле, вторая вариация функции действия равна

$$\delta^2 S = \int_{t_0}^{t_1} \delta^2 \mathcal{L} dt, \quad (9.239)$$

где

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_i \delta \dot{q}_k + \sum_{i,k} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} \delta \dot{q}_i \delta q_k + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_i \partial q_k} \delta q_i \delta q_k. \end{aligned}$$

Используя оценку вариаций координат [32, гл. 12]

$$|\delta q_j(t)| = \left| \int_{t_0}^t \delta \dot{q}_j dt \right| < (t - t_0) \max |\delta \dot{q}_j| \quad (9.240)$$

($j=1, 2, \dots, s, t_0 < t < t_1$) и пренебрегая в (9.239) всеми членами, линейными и квадратичными относительно малого интервала $t_1 - t_0$, получим

$$\delta^2 S \approx \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_i \delta \dot{q}_k dt. \tag{9.241}$$

Так как

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} = a_{ik} \tag{9.242}$$

(см. (5.56) и (5.78)), то подынтегральное выражение в (9.241) будет положительно определенной формой вариаций скоростей,

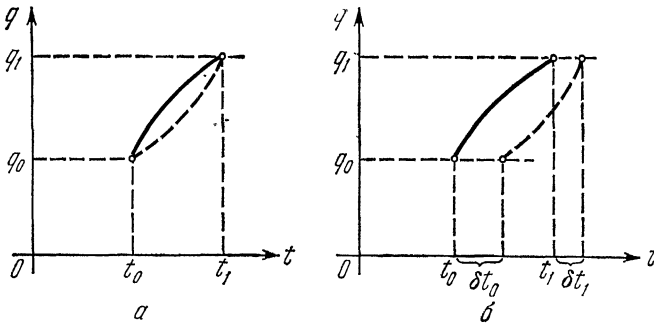


Рис. 9.9

что и доказывает положительность $\delta^2 S$ на сравнительно малых интервалах времени. Таким образом, из принципа Гамильтона — Остроградского следует, что *разность между усредненными по времени кинетической энергией и обобщенным потенциалом на действительных траекториях достигает минимума $\min(\bar{T} - \bar{U})$.*

Рассмотрим другую форму принципа наименьшего действия для обобщенно-консервативных систем с идеальными голономными связями. С этой целью рассмотрим совокупность траекторий, проходящих через фиксированную «точку» q_0 в различные начальные моменты времени и через фиксированную «точку» q_1 в различные конечные моменты времени (сравнение этого способа варьирования с варьированием, применяемым в принципе Гамильтона — Остроградского см. на рис. 9.9). Для таких траекторий полные вариации начального и конечного положения равны

$$\delta q_{j_0} = \delta q_{j_1} = 0 \quad (i = 1, \dots, s), \tag{9.243}$$

и, следовательно, между вариациями координат в начальный и конечный моменты времени и вариациями начального и конечного моментов времени будут иметь место соотношения (см. (9.121) и (9.122))

$$\delta q_j(t_0) = -\dot{q}_{j0} \delta t_0, \quad \delta q_j(t_1) = -\dot{q}_{j1} \delta t_1 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (9.244)$$

Пользуясь (9.243), для полной вариации действия (см. (9.123)) получим выражение

$$\delta S = -H \delta t \Big|_{t_0}^{t_1}. \quad (9.245)$$

Далее, учитывая консервативность системы ($H=H_0$), а также то, что

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt = \delta t_1 - \delta t_0,$$

из (9.245) найдем

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L} + H) dt = 0. \quad (9.246)$$

Затем примем во внимание, что согласно определению функции Гамильтона

$$\mathcal{L} + H = \sum_j p_j \dot{q}_j,$$

а согласно (9.87) для обобщенно-консервативных систем имеет место равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L} + H) dt = S + H_0(t_1 - t_0) = W.$$

Таким образом, полная вариация «укороченного» действия

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_j p_j \dot{q}_j dt \quad (9.247)$$

равна

$$\delta W = 0 \quad (9.248)$$

при

$$H = H_0, \quad \delta q_{j0} = \delta q_{j1} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Требование (9.248) представляет собой принцип наименьшего действия Мопертьюи.

Для систем с *обычными потенциальными силами и стационарными связями* этот принцип примет вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0 \quad (9.249)$$

при $E = E_0$, $\delta q_{j0} = \delta q_{j1} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$). Действительно, в этом случае обобщенный потенциал \mathcal{U} сводится к потенциальной энергии $\mathcal{U}^{(0)}$, зависящей только от координат (см. (5.75)), а кинетическая энергия равна однородной квадратичной форме $T^{(2)}$ (см. (5.55)–(5.57)); следовательно, «укороченное» действие становится равным

$$W = 2 \int_{t_0}^{t_1} T dt, \quad (9.250)$$

а функция Гамильтона совпадает с полной энергией E .

Если в (9.249) с помощью интеграла энергии

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk} \frac{dq_j dq_k}{(dt)^2} + U = E_0$$

исключить элемент времени dt , то можно получить принцип наименьшего действия в форме Якоби

$$\delta \int_{(q_0)}^{(q_1)} \sqrt{E_0 - U} ds = 0, \quad (9.251)$$

где $ds = \left(\sum_{j,k} a_{jk} dq_j dq_k \right)^{1/2}$.

Поскольку в (9.251) время исключено, принцип в форме Якоби дает возможность определять траекторию системы. Покажем это на примере свободной материальной точки. В этом случае (9.251) можно записать в виде

$$\int_{(r_0)}^{(r_1)} \left\{ \sqrt{E_0 - U} \delta ds - \frac{\nabla U \delta \mathbf{r}}{2\sqrt{E_0 - U}} ds \right\} = 0,$$

где $(ds)^2 = (d\mathbf{r})^2$ и, следовательно, $ds \cdot \delta ds = d\mathbf{r} \cdot \delta d\mathbf{r}$ (\mathbf{r} — радиус-вектор точки). Отсюда, заменяя $\delta d\mathbf{r}$ на $d\delta\mathbf{r}$ и учитывая, что $d\mathbf{r}$ в начальном и конечном положениях точки обращается в нуль, после интегрирования по частям получим

$$\int_{(r_0)}^{(r_1)} \left\{ \frac{d}{ds} \left[\sqrt{E_0 - U} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] \mp \frac{\nabla U}{2\sqrt{E_0 - U}} \right\} ds \delta \mathbf{r} = 0.$$

Это интегральное условие ввиду произвольности вариации $\delta \mathbf{r}$ приводит к дифференциальному уравнению траектории

$$\frac{d}{ds} \left[\sqrt{E_0 - U} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] + \frac{1}{2\sqrt{E_0 - U}} \nabla U = 0. \quad (9.252)$$

В уравнении (9.252) с помощью интеграла энергии

$$\frac{\sqrt{E_0 - U}}{ds} = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{dt}$$

можно перейти к дифференцированию по времени и тем самым получить уравнение Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U.$$

Итак, основываясь на дифференциальных уравнениях движения, можно получить соответствующие интегральные вариационные принципы, а полагая в основу эти принципы, можно прийти к эквивалентным им уравнениям движения; те и другие основаны на фундаментальных физических допущениях, изложенных в первой главе.

Приложение к главе IX. Теорема Нетер

Большое значение этой теоремы в развитии современной теоретической физики обусловлено тем, что в ней устанавливается весьма общая связь между преобразованиями, оставляющими действие инвариантным, и законами сохранения.

Теорема Нетер в наиболее простом случае сводится к утверждению о том, что *любомu непрерывному обратимому преобразованию координат, при котором функция действия данной гамильтоновой системы остается инвариантной, соответствует первый интеграл уравнений Лагранжа этой системы* [31].

Пусть задано непрерывное обратимое преобразование

$$q'_j = q'_j(q, t, \varepsilon) \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (1)$$

которое зависит от некоторого параметра ε , причем если $\varepsilon = 0$, то преобразование переходит в тождественное, т. е.

$$q'_j|_{\varepsilon=0} = q_j \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (2)$$

Следовательно, вариации координат q , соответствующие преобразованию (1), равны

$$\delta q_j = \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \varepsilon \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (3)$$

(здесь ε — бесконечно малая величина). Используя (3) и выражение (9.65), найдем вариацию действия на действительной траектории

$$\delta S = \varepsilon \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \Big|_{t_0}^{t_1}. \quad (4)$$

Эта вариация должна равняться нулю, поскольку действие S по условию инвариантно относительно (1). Поэтому

$$\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \Big|_{t_1} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \Big|_{t_0}, \quad (5)$$

откуда ввиду произвольности t_0 и t_1 вытекает, что преобразованию (1) соответствует первый интеграл уравнений Лагранжа

$$\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \text{const}. \quad (6)$$

Теорема доказана.

В частности, получим законы сохранения для замкнутой свободной системы, лагранжиан которой относительно инерциальной системы отсчета имеет вид

$$\mathcal{L} = \sum_j \frac{m_j}{2} v_j^2 - \sum_{i < j} U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (7)$$

Этот лагранжиан (а следовательно, и функция действия) инвариантен относительно произвольного бесконечно малого параллельного переноса ε механической системы (в этом проявляется однородность пространства, см. с. 111). Направляя ε вдоль оси Ox , получим рассматриваемое преобразование координат точек системы в виде

$$x'_i = x_i + \varepsilon, \quad y'_i = y_i, \quad z'_i = z_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

и соответствующий этому преобразованию интеграл движения

$$\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{\partial x'_i}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \sum_i m_i \dot{x}_i = P_{x0}. \quad (9)$$

Используя произвольность вектора ε , аналогично убедимся в сохранении проекций импульса системы на оси Oy и Oz . Таким образом, импульс замкнутой системы сохраняется (см. (2.106)).

Нетрудно убедиться в инвариантности лагранжиана (7) относительно бесконечно малого произвольного поворота ε механической системы (в этом проявляется изотропия пространства, см. с. 111). Направляя ε вдоль оси Oz (т. е. рассматривая поворот вокруг Oz), получим преобразование координат точек системы в виде (см. (4.13))

$$\begin{aligned} \dot{x}'_i &= x_i - \varepsilon y_i, \\ \dot{y}'_i &= y_i + \varepsilon x_i, \\ z'_i &= z_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (10)$$

и соответствующий интеграл движения

$$\sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{\partial x'_i}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i} \left(\frac{\partial y'_i}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \right] = \delta \Sigma m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = M_{z_0}. \quad (11)$$

Аналогично найдем остальные интегралы и тем самым убедимся в сохранении кинетического момента системы (см. (2.114)).

Наконец, функция (7), как не зависящая явно от времени, инвариантна относительно бесконечно малого «смещения» системы во времени, т. е. инвариантна относительно преобразования

$$t' = t + \varepsilon \quad (12)$$

(в этом проявляется однородность времени). Поскольку в данном случае вариация времени отлична от нуля и равна $\delta t = t' - t = \varepsilon$, постольку нужно воспользоваться полной вариацией действия (9.123). Тогда, учитывая, что $\delta t_0 = \delta t_1 = \varepsilon$, $\delta q_0 = \delta q_1 = 0$, а также то, что для рассматриваемой системы функции Гамильтона и полная энергия совпадают, найдем

$$\delta S = (E_0 - E_1) \varepsilon = 0, \quad (13)$$

откуда вытекает сохранение полной энергии системы:

$$\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{i < j} U_{ij} = E_0. \quad (14)$$

ЧАСТЬ II

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Глава X

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

§ 10.1. Физически бесконечно малая частица

Одним из важнейших объектов механики являются системы с очень большим (практически бесконечным) числом N молекул, которые располагаются в пространстве в известном смысле плотно, т. е. образуют континуум, или сплошную среду*. Исходя из классико-механических представлений о движении таких систем, можно написать соответствующие уравнения движения, однако проинтегрировать их невозможно. Например, чтобы найти закон движения молекул, находящихся в 1 см^3 воздуха при атмосферном давлении и комнатной температуре, потребовалось бы проинтегрировать примерно 10^{19} уравнений движения. Поэтому естественно ограничиться приближенным (но практически весьма точным) описанием движения сплошной среды. С этой целью рассматривается не отдельная молекула, а физически бесконечно малая частица, т. е. совокупность молекул, число ΔN которых, с одной стороны, достаточно велико ($\Delta N \gg 1$), а с другой стороны, весьма мало по сравнению с числом N молекул во всей системе или в ее какой-либо макроскопической части ($\Delta N \ll N$); эта совокупность должна занимать физически бесконечно малый объем ΔV , т. е. объем, который достаточно велик, чтобы содержать большое число молекул, и весьма мал по сравнению с областью заметного изменения макроскопических параметров среды.

Положение *данной* физически бесконечно малой частицы в момент времени t задают радиусом-вектором центра масс этой частицы, усредненным по физически бесконечно малому интервалу времени Δt , который намного больше, чем некоторое время, характерное для движения отдельной молекулы под действием других молекул, и весьма мал по сравнению со временем заметного изменения макроскопических параметров среды (интервал Δt должен включать в себя момент вре-

* Молекулы, из которых состоит среда, в зависимости от их структуры можно представлять как материальные точки или другие более сложные механические модели.

мени t). Таким образом, если говорят, что физически бесконечно малая частица в момент времени t находится в точке \mathbf{r} пространства, то следует иметь в виду, что в определениях этих величин имеются неточности порядка Δt и $(\Delta V)^{1/3}$. В механике сплошных сред указанными неточностями пренебрегают и в соответствии с этим считают возможным рассматривать изменение состояния частицы за бесконечно малый интервал времени dt , а также рассматривать бесконечно малое перемещение $d\mathbf{r}$ частицы из точки \mathbf{r} пространства в точку $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ *.

По аналогии с определением скорости центра масс (см. (2.90)) полагают, что скорость \mathbf{v} данной частицы связана с ее радиусом-вектором \mathbf{r} соотношением

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}; \quad (10.1)$$

а по аналогии с (2.91) ускорение \mathbf{w} частицы считают равным

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (10.2)$$

Обсудим теперь другое важное понятие механики сплошных сред, а именно понятие о поле. Напомним, что *полем называется любая физическая величина, заданная как функция точки пространства и времени*. Поля могут быть скалярными, векторными, тензорными и др. Рассмотрим, например, скалярное поле плотности массы. Для этого усредним по физически бесконечно малому интервалу времени Δt (включающему в себя данный момент t) массу всех молекул, находящихся в физически бесконечно малом объеме ΔV (включающем в себя конец данного вектора \mathbf{r}). Затем отнесем найденное таким образом среднее значение массы Δm к ΔV и определим плотность массы $\rho = \Delta m / \Delta V$ той частицы, которая в момент времени t находится в точке \mathbf{r} . Повторяя эту процедуру для любого ΔV в любой момент t , найдем плотность массы

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (10.3)$$

как функцию точки пространства и времени, т. е. найдем поле плотности массы.

Бесконечно малое перемещение $d\mathbf{r}$ данной частицы, вообще говоря, зависит от положения частицы до перемещения, т. е. от \mathbf{r} , а в общем случае и от времени t . Таким образом, перемещение является векторной функцией координат и времени

$$d\mathbf{r} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t); \quad (10.4)$$

* Здесь и в дальнейшем под термином «частица» понимается «физически бесконечно малая частица».

эта функция называется полем бесконечно малых перемещений. Отсюда, используя (10.1), можно определить поле скоростей

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (10.5)$$

в среде. Это поле можно также определить, усредняя по физически бесконечно малому интервалу времени Δt скорость центра масс материальных точек, находящихся в объеме ΔV , и подсчитывая эту величину для разных ΔV . Далее в этой главе будут рассмотрены другие поля, характеризующие сплошную среду.

Итак, в механике сплошных сред макроскопические движения дискретной системы, состоящей из бесконечно большого числа микроскопических объектов — молекул, описываются усредненными величинами, а именно полевыми («континуальными») функциями. Общие соотношения между этими функциями, т. е. законы механики сплошных сред, были установлены в соответствии с очень большим числом экспериментальных данных. Эти законы являются основой весьма обширной области исследований движения различных сред, а также основой многочисленных технических приложений. Подчеркнем также, что взаимосвязь макроскопических движений среды, изучаемых в механике сплошных сред, с движением и свойствами молекул, из которых состоит среда, изучается в статистической физике. Поэтому статистическая теория дает теоретическое обоснование соотношений и законов, постулируемых в этой главе, см. [59].

§ 10.2. Деформация малой частицы

Изучим перемещение *данной малой* частицы среды и с этой целью рассмотрим два ее бесконечно близких положения (1) и (2) (рис. 10.1). Радиусы-векторы двух любых точек O' и A этой частицы связаны соотношением (1.6), откуда следует, что перемещение $d\mathbf{r}$ точки A равно

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_{O'} + d\mathbf{r}'. \quad (10.6)$$

С другой стороны, перемещения $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}_{O'}$ представляют собой значения одной и той же

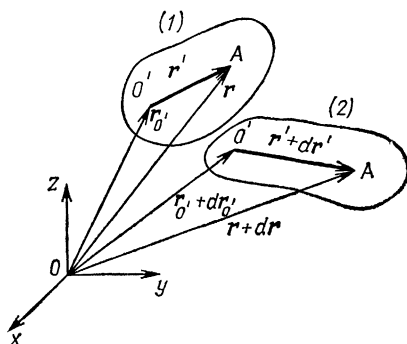


Рис. 10.1

функции \mathbf{u} в точках пространства \mathbf{r} и $\mathbf{r}_{O'}$ (см. (10.4)):

$$d\mathbf{r} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad d\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{u}(\mathbf{r}_{O'}, t), \quad (10.7)$$

причем $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'$. Следовательно, перемещение $d\mathbf{r}'$ точки A относительно поступательно движущейся системы отсчета с началом в O' равно

$$d\mathbf{r}' = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}_{O'}, t).$$

Разложим $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ в точке $\mathbf{r}_{O'}$ и учтем, что \mathbf{r}' — достаточно малая величина, поскольку достаточно мала вся рассматриваемая частица. В результате, пренебрегая членами разложения второго порядка малости по сравнению с членами первого порядка, найдем, что

$$d\mathbf{r}' = (\mathbf{r}' \text{ grad}) \mathbf{u} \quad (10.8)$$

(здесь и в дальнейшем, если частица называется *малой*, допускается справедливость указанного пренебрежения).

Запишем выражение (10.8) в тензорной форме, вводя обозначения

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad u_x = u_1, \quad u_y = u_2, \quad u_z = u_3 \quad (10.9)$$

и применяя известное правило записи, согласно которому *суммирование производится по всем возможным значениям повторяющегося в произведении индекса, а знак суммы опускается*. Тогда получим

$$dx'_i = x'_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (10.10)$$

(в данном случае повторяющимся индексом является индекс k , пробегающий значения 1, 2, 3): Приведем более подробную запись выражения (10.10), например, для $i=1$:

$$dx'_1 = x'_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + x'_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + x'_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}.$$

Сопоставление этой формулы с (10.10) показывает преимущество тензорной формы записи, которая далее будет применяться без соответствующих оговорок.

Теперь заметим, что производная $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ всегда может быть представлена в виде суммы компонент *антисимметричного* тензора

$$\chi_{ki} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (10.11)$$

и *симметричного* тензора

$$\varepsilon_{ki} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (10.12)$$

т. е. в виде суммы

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \chi_{ki} + \varepsilon_{ki}. \quad (10.13)$$

Следовательно, относительное перемещение точки A можно записать в виде

$$dx'_i = x'_k \chi_{ki} + x'_k \varepsilon_{ki}. \quad (10.14)$$

Рассмотрим подробнее первую сумму правой части (10.14). Тензор χ_{ki} в силу своей антисимметричности определяется тремя независимыми компонентами и может быть задан матрицей

$$\|\chi_{ki}\| = \begin{vmatrix} 0 & \chi_{12} & \chi_{13} \\ -\chi_{12} & 0 & \chi_{23} \\ -\chi_{13} & -\chi_{23} & 0 \end{vmatrix}.$$

При этом компоненты χ_{ki} имеют вид

$$\chi_{ki} = a_k b_i - a_i b_k, \quad (10.15)$$

т. е. такой же вид, как и компоненты векторного произведения $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ двух любых векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Поэтому три независимые компоненты антисимметричного тензора образуют векторное произведение двух соответствующих векторов. Для тензора (10.11) таким векторным произведением, очевидно, является $\frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}]$, т. е. $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u}$ с компонентами

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\operatorname{rot} \mathbf{u})_1 &= \chi_{23}, & \frac{1}{2} (\operatorname{rot} \mathbf{u})_2 &= \chi_{31}, \\ \frac{1}{2} (\operatorname{rot} \mathbf{u})_3 &= \chi_{12}. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Поскольку $\operatorname{rot} \mathbf{u}$ представляет собой бесконечно малый вектор (он линеен относительно перемещения \mathbf{u}), введем для вектора (10.16) и его компонент обозначения

$$\begin{aligned} d\chi &= \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u}, \\ d\chi_1 &= \chi_{23}, \quad d\chi_2 = \chi_{31}, \quad d\chi_3 = \chi_{12}. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Теперь, используя антисимметричность тензора χ_{ki} и (10.17), найдем для интересующей нас суммы из (10.14) выражение (при $i=1$)

$$x'_k \chi_{k1} = x'_2 \chi_{21} + x'_3 \chi_{31} = -x'_2 d\chi_3 + x'_3 d\chi_2 = [d\chi, r']_1. \quad (10.18)$$

Аналогично получим:

$$x'_k \chi_{k2} = [d\chi, r']_2, \quad x'_k \chi_{k3} = [d\chi, r']_3. \quad (10.18')$$

Таким образом, сумма $x'_k \chi_{ki}$ представляет собой i -тую компоненту векторного произведения $[d\chi, r']$.

Что касается второй суммы из (10.14), то ее всегда можно записать в виде:

$$\epsilon_{ki} x'_k = \frac{\partial \Psi_i}{\partial x'_i}, \quad (10.19)$$

где*

$$\Psi = \frac{1}{2} \epsilon_{ki} x'_k x'_i. \quad (10.19')$$

Следовательно, вторая сумма из (10.14) равна i -той компоненте градиента функции Ψ по переменной x'_i . Наконец, используя (10.6), (10.10), (10.14), а также (10.18), (10.18') и (10.19), найдем, что перемещение dr точки A с точностью до величин первого порядка малости равняется

$$dr = dr_0 + [d\chi, r'] + \text{grad}_{r'} \Psi. \quad (10.20)$$

Сопоставляя (10.20) с выражениями для перемещения материальной точки и точки абсолютно твердого тела (такие выражения следуют из формул (4.32) и (8.2)), убеждаемся в том, что *перемещение любой точки малой частицы с точностью до величин первого порядка малости складывается из перемещения dr_0 + $[d\chi, r']$, которое точка совершает в результате движения всей частицы, как абсолютно твердого тела, и перемещения, равного $\text{grad}_{r'} \Psi$ и связанного с деформацией частицы, т. е. а изменением ее формы и объема.* Таким образом, dr_0 представляет собой поступательное перемещение частицы, $d\chi$ — вектор бесконечно малого поворота частицы, как абсолютно твердого тела, а перемещение $\text{grad}_{r'} \Psi$ является, как его называют, вектором деформации. Для данных точек O' и A все слагаемые перемещения точки A определяются полем перемещений, при этом вектор поворота определяется посредством тензора χ_{ki} , а вектор деформации — посредством тензора ϵ_{ki} . По этой причине тензор χ_{ki} называется тензором поворота, а тензор ϵ_{ki} — тензором деформации за время dt .

* Приведем подробную запись этой квадратичной формы:

$$\Psi = \frac{1}{2} [\epsilon_{11} (x'_1)^2 + \epsilon_{22} (x'_2)^2 + \epsilon_{33} (x'_3)^2 + 2\epsilon_{12} x'_1 x'_2 + 2\epsilon_{13} x'_1 x'_3 + 2\epsilon_{23} x'_2 x'_3].$$

Имея в виду, что перемещение $u_i = v_i dt$, запишем тензоры поворота и деформации в виде

$$\chi_{ki} = \omega_{ki} dt, \quad \varepsilon_{ki} = v_{ki} dt, \quad (10.21)$$

где

$$\omega_{ki} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad (10.22)$$

$$v_{ki} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \quad (10.23)$$

Тензор ω_{ki} определяет угловую скорость частицы

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} \quad (10.24)$$

(так же, как тензор χ_{ki} определяет поворот $d\boldsymbol{\chi}$). Тензор v_{ki} , который называется тензором скоростей деформации, определяет скорость деформации, т. е. вектор $v_{ki} x_k$. Этот вектор может быть представлен в виде градиента

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'_i} = v_{ki} x'_k \quad (10.25)$$

от квадратичной формы

$$\Phi = \frac{1}{2} v_{ki} x'_k x'_i. \quad (10.25')$$

Таким образом, учитывая формулы (10.21)—(10.25) и относя перемещения $d\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}'_O'$, поворот $d\boldsymbol{\chi}$ и вектор деформации к элементу времени dt , из (10.20) придем к соотношению для скоростей точек A и O' :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O' + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'] + \text{grad}_r \Phi. \quad (10.26)$$

Зная тензор деформации, можно найти изменение длины малого материального «отрезка» сплошной среды, т. е. элемента среды, состоящего из частиц, лежащих на малом отрезке прямой, а зная тензор скоростей деформации, можно определить скорость такого изменения. Например, найдем относительное изменение длины материального отрезка $O'A$ (рис. 10.1). В первом положении его длина равнялась $r' = |\mathbf{r}'|$, а во втором получила приращение dr' . Используя справедливое для любого вектора равенство $\mathbf{r}' dr' = r' dr'$, а также выражение

$$d\mathbf{r}' = [d\boldsymbol{\chi}, \mathbf{r}'] + \text{grad}_r \Psi$$

и учитывая (10.19), (10.19'), для относительного удлинения (сокращения) отрезка получим

$$\frac{dr'}{r'} = \varepsilon_{ki} a_k a_i, \quad (10.27)$$

где $a_i = x'_i/r'$ — косинус угла между вектором r' и i -той координатной осью.

Нетрудно выяснить смысл компонент тензора деформации в простейших случаях. Из (10.27) видно, что компонента ε_{ii} представляет собой относительное удлинение малого отрезка среды, первоначально направленного параллельно i -той координатной оси. Например, для отрезка, первоначально параллельного оси x_1 , направляющие косинусы равны $a_1=1$, $a_2=a_3=0$ и, следовательно, относительное удлинение будет равно $dr'/r' = \varepsilon_{11}$. Отсюда ясно, что компоненты тензора деформации с одинаковыми индексами характеризуют деформации растяжения (или сжатия) в направлении соответствующей оси.

Рассмотрим также деформацию двух малых отрезков среды, первоначально направленных вдоль осей x_1 и x_2 соответствен-

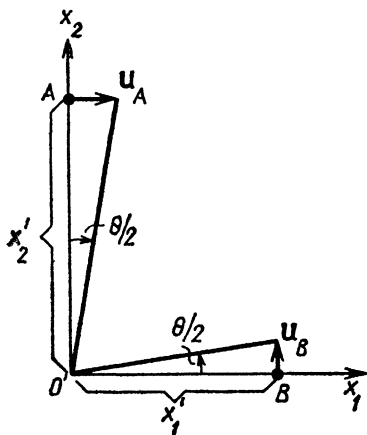


Рис. 10.2

но (рис. 10.2). Полагая, что поступательное перемещение, вращение и растяжение отсутствуют, а деформация происходит только в плоскости x_1x_2 , из (10.14) найдем компоненты смещения точки A

$$u_1 = \varepsilon_{12} x'_2, \quad u_2 = 0$$

и компоненты смещения точки B

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \varepsilon_{12} x'_1.$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon_{12} = \left(\frac{u_1}{x'_2} \right)_A = \left(\frac{u_2}{x'_1} \right)_B = \operatorname{tg}(\theta/2) \approx \theta/2,$$

т. е. ε_{12} равняется половине угла θ , на который уменьшился первоначально прямой угол. Из этого примера ясно, что компоненты тензора деформации с различными индексами характеризуют деформации сдвига.

Тензор деформации, как и всякий симметричный тензор, можно привести к главным осям, т. е. в каждой данной точке O' мож-

но так выбрать систему координат, чтобы все «недиагональные» компоненты тензора обратились в нуль. Следовательно, тензор деформации, вычисленный в такой системе координат, имеет в общем случае три отличные от нуля главные компоненты: ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 . Координатные оси указанной системы называются главными осями тензора деформации. Отнесенные к главным осям выражения для квадратичной формы Ψ , компонент вектора деформации и относительно удлинения заметно упрощаются:

$$\Psi = \frac{1}{2} [\epsilon_1 (x'_1)^2 + \epsilon_2 (x'_2)^2 + \epsilon_3 (x'_3)^2], \quad (10.28)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x'_1} = \epsilon_1 x'_1, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x'_2} = \epsilon_2 x'_2, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x'_3} = \epsilon_3 x'_3, \quad (10.29)$$

$$\frac{dr'}{r'} = \epsilon_1 a_1^2 + \epsilon_2 a_2^2 + \epsilon_3 a_3^2. \quad (10.30)$$

Из (10.29), в частности, следует, что точка, первоначально находившаяся на главной оси, после деформации останется на ней. В самом деле, если $x'_1 \neq 0$, а $x'_2 = x'_3 = 0$, то проекции вектора деформации будут равны: $u_1 = \epsilon_1 x'_1$, $u_2 = u_3 = 0$. Из (10.29) также следует, что произвольную деформацию малой частицы всегда можно рассматривать как совокупность трех деформаций растяжения (сжатия) вдоль главных осей.

Теперь найдем относительное изменение объема частицы. Имея в виду, что изменение объема не связано с поступательным движением и вращением частицы, будем рассматривать перемещения, связанные лишь с ее деформацией. В качестве координатных осей с началом в данной частице среды возьмем главные оси тензора деформации. Объем ΔV частицы до деформации (представим ее в виде параллелепипеда со сторонами, параллельными главным осям) будет равен произведению $x'_1 x'_2 x'_3$ длин соответствующих отрезков, направленных первоначально вдоль главных осей. Однако после деформации отрезок длины x'_i , как было установлено, будет направлен так же, а его длина станет равной $x'_i (1 + \epsilon_i)$ (здесь суммирование по повторяющемуся индексу не производится). Следовательно, объем $\Delta V + d\Delta V$ частицы после деформации равняется $x'_1 x'_2 x'_3 (1 + \epsilon_1) (1 + \epsilon_2) (1 + \epsilon_3)$. Отсюда, пренебрегая членами высшего порядка малости, найдем относительное изменение объема

$$\frac{d\Delta V}{\Delta V} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3. \quad (10.31)$$

Далее учтем, что сумма главных компонент симметричного тензора является инвариантом относительно поворота осей, т. е. при любом направлении декартовых осей

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (10.32)$$

(это можно непосредственно установить, используя преобразование поворота (8.44)). Следовательно, при любом направлении осей *относительное изменение объема частицы равно дивергенции поля перемещений*:

$$\frac{d\Delta V}{\Delta V} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (10.33)$$

Соответственно *скорость относительного изменения объема частицы равна дивергенции поля скоростей*:

$$\frac{1}{\Delta V} \frac{d\Delta V}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (10.34)$$

Пример 10.1. Деформация «квадрата».

Рассмотрим перемещение малой частицы — «квадрата» — в его плоскости, полагая, что сторона квадрата до деформации рав-

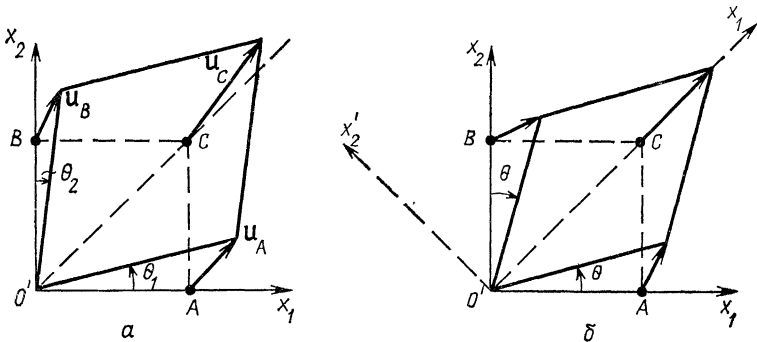


Рис. 10.3

на l , поступательное движение отсутствует ($d\mathbf{r}_{O'} = 0$), а углы сжатия сторон квадрата малы и соответственно равны θ_1 и θ_2 (рис. 10.3, а).

В случае перемещений в плоскости x_1x_2 проекции вектора \mathbf{u} любой точки квадрата и относительное удлинение любого отрезка имеют вид (см. (10.14), (10.27)):

$$u_1 = \chi_{21}x'_2 + \varepsilon_{11}x'_1 + \varepsilon_{21}x'_2,$$

$$u_2 = \chi_{12}x'_1 + \varepsilon_{12}x'_1 + \varepsilon_{22}x'_2,$$

$$dr'/r' = \varepsilon_{11}a_1^2 + \varepsilon_{22}a_2^2 + 2\varepsilon_{12}a_1a_2. \quad (1)$$

Отсюда для проекций перемещения точки A и относительного удлинения отрезка $O'A$ соответственно получим:

$$u_1 = \varepsilon_{11}l, \quad u_2 = (\chi_{12} + \varepsilon_{12})l, \quad dr'/r' = \varepsilon_{11}.$$

Аналогично найдем для точки B и отрезка $O'B$

$$u_1 = (\chi_{31} + \varepsilon_{21})l, \quad u_2 = \varepsilon_{22}l, \quad dr'/r' = \varepsilon_{22},$$

а также для точки C и отрезка $O'C$

$$u_1 = (\chi_{31} + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{21})l, \quad u_2 = (\chi_{12} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{22})l,$$

$$dr'/r' = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \varepsilon_{12}.$$

Так как углы скашивания малы, то $(u_2)_A/l = \theta_1$ и $(u_1)_B/l = \theta_2$. С другой стороны

$$(u_2)_A/l = \chi_{12} + \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad (u_1)_B/l = \chi_{31} + \varepsilon_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta_1, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \theta_2;$$

$$\chi_{31} = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1), \quad \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае одновременно происходят повороты квадрата, как твердого тела, на угол $d\chi_3 = \chi_{12} = (\theta_1 - \theta_2)/2$ (см. (10.17)), две деформации растяжения, определяемые компонентами ε_{11} и ε_{22} , и деформация сдвига, определяемая углом $(\theta_1 + \theta_2)/2$. При построении фигуры после деформаций следует учесть, что любая прямая ввиду линейности преобразования (1) преобразуется в некоторую другую прямую.

В частном случае, когда $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon$, поворот отсутствует ($\chi_{12} = 0$), а перемещение сводится к чистой деформации со следующими проекциями смещений точки A :

$$u_1 = \varepsilon l, \quad u_2 = \theta l,$$

точки B

$$u_1 = \theta l, \quad u_2 = \varepsilon l$$

и точки C

$$u_1 = (\varepsilon + \theta)l, \quad u_2 = (\varepsilon + \theta)l.$$

Отсюда видно, что C после деформации остается на диагонали квадрата ($u_1 = u_2$) и, следовательно, диагональ является главной осью тензора деформаций (рис. 10.3, б). Поворачивая оси x_1 и x_2

на угол $\pi/4$ и применяя преобразование (8.44), найдем главные компоненты тензора $\epsilon_1 = \epsilon + \theta$, $\epsilon_2 = \epsilon - \theta$, а также проекции на главные оси x_1, x_2 перемещения точки A и относительное удлинение отрезка $O'A$

$$u_1 = \epsilon_1 l / \sqrt{2}, \quad u_2 = -\epsilon_2 l / \sqrt{2}, \quad dr'/r' = \epsilon;$$

аналогично получим для точки B и отрезка $O'B$

$$u_1 = \epsilon_1 l / \sqrt{2}, \quad u_2 = \epsilon_2 l / \sqrt{2}, \quad dr'/r' = \epsilon,$$

а также для точки C и отрезка $O'C$

$$u_1 = \sqrt{2} \epsilon_1 l, \quad u_2 = 0, \quad dr'/r' = \epsilon_1 = \epsilon + \theta.$$

§ 10.3. Законы сохранения массы, изменения импульса и кинетического момента

Рассмотренные в § 10.1 поля плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ и скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ связаны друг с другом уравнением, вытекающим из закона сохранения массы. Чтобы убедиться в этом, проследим за движением *данной* частицы массы Δm . Поскольку эта масса неизменна, то

$$\frac{d}{dt} \Delta m = 0. \tag{10.35}$$

Здесь использована полная производная по времени, так как эта производная характеризует изменение во времени *величины, связанной с движущейся в пространстве частицей*, в данном случае изменение величины Δm (полную производную по времени часто называют субстанциональной производной). Напомним, что в отличие от полной производной частная производная по времени характеризует изменение некоторой величины со временем *в данной точке пространства* (частную производную по времени называют также локальной производной).

Учитывая, что $\Delta m = \rho \Delta V$, из (10.35) получим соотношение

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{\Delta V} \frac{d\Delta V}{dt} = 0, \tag{10.35'}$$

в котором скорость относительного изменения объема частицы определяется полем скоростей согласно (10.34). Таким образом, найдем уравнение, связывающее поля плотности и скорости,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{10.36}$$

Оно называется уравнением непрерывности. Далее, используя выражение для полной производной по времени от плотности частицы

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{r} \cdot \text{grad})\rho, \quad (10.37)$$

получим уравнение непрерывности в другой форме, чаще употребляемой в теоретической физике,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0. \quad (10.38)$$

В тензорных обозначениях уравнение непрерывности приобретает вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (10.39)$$

Это дифференциальное уравнение связано с определенным интегральным соотношением. Чтобы получить его, рассмотрим фиксированный объем V_0 пространства, для которого согласно (10.38)

$$\int_{V_0} \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} \right) dV = 0.$$

Теперь с помощью формулы Остроградского преобразуем объемный интеграл от дивергенции в поверхностный интеграл [65, с. 188]:

$$\int_{V_0} \text{div } \rho \mathbf{v} dV = \oint_{\sigma_0} \rho \mathbf{v} d\sigma, \quad (10.40)$$

здесь σ_0 — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V_0 , а $d\sigma$ — «элемент поверхности», т. е. вектор, равный по абсолютной величине площади элемента поверхности и направленный по орту \mathbf{n} , определяющему внешнюю нормаль к этому элементу. В результате придем к искомому интегральному соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = - \oint_{\sigma_0} \rho \mathbf{v} d\sigma, \quad (10.41)$$

согласно которому скорость изменения массы среды в объеме V_0 пространства равна разности масс частиц среды, вытекающих и вытекающих за единицу времени через поверхность σ_0 , охватывающую объем V_0 (в соответствии с принятым определением нормали \mathbf{n} скорость изменения массы положительна, если поверхностный интеграл отрицателен, т. е. масса вытекающих частиц

больше, чем масса вытекающих; в противном случае скорость изменения массы будет отрицательна). Вектор $\rho \mathbf{v}$ называется плотностью потока среды.

Продолжая изучать движение данной частицы массы Δm и учитывая определение ее скорости \mathbf{v} , как усредненной скорости центра масс, напишем закон изменения импульса частицы в виде

$$\Delta m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^e. \quad (10.42)$$

Здесь \mathbf{F}^e — сумма внешних сил, приложенных к частице. Эта сила зависит от положения частицы и времени, т. е. должна быть задана векторным полем. Силу \mathbf{F}^e следует рассматривать как результат усреднения правой части закона изменения импульса всех молекул, из которых состоит данная частица среды (см. (2.103)). Сила \mathbf{F}^e обусловлена, во-первых, силами взаимодействия молекул среды друг с другом и, во-вторых, включает в себя внешние по отношению ко всей среде силовые поля. Будем рассматривать *среду с весьма малым радиусом действия межмолекулярных сил*. Тогда сила, с которой физически бесконечно малые частицы среды действуют на данную частицу, проявляется только в тонком поверхностном слое этой частицы. Толщиной такого слоя в механике сплошных сред заведомо пренебрегают, а силы, с которыми соседние частицы среды действуют друг на друга, считают поверхностными силами. Что касается внешних силовых полей, то они практически одинаково действуют на все молекулы, находящиеся в объеме ΔV . Поэтому эти силы называются объемными силами (если эти силы пропорциональны массе частицы, то их называют массовыми силами). Такими силами являются гравитационные и электромагнитные силы, а также силы инерции, которые появляются при изучении движения среды относительно неинерциальных систем отсчета.

Итак, в механике сплошных сред предполагается, что сумма всех сил, приложенных к данной частице массы Δm , может быть представлена в виде

$$\mathbf{F}^e = \oint_{\Delta \sigma} d\mathbf{F}^\sigma + \mathbf{f}\Delta m, \quad (10.43)$$

где $d\mathbf{F}^\sigma$ — поверхностная сила, приложенная к элементарной площадке $d\sigma$ поверхности частицы, $\Delta \sigma$ — поверхность частицы, а \mathbf{f} — объемная сила, приходящаяся на единицу массы. Относительно поверхностной силы $d\mathbf{F}^\sigma$ предполагается, что она зависит от ориентации площадки, т. е. от направления вектора $d\sigma = \mathbf{n}d\sigma$, а также пропорциональна величине $d\sigma$ этой площадки (рис. 10.4). Иначе говоря, предполагается, что поверхностная сила имеет вид

$$dF_i^\sigma = P_{ik} d\sigma_k, \quad (10.44)$$

т. е. определяется совокупностью величин P_{ik} и зависит от компонент вектора $d\sigma$, а именно от $d\sigma_k = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{n}_k) d\sigma$ (здесь $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{n}_k)$ — косинус угла между ортом \mathbf{n} и координатной осью с ортом \mathbf{n}_k).

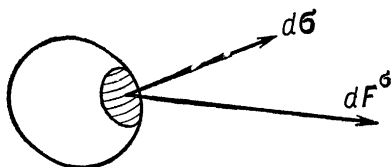


Рис. 10.4

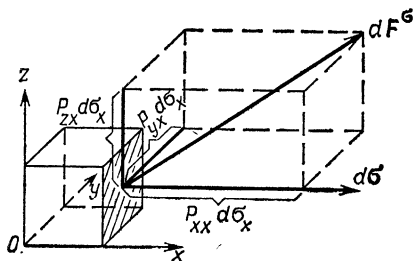


Рис. 10.5

Совокупность величин P_{ik} называется тензором напряжений. Компоненты этого тензора являются функциями \mathbf{r} , t и определяют поле напряжений в среде. Компонента P_{ik} тензора напряжений представляет собой i -тую компоненту силы, действующую на единицу поверхности, перпендикулярной оси x_k . Например, на площадку, перпендикулярную к оси x (вектор $d\sigma$ такой площадки направлен вдоль x), действует сила $dF_i^\sigma = P_{ix} d\sigma_x$ (рис. 10.5). Проекции этой силы соответственно равны:

$$dF_x^\sigma = P_{xx} d\sigma_x, \quad dF_y^\sigma = P_{yx} d\sigma_x, \quad dF_z^\sigma = P_{zx} d\sigma_x.$$

Отсюда видно, что P_{xx} — нормальная по отношению к рассматриваемой площадке компонента плотности силы, а P_{yx} и P_{zx} — касательные компоненты плотности силы.

Теперь преобразуем суммарную поверхностную силу, действующую на данную частицу, используя (10.44), теорему Остроградского и учитывая малость частицы*:

$$\oint_{\Delta\sigma} dF_i^\sigma = \oint_{\Delta\sigma} P_{ik} d\sigma_k = \int_{\Delta V} \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} dV = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} \Delta V. \quad (10.45)$$

* Последнее равенство в (10.45) имеет место согласно теореме о среднем значении, при этом $\partial P_{ik}/\partial x_k$ берется в некоторой точке, принадлежащей ΔV . Эта точка отличается от \mathbf{r} на величину порядка $(\Delta V)^{1/3}$. Так как величинами такого порядка в механике сплошных сред пренебрегают, $\partial P_{ik}/\partial x_k$ можно брать в точке \mathbf{r} . В дальнейшем мы будем использовать равенства, аналогичные (10.45) без соответствующих оговорок.

Наконец, используя (10.42), (10.43), (10.45) и сокращая все члены полученного уравнения на ΔV , приходим к уравнениям движения сплошной среды

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (10.46)$$

где полная производная по времени

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k. \quad (10.47)$$

Теперь убедимся в том, что закон изменения кинетического момента частицы приводит к требованию симметрии тензора напряжений. По аналогии с (4.50) и (4.51) положим, что кинетический момент частицы и момент сил, действующих на нее, соответственно равны

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \Delta m \cdot [\mathbf{r}\mathbf{v}] + \mathbf{M}', \\ \mathbf{L}^e &= \oint_{\Delta\sigma} [\mathbf{r}d\mathbf{F}^\sigma] + \Delta m \cdot [\mathbf{r}\mathbf{f}] + (\mathbf{L}^e)'. \end{aligned} \quad (10.48)$$

При этом момент импульса центра масс частицы пропорционален Δm и, следовательно, является малой величиной порядка l^3 (l — характерный размер частицы). В то же время момент \mathbf{M}' относительно поступательно движущейся системы центра масс частицы пропорционален $\Delta m \cdot l^2$, т. е. является величиной порядка l^5 . Момент сил $(\mathbf{L}^e)'$ относительно центра масс частицы также является величиной более высокого порядка малости по сравнению с другими моментами сил в (10.48). Следовательно, слагаемыми \mathbf{M}' и $(\mathbf{L}^e)'$ можно пренебречь. Тогда, учитывая, что

$$\frac{d}{dt} \Delta m = 0, \quad \text{а} \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

получим закон изменения кинетического момента частицы в виде

$$\Delta m \cdot [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{v}] = \oint_{\Delta\sigma} [\mathbf{r}d\mathbf{F}^\sigma] + \Delta m \cdot [\mathbf{r}\mathbf{f}]. \quad (10.49)$$

Далее спроектируем обе части (10.49) на координатные оси, для чего выразим компоненты векторных произведений через компоненты векторов-сомножителей, т. е. запишем момент ускорения и момент сил в виде антисимметричного тензора второго ранга (см., например, (10.15)). Тогда получим

$$\Delta m \cdot (x_i \dot{v}_j - x_j \dot{v}_i) = \oint_{\Delta\sigma} (x_i dF_j^\sigma - x_j dF_i^\sigma) + \Delta m \cdot (x_i f_j - x_j f_i). \quad (10.50)$$

Затем преобразуем первый поверхностный интеграл из (10.50), используя (10.44) и формулу Остроградского. В результате найдем, что

$$\oint_{\Delta\sigma} x_i P_{jk} d\sigma_k = \frac{\partial (x_i P_{jk})}{\partial x_k} \Delta V.$$

Но

$$\frac{\partial (x_i P_{jk})}{\partial x_k} = \delta_{ik} P_{jk} + x_i \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_k},$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. Поэтому

$$\oint_{\Delta\sigma} x_i dF_j^\sigma = \left(P_{ji} + x_i \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_k} \right) \Delta V. \quad (10.51)$$

Наконец, получая аналогичное (10.51) выражение для второго поверхностного интеграла из (10.50), вместо (10.50), найдем

$$\begin{aligned} & x_i \left(\rho \dot{v}_j - \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_k} - \rho f_j \right) - \\ & - x_j \left(\rho \dot{v}_i - \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} - \rho f_i \right) = P_{ji} - P_{ij}. \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду уравнений движения (10.46), получим, что

$$P_{ji} = P_{ij}. \quad (10.52)$$

Таким образом, *тензор напряжений является симметричным тензором*, т. е. представляет собой совокупность шести независимых компонент.

§ 10.4. Уравнение изменения кинетической энергии. Законы термодинамики

Кинетическая энергия частицы массы Δm и полная производная по времени от кинетической энергии соответственно равны:

$$\frac{\Delta m}{2} v^2, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta m}{2} v^2 \right) = \Delta m \cdot v_i \dot{v}_i. \quad (10.53)$$

Имея в виду эти выражения, умножим правую и левую части уравнений движения (10.46) с индексом i на проекцию v_i скорости, а затем сложим результаты умножения для $i=1, 2, 3$. Тогда получим уравнение изменения кинетической энергии

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = v_i \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho v_i f_i, \quad (10.54)$$

соответствующее уравнению (4.56) для системы точек.

Левая часть (10.54) равна *полной производной кинетической энергии по времени, отнесенной к единице объема*, а последняя сумма справа является *мощностью объемных сил, затрачиваемой при перемещении частицы* (эта величина также отнесена к единице объема). Что касается двойной суммы по i и k , то она содержит члены двух различных типов. Чтобы выяснить их смысл, представим эту сумму в виде

$$v_i \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial (v_i P_{ik})}{\partial x_k} - P_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Затем воспользуемся соотношением

$$\frac{\partial (v_i P_{ik})}{\partial x_k} \Delta V = \oint_{\Delta \sigma} v_i P_{ik} d\sigma_k.$$

Следовательно,

$$v_i \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta \sigma} v_i P_{ik} d\sigma_k - P_{ik} v_{ki}, \quad (10.55)$$

поскольку согласно (10.22) и (10.23)

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \omega_{ki} + v_{ki},$$

причем $P_{ik}\omega_{ki} = 0$, так как тензор P_{ik} — симметричен, а ω_{ki} — антисимметричен.

Из (10.55) ясно, что выражение $v_i \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k}$ равно разности, отнесенной к единице объема *мощности*

$$\frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta \sigma} v_i P_{ik} d\sigma_k \quad (10.56)$$

поверхностных сил на перемещениях частицы и отнесенной к единице объема *мощности*

$$P_{ik} v_{ki} \quad (10.57)$$

напряжений, связанной с деформацией частицы.

Получим другую форму уравнения (10.54), справедливую для случая потенциальных объемных сил, когда

$$f_i = - \frac{\partial u^e}{\partial x_i} \quad (10.58)$$

(здесь $u^e(\mathbf{r}, t)$ — потенциальная энергия во внешнем поле, приходящаяся на единицу массы). Для этого используем очевидные выражения

$$\frac{du^e}{dt} = \frac{\partial u^e}{\partial t} + \frac{\partial u^e}{\partial x_i} v_i = \frac{\partial u^e}{\partial t} - f_i v_i \quad (10.59)$$

и вместо (10.54) найдем

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + u^e \right) = v_i \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial u^e}{\partial t}. \quad (10.60)$$

Первое и второе начала термодинамики. Из уравнения (10.54) видно, что часть мощности объемных сил затрачивается на изменение скорости центра масс частицы, т. е. на изменение кинетической энергии частицы как целого. Теперь рассмотрим внутреннюю энергию частицы, т. е. усредненную по интервалу времени Δt сумму кинетической энергии молекул частицы относительно ее центра масс и энергии взаимодействия между молекулами частицы. Изменение внутренней энергии, как показывает опыт, происходит за счет работы напряжений на деформации частицы, а также за счет теплообмена между частицами. Наличие тепловых явлений приводит к необходимости использовать в механике сплошных сред законы термодинамики.

Напомним, что в термодинамике изучаются равновесные состояния макроскопических систем, т. е. состояния, когда все параметры, описывающие систему, не зависят от времени, а любые стационарные потоки, обусловленные каким-либо внешним отношением к системе источником, отсутствуют.

Важнейшей величиной, характеризующей состояние термодинамического равновесия системы и имеющей одно и то же значение у любой макроскопической части всей системы, является температура T (в частности, для одноатомного газа, атомы которого движутся по законам классической механики, температура пропорциональна средней кинетической энергии газа).

Равновесные состояния сред, называемых простыми, определяются двумя независимыми параметрами, например плотностью и температурой; при этом внутренняя энергия и другие величины являются функциями этих параметров, т. е. являются, как говорят, функциями состояния. Однако в механике сплошных сред наряду с равновесными состояниями изучаются и неравновесные состояния, для которых, вообще говоря, нельзя ввести понятия температуры в указанном выше смысле. Тем не менее применение законов термодинамики в механике сплошных сред будет оправдано, если ограничиться сравнительно медленными процессами, для которых в каждый момент времени любую часть среды, являющуюся достаточно малой, но макроскопической системой, можно считать находящейся в «своем» равновесном состоянии, а состояния соседних частиц можно считать достаточно близкими друг к другу. Такие состояния называются локально равновесными.

Для среды, находящейся в локально равновесном состоянии, функции состояния частицы являются теми же самыми, что и функции состояния рассматриваемой среды в термодинамическом равновесии с той разницей, что независимые параметры, т. е. аргументы этих функций, в случае термодинамического равновесия неизменны, а в случае локального равновесия зависят от положения частицы и времени. Например, приходящаяся на единицу массы внутренняя энергия e для простой среды, находящейся в равновесном состоянии, определяется из опыта, как функция $e(\rho, T)$, где ρ и T — постоянны (при наличии внешнего поля $e = e(\rho(\mathbf{r}), T)$). Для той же среды, находящейся в локально равновесном состоянии, внутренняя энергия будет иметь вид

$$e = e(\rho(\mathbf{r}, t), T(\mathbf{r}, t)). \quad (10.61)$$

Итак, применим к данной частице массы Δm и объема ΔV первое начало термодинамики, т. е. закон изменения энергии с учетом тепловых явлений. Согласно этому закону изменение $d(e\Delta m)$ внутренней энергии частицы складывается из работы напряжений $P_{ik}\epsilon_{ik}\Delta V$, связанной с деформацией частицы, и количества теплоты dQ , получаемой при этом частицей от соседних частиц, т. е.

$$d(e\Delta m) = P_{ik}\epsilon_{ik}\Delta V + dQ \quad (10.62)$$

(работа напряжений и количество теплоты не являются полными дифференциалами, поэтому для количества теплоты введено обозначение dQ).

Теплообмен между частицами определяется плотностью потока тепла \mathbf{q} , т. е. плотностью среднего потока кинетической энергии молекул относительно системы центра масс частицы (положительным направлением этого потока считается направление внешней нормали \mathbf{n}). Согласно определению вектора \mathbf{q} количество теплоты, получаемое частицей от соседних частиц за единицу времени, равно

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_{\Delta\sigma} q_k d\sigma_k. \quad (10.63)$$

Теперь преобразуем (10.62), относя все члены этого уравнения к элементу времени dt и используя то, что $\frac{d}{dt}\Delta m = 0$, $\epsilon_{ki} = v_{ki}dt$ (см. (10.21)), а также используя следующее выражение для потока тепла через поверхность частицы:

$$\oint_{\Delta\sigma} q_k d\sigma_k = \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \Delta V. \quad (10.64)$$

Тогда вместо (10.62) получим уравнение изменения внутренней энергии

$$\rho \frac{de}{dt} = P_{ik} v_{ik} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k}, \quad (10.65)$$

где $P_{ik} v_{ik}$ — мощность напряжений, связанная с деформацией частицы, $-\frac{\partial q_k}{\partial x_k}$ — количество теплоты, получаемое частицей за единицу времени на единицу объема.

Основываясь на уравнениях изменения кинетической и внутренней энергий, нетрудно получить уравнение изменения полной энергии частицы, равной

$$\Delta m \cdot \left(\frac{v^2}{2} + e \right). \quad (10.66)$$

Действительно, складывая почленно (10.54) с (10.65) и используя (10.55), (10.64), найдем, что

$$\frac{d}{dt} \left[\Delta m \cdot \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right] = \Delta m \cdot v_i f_i + \oint_{\Delta \sigma} v_i P_{ik} d\sigma_k - \oint_{\Delta \sigma} q_k d\sigma_k, \quad (10.67)$$

т. е. полная производная по времени от полной энергии частицы равна сумме мощностей объемных и поверхностных сил, действующих на частицу, а также потока тепла через поверхность частицы.

Напомним, далее, содержание второго начала термодинамики. Согласно этому закону *любая макроскопическая система в равновесном состоянии характеризуется функцией состояния — энтропией S ; при этом изменение энтропии в результате передачи системе тепла dQ при температуре T равно*

$$dS = \frac{dQ}{T}, \quad (10.68)$$

а процесс передачи тепла должен происходить весьма медленно по сравнению с процессом установления равновесия в системе. Такие достаточно медленные процессы, называемые квазистатическими, обладают свойством обратимости. Действительно, в этом случае любое промежуточное состояние между начальным и конечным состояниями системы является равновесным, поэтому система в обратном процессе проходит те же состояния, что и в прямом процессе, и возвращается в начальное состояние без каких-либо изменений в окружающих систему телах.

Второе начало термодинамики содержит еще одно утверждение: *если в результате передачи тепла dQ с конечной скоростью при температуре T система перешла из одного равновесного состояния в другое близкое к нему равновесное состояние, то*

$$dS > \frac{dQ}{T}, \quad (10.69)$$

где dS — разность значений энтропии в конечном и начальном состояниях. Процессы, происходящие с конечной скоростью, называются неравновесными (или нестатическими). Из опыта известно, что практически все неравновесные процессы необратимы. Напомним, что необратимыми называются такие процессы, при которых невозможен возврат системы в первоначальное состояние без какого-либо изменения в окружающих телах.

Из (10.69) следует, что в результате неравновесного процесса энтропия изолированной системы ($dQ=0$) возрастает. Следовательно, изменение энтропии является мерой необратимости процесса в изолированных системах. Такое истолкование физического смысла энтропии подтверждается в статистической физике, где показывается, что энтропия связана с вероятностью состояния системы, а возрастание энтропии для изолированной системы соответственно связано с переходом системы из менее вероятного в более вероятное состояние.

Очевидно, что соотношения (10.68) и (10.69) можно объединить в одну формулу, вводя обозначение dQ_D для разности $TdS - dQ$; dQ_D является частью механической энергии, необратимо превращающейся в тепло. Тогда второй закон термодинамики можно записать в виде

$$TdS = dQ + dQ_D, \quad dQ_D \geq 0; \quad (10.70)$$

здесь $dQ_D=0$ для обратимых процессов и $dQ_D>0$ — для необратимых.

Теперь применим второй закон термодинамики к частице сплошной среды. Относя все члены в (10.70) к элементу времени dt , вводя энтропию s , приходящуюся на единицу массы, и учитывая сохранение массы, из (10.70) найдем

$$\Delta m \cdot T \frac{ds}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{dQ_D}{dt}.$$

Отсюда, используя (10.63) и (10.64), получим уравнение изменения энтропии:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\frac{\partial q_k}{\partial x_k} + D, \quad (10.71)$$

где $D = \frac{1}{\Delta V} \frac{dQ_D}{dt}$ — диссипативная функция, равная отнесенной к единице объема и единице времени части механической работы, которая необратимо переходит в тепло.

В заключение этой главы приведем все основные уравнения механики сплошных сред, а именно: уравнение непрерывности, уравнения изменения импульса, внутренней энергии и энтропии:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0, \quad (10.72)$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (10.73)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = P_{ik} v_{i,k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k}, \quad (10.74)$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + D, \quad D \geq 0. \quad (10.75)$$

Это — система шести дифференциальных уравнений в частных производных с семнадцатью неизвестными функциями, зависящими от координат и времени: пятью скалярными величинами ρ , e , T , s , D , шестью компонентами векторов v_i , q_i и шестью компонентами тензора P_{ik} . Таким образом, становится очевидным, что для использования системы основных уравнений необходимы также допущения о характере среды или движений среды, при которых система уравнений стала бы замкнутой.

Глава XI

ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ

§ 11.1. Уравнения движения идеальной жидкости

Идеальной жидкостью называется такая сплошная среда, в которой *при любой деформации и скорости деформации касательные напряжения пренебрежимо малы по сравнению с нормальными напряжениями, а все нормальные напряжения одинаковы* (в данный момент времени, в данной точке пространства, занимаемого средой). Таким образом, тензор напряжений идеальной жидкости имеет вид

$$P_{ik} = -p\delta_{ik}, \quad (11.1)$$

т. е. все его компоненты с различными индексами равны нулю, а все компоненты с одинаковыми индексами равны друг другу. Подставляя (11.1) в (10.44), получим выражение для поверхностной силы

$$dF_i^\sigma = -pd\sigma_i. \quad (11.2)$$

Следовательно, абсолютная величина силы, действующей на единичную площадку, в идеальной жидкости не зависит от ориентации площадки.

Модель идеальной жидкости применима ко многим задачам о движении жидкостей и газов с пренебрежимо малой вязкостью*. Если в качестве «идеальной жидкости» рассматривают газ, то $p > 0$, а в случае жидкой среды давление p может быть как положительным, так и отрицательным, поскольку возможны и сжимающие, и растягивающие напряжения (давление в газе связано главным образом со средней кинетической энергией молекул, а в жидкости — как с кинетической энергией, так и с потенциальной энергией взаимодействия молекул).

* Во избежание недоразумений отметим, что под термином «идеальный газ» понимают газ с уравнением состояния $p = p \frac{kT}{m} V$ (здесь k — постоянная Больцмана, а m — масса молекулы газа), в то время как под «идеальной жидкостью» понимают среду (жидкость или газ) с изотропным тензором напряжений.

Учитывая изотропность тензора напряжений, пренебрегая теплопроводностью среды ($q_i=0$) и ограничиваясь изучением обратимых течений ($D=0$), из основных уравнений сплошных сред получим уравнения движения идеальной жидкости:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (11.3)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{f}, \quad (11.4)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (11.5)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0. \quad (11.6)$$

Поскольку в механике сплошных сред изучаются локально-равновесные состояния, то эта система должна быть дополнена термодинамическими уравнениями состояния:

$$e = e(\rho, T), \quad p = p(\rho, T); \quad (11.7)$$

первая из этих функций называется калорическим уравнением состояния, а вторая — термическим (эти функции определяются из опытных данных для систем, находящихся в равновесных состояниях).

Уравнения идеальной жидкости совместно с уравнениями состояния представляют собой замкнутую систему уравнений; уравнение изменения импульса (11.4) называется уравнением Эйлера. Решение этой системы должно удовлетворять граничным условиям на поверхностях, ограничивающих среду, а в случае нестационарных течений — и начальным условиям в некоторый момент времени t_0 . Например, *нормальная к поверхности неподвижной твердой стенки компонента скорости среды должна обращаться в нуль*

$$v_n = 0, \quad (11.8)$$

поскольку жидкость не может протекать через стенку.

Теперь получим общие выражения для силы \mathbf{F}^σ и момента сил \mathbf{L}^σ , приложенных к твердому телу, движущемуся в идеальной жидкости. На элемент $nd\sigma$ поверхности тела действует сила $-pnd\sigma$ (орт \mathbf{n} направлен от поверхности тела внутрь жидкости, так как согласно определению этого вектора он должен быть направлен по внешней нормали к поверхности рассматриваемого тела). Следовательно, суммарная сила, действующая на тело, равна

$$\mathbf{F}^\sigma = - \oint_{\sigma} p d\boldsymbol{\sigma}, \quad (11.9)$$

а момент сил давления

$$\mathbf{L}^\sigma = \oint_{\sigma} p [\mathbf{r} d\boldsymbol{\sigma}] \quad (11.10)$$

(здесь σ — поверхность тела). Подставляя в эти выражения давление, найденное из уравнений движения жидкости, и вычисляя соответствующие интегралы по заданной поверхности тела, найдем векторы \mathbf{F}^σ и \mathbf{L}^σ .

Рассмотрим решения уравнений идеальной жидкости в частном случае, когда жидкость покоится, т. е. $\mathbf{v}=0$. Тогда система (11.3) — (11.5) сводится к уравнению гидростатики

$$\text{grad } p = \rho \mathbf{f}, \quad (11.11)$$

которое описывает механическое равновесие среды.

Приведем несколько простых решений уравнения (11.11). Если, например, объемными силами можно пренебречь ($\mathbf{f}=0$), то давление p одинаково во всех точках среды (закон Паскаля). Если же жидкость несжимаема ($\rho=\text{const}$) и находится в однородном поле тяжести ($\mathbf{f}=\mathbf{g}$), то, располагая начало координат на поверхности жидкости и направляя ось z вниз по вертикали, из (11.11) получим уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g,$$

откуда следует, что

$$p = p_0 + \rho g z,$$

где p_0 — внешнее давление на поверхности жидкости. Это решение определяет гидростатическое давление, равное давлению на поверхности, сложенному с весом столба жидкости с единичной площадью поперечного сечения и высотой z .

Наконец, рассмотрим равновесие идеального газа в однородном поле тяжести, если тепловое равновесие ($T=\text{const}$) имеет место во всех точках газа. В этом случае, используя уравнение состояния идеального газа $p = \rho \frac{kT}{m}$ (здесь k — постоянная Больцмана, m — масса молекулы газа) и направляя ось z вверх по вертикали, из (11.11) получим уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{kT}{m} \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho g.$$

Отсюда найдем выражение для распределения плотности с высотой

$$\rho = \rho_0 \exp \left\{ - \frac{mg}{kT} (z - z_0) \right\},$$

которое называется *барометрической формулой*.

Пример 11.1. *Закон Архимеда.*

Определить силу, с которой тяжелая несжимаемая жидкость действует на погруженное в нее неподвижное тело.

Сила, с которой жидкость действует на поверхность σ_0 погруженного в жидкость тела, равна интегралу (11.9). Преобразуя этот интеграл в объемный, используя (11.11) и то, что $\rho = \text{const}$, а $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, найдем

$$\mathbf{F}^\sigma = - \int_{V_0} \text{grad } p dV = - mg;$$

здесь V_0 — объем тела, а m — масса жидкости в этом объеме. Следовательно, сила, с которой тяжелая несжимаемая жидкость действует на погруженное в нее тело, по величине равна весу жидкости в объеме тела и направлена противоположно силе тяжести (закон Архимеда).

Пример 11.2. *Равномерно вращающаяся несжимаемая жидкость.*

Пусть несжимаемая жидкость плотности ρ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси. Найти форму свободной поверхности ($p=0$) жидкости в состоянии равновесия, если частицы жидкости притягиваются к центру, помещенному на оси вращения, с силой, пропорциональной расстоянию до центра (здесь под состоянием равновесия понимается равновесие относительно системы отсчета, вращающейся с жидкостью). Найти также форму свободной поверхности жидкости в однородном гравитационном поле \mathbf{g} и определить силу, действующую на однородное тело плотности ρ_t , которое погружено в жидкость и вращается вместе с ней (точнее, скорость тела относительно жидкости предполагается пренебрежимо малой).

В указанной системе отсчета на частицу жидкости с радиусом-вектором \mathbf{r} (начало отсчета помещено в центре силы) действует сила притяжения $-m\kappa\mathbf{r}$ и центробежная сила инерции $m\omega^2\mathbf{r}'$ (\mathbf{r}' — радиус-вектор точки, направленный по перпендикуляру от оси). Потенциал этого силового поля в расчете на единицу массы в сферических координатах имеет вид

$$u^e = \frac{\kappa}{2} r^2 - \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta. \quad (1)$$

Учитывая, что $\mathbf{f} = -\text{grad } u^e$, запишем уравнение (11.11) в форме

$$\text{grad } p = -\rho \text{ grad } u^e, \quad (2)$$

откуда следует

$$p + \rho u^e = C. \quad (3)$$

Полагая здесь $p=0$ и определяя C из условия $r=R$ при $\theta=0$, из (3) найдем уравнение свободной поверхности вращающейся жидкости:

$$r = \frac{R}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\kappa} \sin^2 \theta\right)^{1/2}} \quad (4)$$

(R — расстояние между центром силы и ближайшими к нему точками поверхности). Эта фигура представляет собой сфероид, т. е. сплюснутую вдоль оси вращения сферу.

Если вращение жидкости происходит в однородном поле, то потенциал на единицу массы в декартовых координатах

$$u^e = gz - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2). \quad (5)$$

Подставляя эту функцию в интеграл вида (3), получим уравнение свободной поверхности

$$z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2), \quad (6)$$

где z_0 — координата точки поверхности на оси вращения. Таким образом, свободная поверхность жидкости представляет собой параболоид вращения.

В рассматриваемом случае на единицу массы жидкости действует сила

$$\mathbf{f} = -\nabla u^e = \mathbf{g} + \omega^2 \mathbf{r}' \quad (7)$$

(вектор \mathbf{r}' направлен по перпендикуляру от оси вращения); а сила, с которой жидкость действует на тело объема V_0 , погруженное в жидкость и вращающееся вместе с ней, равна (см. (11.9))

$$\mathbf{F}^\sigma = - \oint_{\sigma_0} p n d\sigma = -\rho \int_{V_0} \mathbf{f} dV. \quad (8)$$

Используя выражения (7) и (8), найдем

$$\mathbf{F}^\sigma = -\rho (\mathbf{g} + \omega^2 \mathbf{r}'_m) V_0, \quad (9)$$

где $\mathbf{r}'_m = \int_{V_0} \mathbf{r}' dV / V_0$ — направленный по перпендикуляру от оси вращения радиус-вектор центра масс однородного тела.

Теперь найдем результирующую силу \mathbf{F} , приложенную к телу (включая силы тяжести и инерции):

$$\mathbf{F} = \rho_T V_0 \mathbf{g} + \rho_T \omega^2 V_0 \mathbf{r}'_m + \mathbf{F}^\sigma.$$

Учитывая (9), эту силу можно представить в виде

$$\mathbf{F} = (\rho_T - \rho) (\mathbf{g} + \omega^2 \mathbf{r}'_m) V_0.$$

Отсюда следует, что при $\rho_T > \rho$ сила \mathbf{F} направлена вниз от оси вращения, а при $\rho_T < \rho$ вверх к оси вращения.

§ 11.2. Основные теоремы динамики идеальной жидкости

Течения идеальной жидкости, подчиняющиеся уравнениям (11.3)—(11.6), являются течениями, при которых сохраняется энтропия данной частицы жидкости. Такие движения называются изэнтропическими. Интеграл энтропии в рассматриваемом случае сразу следует из уравнения (11.6):

$$s = s_0. \quad (11.12)$$

Отсюда можно получить соотношение между давлением и плотностью, имеющее место вдоль траектории частицы. Например, найдем такое соотношение для идеального газа, уравнения состояния которого задаются функциями

$$e = c_\tau T, \quad p = \rho \frac{kT}{m}, \quad (11.13)$$

где c_τ — теплоемкость газа при постоянном объеме в расчете на единицу массы. С этой целью получим прежде всего энтропию идеального газа как функцию температуры T и удельного объема $\tau = 1/\rho$. Будем исходить из первого и второго начал термодинамики, записанных в виде уравнения*

$$Tds = de + pd(1/\rho). \quad (11.14)$$

Подставляя (11.13) в (11.14), получим

$$ds = c_\tau \frac{dT}{T} + \frac{k}{m} \rho d(1/\rho),$$

откуда с точностью до постоянной найдем

$$s = c_\tau \ln(T/\rho^{\frac{k}{mc_\tau}}). \quad (11.15)$$

* Начала термодинамики, взятые в виде (10.74) и (10.75), приводят к уравнению $\rho T \frac{ds}{dt} = \rho \frac{de}{dt} - P_{ik} v_{ik} + D$, из которого, учитывая (11.1) и (11.3), в случае обратимых процессов нетрудно получить (11.14).

Исключая отсюда T с помощью термического уравнения состояния (11.13), получим энтропию как функцию p и ρ

$$s = c_\tau \ln(\rho/\rho^\gamma), \quad (11.16)$$

где показатель $\gamma = 1 + \frac{k}{mc_\tau}$. Затем используем известное соотношение Майера*

$$c_p - c_\tau = \frac{k}{m} \quad (11.17)$$

между c_τ и c_p — теплоемкостью при постоянном давлении в расчете на единицу массы. Тогда для показателя γ найдем выражение

$$\gamma = c_p/c_\tau. \quad (11.18)$$

Итак, интеграл (11.12) в случае идеального газа приводит к соотношению

$$p/\rho^\gamma = \text{const}, \quad (11.19)$$

которое выполняется вдоль траектории данной частицы.

Напомним еще одну термодинамическую функцию, а именно, тепловую функцию, или энтальпию, приходящуюся на единицу массы и равную по определению

$$h = e + \frac{p}{\rho}. \quad (11.20)$$

Используя эту функцию, представим (11.14) в виде соотношения

$$dh = Tds + \frac{dp}{\rho}, \quad (11.21)$$

из которого вытекает, что *приращение энтальпии для изэнтропических течений равно*

$$dh = \frac{dp}{\rho}. \quad (11.22)$$

Теперь получим основные интегралы движения уравнений идеальной жидкости. С этой целью используем прежде всего уравнение кинетической энергии (10.60) с учетом (11.1). Тогда, имея в виду выражение для полной производной давления по времени

* Соотношение (11.17) вытекает из первого начала термодинамики $\frac{dQ}{\Delta m} = de + p d\tau$. Действительно, полагая по определению $c_p = \frac{1}{\Delta m} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p$, из первого начала и уравнений состояния (11.13) найдем, что

$$c_p = c_\tau + p \left(\frac{d\tau}{dT} \right)_p = c_\tau + \frac{k}{m}.$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_k} v_k, \quad (11.23)$$

найдем, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + u^e \right) = \frac{\partial u^e}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt}.$$

Отсюда следует один из важных интегралов движения идеальной жидкости. В самом деле, допуская, что гидродинамические и силовые поля стационарны, т. е. явно не зависят от времени ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), и принимая во внимание (11.22), придем к интегралу

$$\frac{v^2}{2} + h + u^e = C, \quad (11.24)$$

который называется интегралом Бернулли. Как видно из вывода, этот интеграл имеет место для изэнтропических стационарных течений идеальной жидкости, если объемные силы потенциальны и стационарны. При этом фигурирующая в интеграле Бернулли сумма кинетической энергии, энтальпии и потенциальной энергии во внешнем поле сохраняется вдоль траектории данной частицы среды.

Заметим, что при стационарном течении среды траектории частиц совпадают с линиями тока, т. е. с линиями, в каждой точке которых скорость жидкости в данный момент времени направлена по касательной к ним. Очевидно, что линии тока определяются уравнениями

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (11.25)$$

В случае изэнтропических течений несжимаемой жидкости $ds=0$ и $d(1/\rho)=0$, поэтому согласно (11.14) имеет место интеграл движения $e=\text{const}$. Учитывая его, из (11.24) получим *интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости*:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u^e = C. \quad (11.26)$$

Для иллюстрации рассмотрим простой пример. Пусть несжимаемая жидкость вытекает из достаточно широкого наполненного жидкостью резервуара высоты l через малое отверстие вблизи дна. Тогда течение на заметном интервале времени можно считать стационарным, а скорость частиц, находящихся на поверхности жидкости в сосуде, равной нулю. Направим ось z по вертикали вверх с началом отсчета в отверстии и определим

постоянную интеграла Бернулли для любой частицы на поверхности жидкости. В результате получим

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p}{\rho} + gl$$

(здесь v — скорость частицы, находящейся в отверстии, а p — атмосферное давление, которое полагается одинаковым как на поверхности жидкости в сосуде, так и в струе, вытекающей из отверстия). Отсюда для скорости истечения находим известную формулу Торричелли

$$v = \sqrt{2gl}.$$

Важное свойство идеальной жидкости устанавливается в теореме Томсона о сохранении циркуляции скорости.

Циркуляцией скорости вдоль замкнутого материального контура (т. е. контура, состоящего из частиц жидкости) называется интеграл

$$\oint \mathbf{v} d\mathbf{r}; \quad (11.27)$$

здесь контур задан функцией $\mathbf{r}(t, \varepsilon)$, где каждому значению параметра ε соответствует одна определенная частица среды, за исключением двух значений $\varepsilon=0, \varepsilon_0$, которым соответствует одна и та же частица, «закрывающая» контур (следовательно, параметр ε изменяется в пределах $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$); дифференциал $d\mathbf{r}$ связан с приращением параметра ε , а интегрирование ведется по ε от нуля до ε_0 .

Согласно теореме Томсона при изэнтропическом движении идеальной жидкости циркуляция скорости по замкнутому данному материальному контуру сохраняется, если объемные силы потенциальны. Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, нужно показать, что полная производная по времени от циркуляции (11.27) равна нулю. При дифференцировании циркуляции необходимо учесть, что с течением времени изменяется не только скорость частицы, но и форма контура, т. е. дифференцировать по времени нужно как скорость, так и элемент $d\mathbf{r}$ длины контура. Таким образом, для производной от циркуляции получим выражение

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} d\mathbf{r} = \oint \dot{\mathbf{v}} d\mathbf{r} + \oint \mathbf{v} \frac{d}{dt} d\mathbf{r}. \quad (11.28)$$

Имея в виду очевидные преобразования

$$\mathbf{v} \frac{d}{dt} d\mathbf{r} = v \delta v = \delta \left(\frac{v^2}{2} \right),$$

найдем, что второй интеграл в (11.28) равен

$$\oint \delta \left(\frac{v^2}{2} \right) = 0 \quad (11.29)$$

(как интеграл от полного дифференциала по замкнутому контуру). Что касается первого интеграла из (11.28), то с помощью теоремы Стокса его можно представить в виде

$$\oint \dot{\mathbf{v}} d\mathbf{r} = \int_{\sigma} (\text{rot } \dot{\mathbf{v}}) \delta\sigma, \quad (11.30)$$

где σ — поверхность, которая опирается на рассматриваемый контур, а $\delta\sigma$ — элемент этой поверхности. Теперь, учитывая изэнтропичность движения среды (см. (11.22)) и потенциальность объемной силы, представим уравнение Эйлера (11.4) в форме

$$\dot{\mathbf{v}} = -\text{grad}(h + u^e). \quad (11.31)$$

Подставляя (11.31) в (11.30), убедимся в том, что циркуляция ускорения равна нулю, поскольку $\text{rot grad} \equiv 0$. Следовательно, имеет место интеграл движения

$$\oint \mathbf{v} d\mathbf{r} = C. \quad (11.32)$$

Тем самым теорема Томсона доказана.

Из этой теоремы следует важное утверждение о сохранении вихревого движения идеальной жидкости. Действительно, применяя формулу Стокса к левой части (11.32) и используя то, что $\omega = \text{rot } \mathbf{v}/2$, найдем интеграл движения в виде

$$\int_{\sigma} \omega d\sigma = C, \quad (11.33)$$

согласно которому поток угловой скорости (или поток вихря скорости) через данную материальную поверхность при ее движении сохраняется. Если же в начальный момент времени $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ во всей среде, то и в последующие моменты времени во всей среде $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, т. е. имеет место движение идеальной жидкости, которое называется безвихревым, или потенциальным.

Заметим, что в случае, когда траектория частицы проходит вдоль поверхности тела, обтекаемого средой, в среде нельзя провести материальный контур, охватывающий такую траекторию. Поэтому теорема Томсона и теорема о сохранении вихря, строго говоря, неприменима в тонком пристеночном (пограничном) слое. Более того, в этом слое сама модель идеальной жидкости становится неприменимой ввиду заметной роли вязкости среды. Несмотря на это, в ряде случаев, например в случае хорошо обтекаемых тел, движение среды почти везде близко к потенциальному течению.

Если изэнтропическое потенциальное течение идеальной жидкости совершается под действием потенциальных объемных сил, то для таких течений имеет место интеграл движения, называемый

интегралом Коши. Действительно, поскольку энтропия сохраняется, а заданные силы потенциальны, справедливо уравнение (11.31), которое запишем в форме

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k = - \frac{\partial}{\partial x_i} (h + u^e). \quad (11.34)$$

Теперь учтем, что движение среды потенциально. Поэтому скорость может быть представлена в виде градиента некоторой скалярной функции

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi \quad (11.35)$$

(функция φ называется потенциалом скорости). Подставляя (11.35) в (11.34) и выполняя преобразование

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v^2}{2} \right),$$

найдем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + h + u^e \right) = 0,$$

откуда следует *интеграл Коши*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + h + u^e = f(t), \quad (11.36)$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени.

В отличие от постоянной в интеграле Бернулли, которая имеет, вообще говоря, различные значения для траекторий разных частиц среды, *произвольная функция $f(t)$ в интеграле Коши одинакова во всем объеме, занятом средой*. Чтобы определить $f(t)$, достаточно найти левую часть интеграла Коши как функцию времени в любой одной точке потока.

Отметим, что в случае стационарных течений $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \right)$ функцию $f(t)$ следует положить равной произвольной постоянной C , которая в отличие от постоянной интеграла Бернулли имеет одно и то же значение для всех частиц жидкости. Таким образом, для *стационарного потенциального течения* интеграл Коши принимает вид

$$\frac{v^2}{2} + h + u^e = C. \quad (11.37)$$

Пример 11.3. *Стационарное течение несжимаемой идеальной жидкости в горизонтально расположенной трубке переменного поперечного сечения.*

Найти в указанном случае соотношение между скоростями и давлениями жидкости в поперечных сечениях σ_1 и σ_2 .

Из уравнения непрерывности (10.41) в интегральной форме ввиду стационарности потока будем иметь

$$\oint_{\sigma_0} \rho v d\sigma = 0. \quad (1)$$

Применяя это уравнение к объему, ограниченному поверхностью трубки и сечениями σ_1 и σ_2 , получим, что

$$-\rho v_1 \sigma_1 + \rho v_2 \sigma_2 = 0,$$

откуда

$$v_2 = v_1 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right). \quad (2)$$

Поскольку потенциал u^e поля тяжести постоянен вдоль течения, интеграл (11.26) приводит к соотношению

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2},$$

которое с помощью (2) можно записать в виде

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \left[1 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что с уменьшением сечения ($\sigma_1 > \sigma_2$) скорость потока увеличивается, а давление падает.

Пример 11.4. *Стационарное течение сжимаемого идеального газа.*

Пусть изменение потенциала поля тяжести вдоль линий тока пренебрежимо мало, а плотность, скорость и температура газа на бесконечном расстоянии от обтекаемого газом неподвижного тела соответственно равны ρ_∞ , v_∞ и T_∞ . Найти значения температуры, плотности и давления газа в критической точке (т. е. точке поверхности обтекаемого тела, где скорость потока обращается в нуль).

Согласно условию из интеграла (11.24) имеем

$$\frac{v_\infty^2}{2} + h_\infty = h_c, \quad (1)$$

где h_∞ и h_c — значения энтальпии на бесконечности и в критической точке соответственно (для других величин индексы ∞ и c будем относить к тем же состояниям).

Из определения энтальпии $h = e + \frac{p}{\rho}$ и соотношений (11.13), (11.17) следует, что энтальпия идеального газа равна

$$h = c_p T. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим соотношение для температур

$$\frac{T_c}{T_\infty} = 1 + \frac{v_\infty^2}{2c_p T_\infty}. \quad (3)$$

Затем, используя (11.15), (11.17) и (11.18), перепишем условие изэнтропичности течения в виде

$$\frac{T_c}{T_\infty} = \left(\frac{\rho_c}{\rho_\infty} \right)^{\gamma-1}. \quad (4)$$

Тогда из (3) и (4) можно определить связь плотностей

$$\frac{\rho_c}{\rho_\infty} = \left(1 + \frac{v_\infty^2}{2c_p T_\infty} \right)^{1/\gamma-1}.$$

Наконец, привлекая соотношение между давлением и плотностью (см. (11.19))

$$\frac{p_c}{p_\infty} = \left(\frac{\rho_c}{\rho_\infty} \right)^\gamma,$$

найдем

$$\frac{p_c}{p_\infty} = \left(1 + \frac{v_\infty^2}{2c_p T_\infty} \right)^{\gamma/\gamma-1}.$$

§ 11.3. Потoki импульса и энергии

Уравнения импульса и энергии идеальной жидкости могут быть представлены в виде уравнения непрерывности для соответствующей величины. Прежде всего убедимся, что для любой тензорной величины Q в силу уравнения непрерывности (10.39) имеет место равенство

$$\rho \frac{dQ}{dt} = \rho \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x_k} v_k \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho Q) + \frac{\partial (\rho v_k Q)}{\partial x_k}. \quad (11.38)$$

Полагая здесь $Q = v_i$, найдем

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_k v_i)}{\partial x_k}. \quad (11.39)$$

С другой стороны, уравнение Эйлера можно записать в виде

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial (\rho \delta_{ik})}{\partial x_k} + \rho f_i. \quad (11.40)$$

Сопоставляя (11.39) и (11.40), получим *уравнение непрерывности для компоненты импульса* ρv_i , приходящегося на единицу объема:

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = \rho f_i, \quad (11.41)$$

здесь $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \rho \delta_{ik}$.

Для выяснения смысла тензора Π_{ik} проинтегрируем каждый член этого уравнения по фиксированному объему V_0 пространства и применим преобразование Остроградского. Тогда найдем интегральную форму уравнения (11.41)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho v_i dV = - \oint_{\sigma_0} \Pi_{ik} d\sigma_k \quad (11.42)$$

(в этом соотношении мы опустили внешний источник изменения импульса — силу \mathbf{f}). Из сопоставления левой и правой частей (11.42) видно, что поверхностный интеграл представляет собой разность i -тых компонент импульса частиц среды, вытекающих и втекающих за единицу времени через поверхность σ_0 , охватывающую объем V_0 . Таким образом, $\Pi_{ik} d\sigma_k$ есть i -тая компонента импульса, протекающего за единицу времени через площадку $d\sigma$, а Π_{ik} — i -тая компонента импульса среды, протекающей за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси x_k . Поэтому тензор Π_{ik} называется тензором плотности потока импульса.

Теперь подставим в (11.38) величину Q , равную полной энергии $\frac{v^2}{2} + e$, приходящейся на единицу массы. Тогда получим, что

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + e \right) = \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho v_i \left(\frac{v^2}{2} + e \right). \quad (11.43)$$

С другой стороны, уравнение (10.67) в случае изэнтропических течений идеальной жидкости принимает вид

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + e \right) = - \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} + \rho f_i v_i. \quad (11.44)$$

Из последних двух уравнений, имея в виду определение энтальпии, найдем *уравнение непрерывности для энергии*

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho v_i \left(\frac{v^2}{2} + h \right) = 0 \quad (11.45)$$

(здесь опять-таки опущен член с силой \mathbf{f}).

Для изменения энергии среды в заданном объеме V_0 за единицу времени аналогично (11.42) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) dV = - \oint_{\sigma_0} \rho v_i \left(\frac{v^2}{2} + h \right) d\sigma_i, \quad (11.46)$$

откуда видно, что величина

$$\rho v \left(\frac{v^2}{2} + h \right) \quad (11.47)$$

представляет собой плотность потока энергии (вектор Умова). Этот поток складывается из потока полной энергии $\rho v \left(\frac{v^2}{2} + e \right)$ и мощности ρv сил давления.

§ 11.4. Несжимаемая жидкость

Уравнения движения идеальной жидкости заметно упрощаются, если жидкость можно считать несжимаемой, т. е. ее плотность массы ρ (при изменении давления в широком диапазоне) можно считать равной постоянной величине ρ_0 во всем объеме жидкости в любой момент времени*. Поскольку плотность известна, то движение среды определяется полями давления и скорости. Действительно, в этом случае уравнение непрерывности и уравнение Эйлера принимают вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (11.48)$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \operatorname{grad} p + \rho_0 \mathbf{f} \quad (11.49)$$

и являются системой уравнений, замкнутой относительно четырех функций $p(\mathbf{r}, t)$, $v_i(\mathbf{r}, t)$ ($i=1, 2, 3$). Поэтому для решения задачи о механическом движении несжимаемой идеальной жидкости не требуется знания внутренней энергии и энтропии.

Уравнения идеальной жидкости в особенности упрощаются, если течение несжимаемой жидкости потенциально. Тогда уравнение непрерывности (11.48) после подстановки $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$ сводится к уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0 \quad (11.50)$$

для потенциала φ скорости течения (как видно, потенциал скорости подчиняется тому же уравнению, что и потенциал электроста-

* Различают однородную и неоднородную несжимаемые жидкости. В первом случае плотность массы одинакова и постоянна для всех частиц, а во втором случае различна для разных частиц, но постоянна для каждой данной частицы. Мы ограничимся случаем несжимаемой однородной жидкости.

тического поля в отсутствие зарядов). В случае неподвижной твердой стенки граничным условием для этого уравнения является условие (см. (11.8)):

$$v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0. \quad (11.51)$$

Если же твердая стенка движется заданным образом, то $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ должна быть приравнена соответствующей известной функции времени и координат.

Что касается уравнения Эйлера, то оно для потенциальных течений несжимаемой жидкости под действием потенциальных объемных сил ввиду постоянства внутренней энергии (см. с. 492) приводит к интегралу Коши вида

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad } \varphi)^2 + \frac{p}{\rho} + u^e = f(t). \quad (11.52)$$

Отсюда вытекает, что в случае *стационарного потенциального течения несжимаемой идеальной жидкости* имеет место интеграл

$$\frac{1}{2} (\text{grad } \varphi)^2 + \frac{p}{\rho} + u^e = C, \quad (11.53)$$

где постоянная C одинакова для всех частиц жидкости.

Пример 11.5. *Движение сферы в неограниченной несжимаемой жидкости.*

Сфера радиуса a в отсутствие объемных сил движется поступательно в неограниченной несжимаемой и безвихревой жидкости со скоростью $\mathbf{U}(t)$, направление которой коллинеарно некоторой неподвижной прямой. Найти реакцию жидкости на сферу.

Положим сначала скорость \mathbf{U} постоянной и рассмотрим задачу в системе отсчета S' , связанной со сферой. Поскольку необходимо найти решение уравнения Лапласа для потенциала φ' , удовлетворяющего граничным условиям на поверхности сферы, воспользуемся сферической системой координат с началом в центре сферы и полярной осью, направленной по вектору \mathbf{U} . Тогда граничные условия задачи будут иметь вид

$$\left. \frac{\partial \varphi'}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad \varphi' |_{r=\infty} = -Ur \cos \theta. \quad (1)$$

Учитывая, что течение обладает азимутальной симметрией, решение уравнения Лапласа можно искать в виде функции

$$\varphi' = R(r)P(\theta), \quad (2)$$

где $R(r)$ и $P(\theta)$ — функции, зависящие соответственно только от r и θ . Подставляя (2) в уравнение Лапласа

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi'}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi'}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial \varepsilon^2} = 0,$$

получим

$$P(\theta) \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R(r)}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = 0. \quad (3)$$

Отсюда находим, что R и P должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \lambda R = 0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \lambda P = 0, \quad (5)$$

где λ — постоянная разделения. Как известно, уравнение (5) допускает однозначные непрерывные решения при $\lambda = l(l+1)$ ($l=0, 1, 2, \dots$). Такими решениями являются полиномы Лежандра $P_l(\cos \theta)$ (например, $P_0=1, P_1=\cos \theta$). Далее из уравнения (4) при $\lambda = l(l+1)$ для радиальной функции найдем

$$R = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}},$$

где A и B — произвольные постоянные. Следовательно, решение уравнения Лапласа (3) может быть записано в виде

$$\varphi' = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta). \quad (6)$$

Используя граничное условие на бесконечности, найдем

$$A_l = -U \delta_{1l}; \quad (7)$$

затем из условия на сфере получим

$$A_l l a^{l-1} - B_l (l+1) a^{-l-2} = 0. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что

$$B_l = -\frac{U}{2} a^3 \delta_{1l}. \quad (9)$$

Таким образом, получим решение задачи об обтекании неподвижной сферы в виде

$$\varphi' = -U \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta. \quad (10)$$

Нетрудно найти отличные от нуля компоненты скорости \mathbf{v}' течения относительно системы S' :

$$\begin{aligned} v'_r &= \frac{\partial \varphi'}{\partial r} = -U \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta, \\ v'_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi'}{\partial \theta} = U \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin \theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Скорость течения на сфере будет равна

$$v' |_{r=a} = v'_\theta |_{r=a} = \frac{3}{2} U \sin \theta, \quad (12)$$

откуда видно, что точки $\theta=0, \pi$ являются критическими (при $\theta=0, \pi, \mathbf{v}'=0$), а в точках $\theta=\pi/2$ скорость максимальна и в полтора раза превышает скорость потока на бесконечности.

Поскольку поток при обтекании сферы стационарен, воспользуемся интегралом (11.26) для определения давления жидкости на сфере. Подставляя (12) в этот интеграл, получим

$$p = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right). \quad (13)$$

Отсюда ясно, что суммарная сила \mathbf{F}^σ давления жидкости на сфере равна нулю. В этом можно убедиться, вычисляя интеграл (11.9). Например, для проекции силы на полярную ось в результате подстановки (13) в (11.9) найдем

$$F_z^\sigma = - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} p \cos \theta a^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 0. \quad (14)$$

Вывод об отсутствии сопротивления движущемуся телу называется парадоксом д'Аламбера, поскольку из опыта известно, что такое сопротивление существует. Этот парадокс является следствием неправомерного пренебрежения вязкими свойствами жидкости в пограничном слое.

Теперь легко получить решение задачи о течении (покоящейся на бесконечности) жидкости под действием движущейся сферы. Для этого перейдем из системы S' с началом в центре сферы в систему S , относительно которой скорость сферы равна \mathbf{U} . При этом относительно S скорость течения равна $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{v}'$, откуда следует, что потенциал φ скорости \mathbf{v} связан с потенциалом φ' соотношением

$$\varphi = \mathbf{U}\mathbf{r} + \varphi',$$

т. е.

$$\varphi = - \frac{a^3 U}{2} \frac{\cos \theta}{r^2}.$$

Ясно также, что при движении сферы со скоростью $\mathbf{U}(t)$, зависящей от времени, потенциал имеет аналогичный вид

$$\varphi = -\frac{a^3}{2} U(t) \frac{\cos \theta}{r^2}.$$

Потенциал φ , описывающий нестационарное течение жидкости относительно S , выражен через переменные r и θ подвижной системы S' с началом в центре сферы и имеет, следовательно, вид $\varphi(x, y, z - \int U(t) dt, t)$. Учитывая это, из интеграла Коши (11.52) найдем

$$\rho = \rho_\infty - \frac{\rho(\nabla\varphi)^2}{2} - \rho \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} U(t) \right). \quad (15)$$

Подставляя (15) при $r=a$ в (11.9) и имея в виду, что отличный от нуля вклад дает лишь член, пропорциональный $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, для реакции жидкости получим выражение

$$\begin{aligned} F_z^c &= \oint_{\sigma} \rho \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)_{r=a} d\sigma_z = -\frac{\rho a}{2} \dot{U} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta a^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{\pi \rho a^3}{3} \dot{U} \cos^3 \theta \Big|_0^{\pi} = -\frac{2\pi}{3} \rho a^3 \dot{U}. \end{aligned} \quad (16)$$

Следовательно, реакция жидкости как бы увеличивает массу сферы на величину, равную половине массы жидкости, вытесненной сферой. По этой причине величина $\frac{2}{3} \pi \rho a^3$ называется присоединенной массой.

Пример 11.6. *Подъемная сила Жуковского.*

Стационарный поток несжимаемой жидкости в отсутствие внешних сил обтекает неподвижный бесконечный круговой цилиндр радиуса a , причем скорость v_∞ потока на бесконечности перпендикулярна оси цилиндра. Найти потенциал скорости течения, при котором реакция жидкости на тело отлична от нуля.

Направим ось z по оси цилиндра, а ось x по вектору v_∞ (рис. 11.1, а). Ввиду двумерности задачи, запишем уравнение Лапласа (11.50) в полярных координатах r, θ

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0. \quad (1)$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять граничному условию (11.51) на поверхности цилиндра

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \quad (2)$$

и условию на бесконечности

$$\varphi|_{r \rightarrow \infty} = v_{\infty} x = v_{\infty} r \cos \theta. \quad (3)$$

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\varphi = R(r) \Phi(\theta). \quad (4)$$

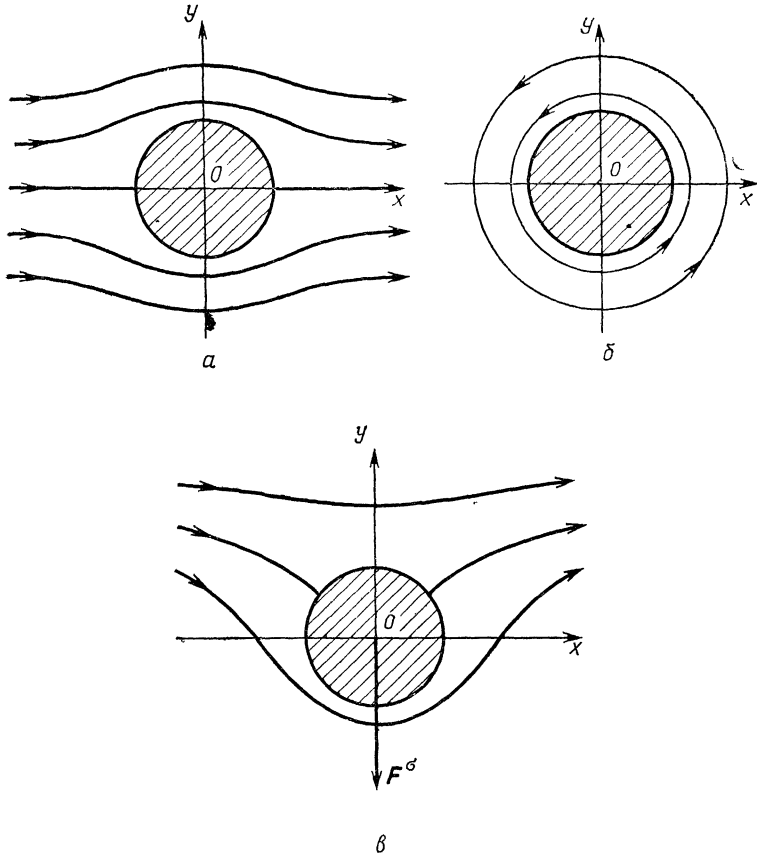


Рис. 11.1

Подставляя (4) в (1), найдем уравнения для функции $R(r)$ и $\Phi(\theta)$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} + \lambda^2 \Phi = 0, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \lambda^2 \frac{R}{r} = 0, \quad (6)$$

где λ^2 — постоянная разделения. Уравнение (5) допускает частные решения вида

$$\Phi(\theta) = \alpha \cos \lambda \theta + \beta \sin \lambda \theta.$$

Поскольку значения угла $\theta=0$ и $\theta=2\pi$ должны соответствовать одной и той же точке поля скоростей, то $\Phi(\theta) = \Phi(\theta+2\pi)$. Это условие приводит к требованию $\lambda=m$, где $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Подставляя значения $\lambda=m$ в уравнение (6), найдем его частные решения

$$R_m = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r & \text{при } m = 0, \\ A_m r^m + B_m r^{-m} & \text{при } m = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Таким образом, уравнение Лапласа (1) имеет решение

$$\varphi = \sum_{m=0}^{+\infty} R_m(r) (\alpha_m \cos m\theta + \beta_m \sin m\theta). \quad (7)$$

Подставляя (7) в граничные условия (3) и (2), найдем постоянные

$$\begin{aligned} A_m &= v_\infty \delta_{1m}, & B_m &= v_\infty a^2 \delta_{1m}, \\ \alpha_m &= \delta_{1m}, & \beta_m &= 0 \end{aligned}$$

и тем самым получим искомый потенциал

$$\varphi = v_\infty \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta.$$

Отсюда легко найти компоненты скорости в любой точке потока

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta, \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -v_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta, \end{aligned}$$

а также на поверхности цилиндра

$$v_r|_{r=a} = 0, \quad v_\theta|_{r=a} = -2v_\infty \sin \theta.$$

(как видно, в точках поверхности при $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ скорость по абсолютной величине в два раза превышает значение скорости на бесконечности). Далее, используя интеграл (11.53)

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 - \frac{1}{2} \rho v^2,$$

найдем реакцию жидкости на единицу длины цилиндра

$$F^{\sigma} = - \int_0^{2\pi} (p)_{r=a} na d\theta = 0,$$

т. е. снова придем к парадоксу д'Аламбера. Однако в действительности в пограничном слое около поверхности цилиндра вследствие вязкости среды возникает движение с циркуляцией, отличной от нуля, т. е., вообще говоря, вихревое движение. Оставаясь в рамках модели идеальной жидкости и не рассматривая вопрос об образовании циркуляции, зададим такое движение (во всем пространстве, за исключением области $r=0$) потенциалом

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (\Gamma = \text{const}). \quad (8)$$

Этот потенциал удовлетворяет уравнению (1) и определяет поле скорости (рис. 11.1, б)

$$v_r = 0, \quad v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad (9)$$

причем

$$(\text{rot } \mathbf{v})_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rv_{\theta}) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] = 0$$

везде, кроме $r=0$. Таким образом, циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, не охватывающему точку $r=0$, равна нулю, а по любому замкнутому контуру, охватывающему точку $r=0$, отлична от нуля. Например, циркуляция скорости по некоторой линии тока, т. е. по окружности с центром в начале координат, равна

$$\oint \mathbf{v} d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} v_{\theta} r d\theta = \Gamma.$$

(заметим, что задача о магнитном поле бесконечного прямолинейного постоянного тока аналогична задаче о рассматриваемом течении с потенциалом (8) — см. пример 2.2; в частности, напряженность такого магнитного поля описывается формулами вида (9)).

Теперь рассмотрим течение, определяемое потенциалом, равным сумме

$$\varphi = v_{\infty} \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta.$$

Этот потенциал удовлетворяет условиям (2), (3) и определяет поле скорости (рис. 11.1, в)

$$v_r = v_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta,$$

$$v_\theta = -v_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Отсюда

$$v_r|_{r=a} = 0, \quad v_\theta|_{r=a} = \frac{\Gamma}{2\pi a} - 2v_\infty \sin \theta.$$

Далее, используя интеграл (11.53), найдем реакцию жидкости на единицу длины цилиндра

$$F_x^\sigma = - \int_0^{2\pi} (p)_{r=a} \cos \theta \cdot a d\theta = 0, \quad (10)$$

$$F_y^\sigma = - \int_0^{2\pi} (p)_{r=a} \sin \theta \cdot a d\theta =$$

$$= \frac{\rho a}{2} \int_0^{2\pi} (v^2)_{r=a} \sin \theta d\theta = -\rho \Gamma v_\infty. \quad (11)$$

Как видно, поток с циркуляцией действует на цилиндр с силой, перпендикулярной направлению потока на бесконечности (знак F_y^σ , конечно, зависит от знака Γ). Эта сила называется подъемной силой Жуковского. Теоретический расчет величины циркуляции Γ может быть проведен на основе постулата Жуковского — Чаплыгина (см., например, [51], [52]).

§ 11.5. Звуковые волны

Рассмотрим звуковые волны в жидкостях и газах, используя модель идеальной жидкости. Пусть среда (в отсутствие объемных сил) находится в равновесном состоянии, которое задано постоянными плотностью ρ_0 и давлением p_0 . Пусть также по какой-либо причине в среде возникают малые отклонения плотности ρ' и давления p' от равновесных значений этих величин. Таким образом, плотность и давление среды в возмущенном состоянии будут соответственно равны

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad (11.54)$$

где ρ' и p' зависят от координат и времени и удовлетворяют условиям: $|\rho'| \ll \rho_0$, $|p'| \ll p_0$.

Найдем уравнения, которым подчинены ρ' и p' , ограничиваясь линейным приближением. Для этого подставим (11.54) в уравнение

непрерывности и уравнение Эйлера и опустим члены второго порядка малости, имея в виду, что величины ρ' , p' и скорость частиц \mathbf{v} являются величинами первого порядка малости (ниже будет показано, что скорость \mathbf{v} должна быть малой по сравнению со скоростью звука). Тогда полные производные по времени можно заменить частными производными, например

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho'}{\partial t}, \quad (11.55)$$

а из уравнений (11.3) и (11.4) в том же приближении найдем

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (11.56)$$

$$\rho_0 \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} p' = 0. \quad (11.57)$$

Ввиду изэнтропичности движения идеальной жидкости между приращениями давления и плотности данной частицы среды имеет место соотношение

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s (\rho - \rho_0), \quad (11.58)$$

где $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$ означает производную, взятую при постоянной энтропии в равновесном состоянии. Это соотношение согласно (11.54) можно записать в виде

$$p' = c_0^2 \rho', \quad (11.59)$$

где

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s. \quad (11.60)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial\rho'}{\partial t}, \quad \operatorname{grad} p' = c_0^2 \operatorname{grad} \rho', \quad (11.61)$$

и исключая p' из уравнения (11.57), получим

$$\rho_0 \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + c_0^2 \operatorname{grad} \rho' = 0. \quad (11.62)$$

Наконец, продифференцируем (11.56) частным образом по времени и применим операцию дивергенции к (11.62). Затем, исключая из полученных выражений $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{v}$ и имея в виду, что лапласиан $\Delta \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad}$, найдем волновое уравнение

$$\Delta \rho' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0 \quad (11.63)$$

для отклонения плотности от ее равновесного значения. Такому же уравнению подчинено отклонение давления p' (поскольку p' пропорционально ρ'), а также отклонение температуры T' от ее равновесного значения (поскольку T' пропорционально p'):

$$T' = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s p'. \quad (11.64)$$

Теперь убедимся в том, что нестационарное поле скорости \mathbf{v} , подчиненное уравнениям (11.56) и (11.62), является потенциальным полем, также удовлетворяющим волновому уравнению. С этой целью воспользуемся теоремой Гельмгольца, согласно которой векторное поле, в частности поле скорости, может быть представлено в виде *суммы потенциального и соленоидального полей*. Поэтому положим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad (11.65)$$

где \mathbf{v}_1 — *потенциальное* поле, т. е.

$$\text{rot } \mathbf{v}_1 = 0, \quad (11.66)$$

а \mathbf{v}_2 — *соленоидальное* поле, т. е.

$$\text{div } \mathbf{v}_2 = 0. \quad (11.67)$$

Подставляя (11.65) в (11.56) и учитывая (11.67), получим

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v}_1 = 0, \quad (11.68)$$

а применяя оператор rot к (11.62) и используя (11.66), найдем

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v}_2 = 0. \quad (11.69)$$

Из последнего уравнения ясно, что $\text{rot } \mathbf{v}_2$, а следовательно, и \mathbf{v}_2 являются стационарными полями. Таким образом, чтобы рассмотреть нестационарный процесс распространения малых возмущений в среде, можно положить $\mathbf{v}_2 = 0$, т. е.

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi. \quad (11.70)$$

Далее подставим 11.70 в уравнение (11.56) и (11.62). Тогда получим

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi = 0, \quad (11.71)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + c_0^2 \rho' = 0. \quad (11.72)$$

Следует заметить, что уравнение (11.72), вообще говоря, имеет вид

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + c_0^2 \rho' = f(t),$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени; однако эту функцию можно приравнять нулю, поскольку скорость определяется производными функции Φ по координатам и, следовательно, без ограничения общности Φ можно заменить на $\Phi + \frac{1}{c_0} \int f(t) dt$. Дифференцируя (11.72) по времени и исключая $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ из (11.71), найдем, что потенциал скорости подчинен волновому уравнению

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (11.73)$$

(применяя к (11.73) оператор grad, можно получить волновое уравнение для скорости \mathbf{v}).

Итак, все малые возмущения равновесного состояния среды подчиняются волновому уравнению с одной и той же постоянной c_0 и, следовательно, распространяются в виде волн со скоростью, определяемой этой постоянной. Рассматриваемые волны являются волнами с *малыми* амплитудами и связаны со *сжимаемостью* жидкости, т. е. с изменением объема частиц среды, поскольку $\operatorname{div} \mathbf{v} \neq 0$ (см. (10.34) и (11.56)). Такие волны называются *звуковыми волнами*, а постоянная c_0 соответственно называется *скоростью звука*. Ее можно вычислить, зная уравнение адиабаты для данной среды. Например, в случае идеального газа, используя (11.19) и (11.13), получим

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \gamma C \rho_0^{\gamma-1} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = \gamma \frac{kT_0}{m}. \quad (11.74)$$

Таким образом, *скорость звука в идеальном газе примерно равна средней тепловой скорости его молекул.*

Если потенциал скорости в звуковой волне зависит от времени и от одной из координат, например от x , то (11.73) сводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (11.75)$$

которое, как нетрудно убедиться, имеет решение

$$\Phi = \Phi^+(x - c_0 t) + \Phi^-(x + c_0 t), \quad (11.76)$$

где φ^+ и φ^- — произвольные функции, зависящие от начальных и граничных условий. Из вида решения $\varphi^+(x-c_0t)$ ясно, что значения φ^+ одинаковы при значениях аргументов, удовлетворяющих условию $x-c_0t = \text{const}$. Следовательно, функция $\varphi^+(x-c_0t)$ описывает распространение некоторого возмущения в положительном направлении оси x со скоростью c_0 без искажения начальной формы этого возмущения. Функция $\varphi^-(x+c_0t)$ описывает аналогичную волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси x . Такие волны называются бегущими плоскими волнами.

Если возмущения, характеризующие звуковую волну, являются гармоническими функциями времени, то волна называется монохроматической. Важным частным случаем таких волн являются бегущие плоские монохроматические волны. Значение этого класса волн весьма велико, поскольку любую волну можно представить в виде совокупности различных монохроматических плоских волн, т. е. в виде разложения в ряд или интеграл Фурье. Решение волнового уравнения для случая бегущих плоских монохроматических волн должно иметь вид

$$\varphi = a \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \alpha), \quad (11.77)$$

где постоянные a , \mathbf{k} , ω и α называются соответственно амплитудой, волновым вектором, частотой и начальной фазой волны, а скалярная функция $\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \alpha$ — фазой волны. Приведем также более удобную для вычислений форму вещественной функции (11.77), записанной в виде действительной части от комплексной функции

$$\varphi = \text{Re} \{ A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \}, \quad (11.78)$$

где $A = a e^{i\alpha}$ — комплексная «амплитуда».

Подставляя (11.78) (или (11.77)) в (11.73), убедимся в том, что $\omega^2 = c_0^2 k^2$. Следовательно, ω и k должны быть связаны между собой соотношением

$$\omega = c_0 k; \quad (11.79)$$

при этом волновой вектор полагается равным

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c_0} \mathbf{n}, \quad (11.79')$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении распространения волны.

Таким образом, волновое уравнение имеет решение

$$\varphi = \text{Re} \{ A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - kc_0 t)} \}, \quad (11.80)$$

где A — произвольная постоянная.

Решение (11.80) описывает плоскую монохроматическую волну, фронт которой распространяется со скоростью c_0 в направле-

нии волнового вектора. Действительно, продифференцировав по времени соотношение $\mathbf{kr} - kc_0t = \text{const}$, определяющее данное значение фазы, найдем для скорости c распространения фронта вдоль \mathbf{k} , значение $c = c_0$. Скорость c называется фазовой скоростью. Согласно (11.79) ее можно представить в виде

$$c = \frac{\omega}{k}. \quad (11.81)$$

Отметим также, что соотношение (11.79), характеризующее монохроматическую волну, справедливо в системе отсчета, связанной со средой, в которой распространяется волна (конечно, система связывается со средой в ее невозмущенном состоянии).

Итак, постоянная c_0 в полученных выше волновых уравнениях равна фазовой скорости распространения плоской монохроматической звуковой волны или, кратко говоря, скорости звука. Что касается скорости \mathbf{v} движения частиц жидкости, то она по направлению коллинеарна волновому вектору (в этом случае волна называется продольной), а по величине много меньше скорости звука. Действительно, рассматривая волну с потенциалом

$$\varphi = a \cos(\mathbf{kr} - kc_0t),$$

найдем, что

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi = \varphi' \mathbf{k}, \quad (11.82)$$

а

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -kc_0\varphi'. \quad (11.82')$$

С помощью этих выражений из (11.72) получим, что $\rho_0 v = c_0 \rho'$. Отсюда ввиду малости ρ' по сравнению с ρ_0 следует

$$\frac{v}{v_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} \ll 1. \quad (11.83)$$

Таковы основные свойства плоской монохроматической звуковой волны.

В общем случае может иметь место дисперсия скорости звука, т. е. зависимость фазовой скорости от частоты волны,

$$\frac{\omega}{k} = c = c(\omega). \quad (11.84)$$

Дисперсия звука определяется законом дисперсии, т. е. функцией вида

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) \quad (11.85)$$

(см. пример 11.9, а также § 12.3). Этот закон определяет групповую скорость

$$\mathbf{U} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}, \quad (11.86)$$

т. е. скорость переноса энергии группой монохроматических волн («волновым пакетом»). Фазовая и групповая скорости монохроматической волны (11.80) ввиду отсутствия дисперсии совпадают.

Пример. 11.7. Эффект Доплера.

Найти частоту звука, воспринимаемого наблюдателем, движущимся относительно источника звука с постоянной скоростью.

Рассмотрим случай, когда источник звука частоты ω покоится относительно невозмущенной звуком среды, а наблюдатель движется относительно среды со скоростью \mathbf{V} . В системе S , связанной с источником и средой, фаза монохроматической волны равна $\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$, причем $\omega = c_0 k$. Совершим преобразование $\mathbf{r} = \mathbf{V}t + \mathbf{r}'$ к системе S' , связанной с наблюдателем, и учтем инвариантность фазы, т. е. соотношение

$$\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k}'\mathbf{r}' - \omega' t, \quad (1)$$

где \mathbf{k}' и ω' — волновой вектор и частота звука в системе S' . Тогда получим

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}, \quad \omega' = \omega - \mathbf{V}\mathbf{k}. \quad (2)$$

Используя соотношение (11.79) (которое выполняется в системе S , связанной со средой) и вводя угол θ между направлением распространения волны и скоростью наблюдателя, из (2) окончательно находим

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{V}{c_0} \cos \theta \right). \quad (3)$$

Если же источник звука частоты ω' движется относительно неподвижной среды и наблюдателя со скоростью \mathbf{V} , то для частоты, наблюдаемой в системе S , получим

$$\omega = \frac{\omega'}{1 - \frac{V}{c_0} \cos \theta}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) видно, что частота звука, регистрируемая наблюдателем, движущимся относительно источника звука, отличается от частоты источника (эффект Доплера). Например, из формулы (4) видно, что для удаляющегося источника ($\cos \theta < 0$ при \mathbf{k} , направленном на наблюдателя) $\omega < \omega'$, а для приближающегося источника ($\cos \theta > 0$) $\omega > \omega'$. Если же $V \cos \theta > c_0$, то $\omega < 0$; следовательно, если источник посылает сначала один звуковой сигнал, а затем другой, то более поздний сигнал дойдет до наблюдателя первым.

§ 11.6. Ударные волны

Рассмотрим стационарный однородный поток газа, движущийся со скоростью V относительно неподвижной системы отсчета S . Если скорость V потока превышает скорость c звука в газе (относительно самого газа), то поток называется сверхзвуковым; если же V меньше c , то поток называется дозвуковым. Свойства сверхзвукового потока существенно отличаются от свойств дозвукового течения. В связи с этим важной характеристикой потока является отношение M скорости потока к скорости звука в нем:

$$M = \frac{V}{c}. \quad (11.87)$$

Это число называется числом Маха.

Одна из особенностей сверхзвукового потока заключается в том, что малые возмущения плотности газа (и других величин) не могут в таком потоке распространяться по любому направлению. Действительно, скорость распространения возмущений относительно S равна сумме $\mathbf{V} + c\mathbf{n}$, где \mathbf{n} — направление распространения возмущений относительно газа. Поэтому все возможные скорости распространения возмущений относительно S могут быть получены, если из неподвижной точки O (в которой возникают возмущения) отложить вектор $\mathbf{V} + c\mathbf{n}$ и при фиксированном \mathbf{V} придавать вектору \mathbf{n} все возможные направления. В результате такого изменения вектора \mathbf{n} конец вектора $\mathbf{V} + c\mathbf{n}$ будет скользить по сфере радиуса c с центром в конце вектора \mathbf{V} .

Из сказанного ясно, что в дозвуковом потоке ($V < c$) вектор $\mathbf{V} + c\mathbf{n}$ может иметь любое направление, в то время как в сверхзвуковом потоке ($V > c$) вектор $\mathbf{V} + c\mathbf{n}$ (при любом направлении \mathbf{n}) будет лежать внутри конуса (или на его поверхности) с вершиной в источнике возмущений O и с образующей, касающейся сферы радиуса c с центром в конце вектора \mathbf{V} . Угол α полураствора этого конуса определяется равенством

$$\sin \alpha = \frac{c}{V} = \frac{1}{M}. \quad (11.88)$$

Итак, малые возмущения в сверхзвуковом потоке могут распространяться лишь в указанном конусе.

Другой особенностью сверхзвукового потока является, как известно из опыта, возможность возникновения ударной волны. Так называется волна значительного уплотнения среды, связанного с резким повышением давления и температуры; при этом практически скачкообразное изменение параметров происходит в очень тонком слое среды и сопровождается потоком вещества через этот слой. Ударные волны возникают при обтекании тел сверх-

звуковым потоком газа, при взрывах и других сильных возмущениях среды.

Рассмотрим теорию ударной волны, отвлекаясь от процессов, происходящих в весьма тонком слое среды, где ее параметры сильно изменяются. Это позволяет заменить такой слой поверхностью разрыва, т. е. поверхностью, на которой параметры среды терпят разрыв непрерывности.

Ограничимся случаем стационарного течения газа, когда поверхность разрыва будет неподвижной относительно системы отсчета, в которой рассматривается движение газа. Величины, характеризующие состояние газа до прохождения поверхности разрыва и после него, связаны между собой законами сохранения массы, импульса и энергии. Следовательно, на поверхности разрыва должны быть *непрерывными* потоки вещества, импульса и энергии.

Чтобы сформулировать эти условия, возьмем некоторый элемент $nd\sigma$ поверхности разрыва и свяжем с ним систему координат, направляя ось x вдоль нормали к элементу. Затем построим цилиндр с осью, направленной по x , поперечным сечением, равным $d\sigma$, и с основаниями, лежащими по разные стороны от рассматриваемого элемента поверхности разрыва бесконечно близко к этому элементу. Тогда, применяя к среде, находящейся в указанном цилиндре, законы сохранения массы, импульса и энергии в интегральной форме (см. (10.41), (11.42), (11.46)) и учитывая стационарность потока, получим условия:

$$\rho_1 v_{x1} = \rho_2 v_{x2} \quad (11.89)$$

$$\rho_1 + \rho_1 v_{x1}^2 = \rho_2 + \rho_2 v_{x2}^2, \quad (11.90)$$

$$\int \rho_1 v_{x1} v_{y1} = \rho_2 v_{x2} v_{y2}, \quad (11.91)$$

$$\rho_1 v_{x1} v_{z1} = \rho_2 v_{x2} v_{z2}, \quad (11.92)$$

$$\rho_1 v_{x1} \left(\frac{v_1^2}{2} + h_1 \right) = \rho_2 v_{x2} \left(\frac{v_2^2}{2} + h_2 \right), \quad (11.93)$$

где индекс 1 относится к газу до прохождения поверхности разрыва, а индекс 2 — к газу после такого прохождения.

Из этих условий видно, что может существовать тангенциальный разрыв, т. е. такой разрыв, при котором отсутствует поток вещества через поверхность разрыва, тогда $v_{x1} = v_{x2} = 0$. В этом случае $\rho_1 = \rho_2$, а скачки плотности и тангенциальных составляющих скорости v_y и v_z произвольны. Если же поток вещества через поверхность разрыва отличен от нуля (т. е. $v_{x1} \neq 0$, $v_{x2} \neq 0$), то имеет место ударная волна. В этом случае ввиду (11.89) тангенциальные составляющие скорости непрерывны

$$v_{y1} = v_{y2}, \quad v_{z1} = v_{z2}, \quad (11.94)$$

а плотность, давление и нормальная составляющая скорости изменяются скачком. Эти изменения подчинены условиям (11.89), (11.90), а также условию

$$\frac{v_{x1}^2}{2} + h_1 = \frac{v_{x2}^2}{2} + h_2, \quad (11.95)$$

вытекающему из (11.93) с учетом (11.89) и (11.94).

Теперь рассмотрим неподвижную ударную волну, перпендикулярную к направлению потока, т. е. рассмотрим прямой скачок уплотнения. В этом случае тангенциальные составляющие скорости равны нулю и, следовательно, $v_x = v$. Поэтому условия (11.89), (11.90) и (11.95) можно записать в виде

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad (11.96)$$

$$\rho_1 + \rho_1 v_1^2 = \rho_2 + \rho_2 v_2^2, \quad (11.97)$$

$$\frac{v_1^2}{2} + h_1 = \frac{v_2^2}{2} + h_2. \quad (11.98)$$

Полученные условия определяют конечные изменения всех термодинамических величин при прохождении среды через ударную волну, в том числе и изменение энтропии. Это связано с диссипативными процессами, обусловленными вязкостью и теплопроводностью газа и происходящими в тех весьма тонких слоях газа, толщиной которых в этой теории пренебрегают. Итак, движение идеальной жидкости через ударную волну является необратимым течением, т. е. течением, для которого согласно второму закону термодинамики

$$s_2 > s_1. \quad (11.99)$$

Из формул (11.96)–(11.98) следует ряд соотношений. Например, обозначая плотность потока среды через $j = \rho v$ и учитывая его непрерывность на поверхности разрыва, из (11.96) получим

$$v_1 = \frac{j}{\rho_1}, \quad v_2 = \frac{j}{\rho_2}, \quad (11.100)$$

а исключая из (11.97) скорости v_1 и v_2 с помощью (11.100), найдем

$$j^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}}. \quad (11.101)$$

Отсюда следует, что либо $\rho_2 > \rho_1$ и $\rho_2 > \rho_1$, либо $\rho_2 < \rho_1$ и $\rho_2 < \rho_1$. Однако в действительности реализуется скачок уплотнения, так

как только условия $\rho_2 > \rho_1$ и $p_2 > p_1$ соответствуют требованию (11.99) (см., например, [52]). Заметим также, что скачок уплотнения ввиду непрерывности потока вещества сопровождается падением скорости газа после прохождения ударной волны ($v_2 < v_1$). Это уменьшение скорости газа означает также, что скорость u стационарной ударной волны по отношению к газу впереди нее ($u_1 = -v_1$) и позади ($u_2 = -v_2$) различна ($u_2 > u_1$).

Наконец, исключая из (11.98) скорости v_1 и v_2 с помощью (11.100) и используя затем (11.101), найдем скачок энтальпии:

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right). \quad (11.102)$$

Это соотношение, называемое адиабатой Гюгонно (или ударной адиабатой), определяет зависимость между ρ_2 и p_2 при заданных ρ_1 и p_1 .

Пример 11.8. Ударная волна в идеальном газе.

Найти отношение температуры T_2 идеального газа за фронтом ударной волны к температуре T_1 газа перед фронтом этой волны, считая известными давления p_1 , p_2 и отношение $\gamma = c_p/c_v$ для данного газа. Найти аналогичные отношения для плотностей и скоростей.

Используя термическое уравнение состояния идеального газа, выражение энтальпии (см. формулу (2) примера 11.4), а также (11.17) и (11.18), из уравнения адиабаты (11.102) найдем

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(\gamma + 1) p_1 + (\gamma - 1) p_2}{(\gamma - 1) p_1 + (\gamma + 1) p_2} \left(\frac{p_2}{p_1} \right). \quad (1)$$

Отсюда с помощью уравнения состояния и (11.96) получим, что

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma - 1) p_1 + (\gamma + 1) p_2}{(\gamma + 1) p_1 + (\gamma - 1) p_2} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (2)$$

Приведем также выражение для разности энтропий (см. (11.16))

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right]. \quad (3)$$

В случае ударных волн весьма большой интенсивности, т. е. в случае, когда

$$p_2 \gg \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} p_1, \quad (4)$$

из (1) — (3) найдем

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{p_2}{p_1}, \quad (5)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = \frac{v_1}{v_2}, \quad (6)$$

$$s_2 - s_1 \approx c_\tau \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right). \quad (7)$$

Из (5) и (6) следует, что скачок температуры и давления может возрасти неограниченно*, в то время как скачки плотности и скорости ограничены предельными значениями. Например, для одноатомного газа $\gamma = 5/3$ и, следовательно, в пределе (4) имеют место соотношения

$$\rho_2 = 4\rho_1, \quad v_2 = v_1/4; \quad (8)$$

для двухатомных газов $\gamma = 7/5$ и, таким образом,

$$\rho_2 = 6\rho_1, \quad v_2 = v_1/6. \quad (9)$$

§ 11.7. Магнитогидродинамика идеальной жидкости

Рассмотрим движение электропроводящей идеальной жидкости, на которую действует внешнее магнитное поле. Электрические токи, возникающие в такой жидкости, обуславливают механическое воздействие на жидкость со стороны магнитного поля и, кроме того, изменяют само магнитное поле. Для описания этих процессов следует использовать систему уравнений идеальной жидкости совместно с уравнениями Максвелла (см., например, [40]).

Ограничимся случаем, когда частота ω колебания напряженностей полей сравнительно мала, а электропроводность среды λ весьма велика и постоянна, т. е. тем случаем, когда $\epsilon\omega \ll 2\pi\lambda$ (ϵ — диэлектрическая постоянная среды). Тогда можно пренебречь током смещения $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ по сравнению с током проводимости \mathbf{j} . Ввиду большой электропроводности можно также пренебречь конвекционным током, поскольку он связан с движением (вместе со средой) свободных объемных зарядов, которые рассылаются тем быстрее, чем выше электропроводность. Кроме того, будем рассматривать среду с магнитной проницаемостью $\mu = 1$, так как для всех проводящих жидкостей и газов $\mu \approx 1$. Если все перечисленные допущения выполняются, то из уравнений Максвелла следует система:

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (11.103)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (11.104)$$

* Большое повышение температуры приводит к диссоциации молекул газа и другим явлениям, которые здесь не рассматриваются.

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (11.105)$$

$$\mathbf{j} = \lambda \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] \right) \quad (11.106)$$

(здесь c — скорость света в вакууме)*.

Эту систему можно свести к уравнениям, содержащим только напряженность \mathbf{H} магнитного поля. Действительно, исключая из (11.103) с помощью (11.106) напряженность \mathbf{E} электрического поля, получим

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = - \frac{c}{\lambda} \operatorname{rot} \mathbf{j} + \operatorname{rot} [\mathbf{vH}].$$

Отсюда с помощью (11.104) исключим \mathbf{j} . Тогда найдем, что напряженность магнитного поля подчинена уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{vH}] - \frac{c^2}{4\pi\lambda} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad (11.107)$$

которое следует решать совместно с (11.105). Наконец, имея в виду, что электропроводность среды весьма велика и, следовательно, члены, пропорциональные $1/\lambda$, весьма малы, получим исходные для рассматриваемого случая уравнения электромагнитного поля:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{vH}], \quad (11.108)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (11.109)$$

Эту систему следует решать совместно с уравнениями (11.3) — (11.6) для гидродинамических полей идеальной жидкости. Учи-

* Выражение (11.106) можно получить, если соотношение $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}'$, справедливое, вообще говоря, для неподвижного проводника, применить в системе отсчета S' , относительно которой данный проводящий элемент среды в данный момент времени покоится. В самом деле, указанная система S' в данный момент времени движется со скоростью \mathbf{v} проводящего элемента относительно системы S , в которой изучается движение жидкости и электромагнитного поля. Тогда согласно принципу Галилея

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] = \mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{v}'\mathbf{H}'],$$

где \mathbf{v}' следует приравнять нулю, поскольку проводящий элемент покоится в S' . Таким образом, напряженность электрического поля в S' равна

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}],$$

откуда следует (11.106).

тывая, что сила Лоренца $\rho \mathbf{f}_L$, действующая на ток \mathbf{j} со стороны магнитного поля, равна

$$\frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{H}] = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] \quad (11.110)$$

(здесь использовано уравнение (11.104)), запишем уравнения (11.3)—(11.6) в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (11.111)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}], \quad (11.112)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \text{div } \mathbf{v}, \quad (11.113)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0. \quad (11.114)$$

Здесь термодинамические уравнения состояния считаются известными (в уравнении (11.113) опущен член j^2/λ , пропорциональный малой величине $1/\lambda$ и равный выделяемому джоулеву теплу). Итак, уравнения (11.108), (11.109), (11.111)—(11.114) представляют собой систему уравнений магнитогидродинамики идеальной жидкости.

Теперь убедимся, что рассматриваемая бесконечно-проводящая среда обладает важным свойством, заключающимся в том, что поток магнитной напряженности через данный материальный контур не изменяется со временем и, следовательно, магнитные силовые линии «вморожены» в среду и движутся вместе с ней. Действительно, из (11.106) видно, что в рассматриваемом случае ток проводимости создается напряженностью

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (11.115)$$

Следовательно, электродвижущая сила, возникающая в данном замкнутом материальном контуре такой среды, будет равна интегралу

$$\oint \mathbf{E}' \delta \mathbf{r}, \quad (11.115')$$

где интегрирование определяется аналогично интегрированию в (11.27). Согласно закону Фарадея электродвижущая сила определяется изменением потока магнитной индукции через поверхность, опирающуюся на проводящий контур, т. е.

$$-\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \oint \mathbf{E}' \delta \mathbf{r}, \quad (11.116)$$

где поток магнитной индукции $\Phi = \int_{\sigma} \mathbf{H} d\sigma$, поскольку $\mu=1$.

Подставляя (11.115) в правую часть закона (11.116) и используя теорему Стокса, получим

$$\int_{\sigma} \text{rot } \mathbf{E} d\sigma + \frac{1}{c} \int_{\sigma} \text{rot } [\mathbf{v}\mathbf{H}] d\sigma.$$

Наконец, используя уравнение Максвелла (11.103), найдем, что

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{\sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \text{rot } [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right) d\sigma. \quad (11.117)$$

Отсюда сразу видно, что в бесконечно проводящей среде, где имеет место (11.108), поток магнитной напряженности через данный материальный контур сохраняется. Следовательно, силовые линии магнитного поля движутся вместе с находящимися на этих линиях частицами жидкости. Поэтому говорят, что силовые линии «приклеены» к жидкости или «вморожены» в нее.

Пример 11.9. *Магнитогидродинамические волны в несжимаемой идеальной жидкости.*

Несжимаемая идеальная жидкость плотности ρ помещена во внешнее постоянное однородное магнитное поле напряженности \mathbf{H}_0 . Найти закон дисперсии магнитогидродинамических волн, соотношения между возмущениями магнитного поля, скорости и давления, а также независимые направления поляризации волн.

Поскольку плотность жидкости неизменна, уравнения магнитогидродинамики существенно упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}], \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (3)$$

Линеаризуем эту систему, полагая, что

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad p = p_0 + p', \quad (4)$$

где

$$h \ll H_0, \quad |p'| \ll p_0,$$

а также считая \mathbf{v} малой величиной. Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{v}\mathbf{H}_0], \quad (5)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad } p' + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{h}, \mathbf{H}_0], \quad (6)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \text{div } \mathbf{h} = 0. \quad (7)$$

Теперь преобразуем (5) и (6), используя формулы векторного анализа, справедливые для двух произвольных векторов:

$$[\nabla [\mathbf{vA}]] = (\mathbf{A}\nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{A} + \mathbf{v} (\nabla \mathbf{A}) - \mathbf{A} (\nabla \mathbf{v}), \quad (8)$$

$$\nabla (\mathbf{hA}) = (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A}\nabla) \mathbf{h} + [\mathbf{h} [\nabla \mathbf{A}]] + [\mathbf{A} [\nabla \mathbf{h}]]. \quad (9)$$

Полагая здесь $\mathbf{A} = \mathbf{H}_0$ и учитывая уравнения (7), найдем, что

$$\text{rot } [\mathbf{vH}_0] = (\mathbf{H}_0 \text{ grad}) \mathbf{v}, \quad (8')$$

$$\text{grad } (\mathbf{hH}_0) = (\mathbf{H}_0 \text{ grad}) \mathbf{h} + [\mathbf{H}_0, \text{rot } \mathbf{h}], \quad (9')$$

и тем самым вместо (5) и (6) приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = (H_0 \text{ grad}) \mathbf{v}, \quad (10)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad} \left(p' + \frac{\mathbf{H}_0 \mathbf{h}}{4\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H}_0 \text{ grad}) \mathbf{h}, \quad (11)$$

которые следует решать совместно с условиями (7).

Будем искать решение системы (7), (10), (11) в виде плоских волн

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, & \mathbf{h} &= \mathbf{h}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \\ p' &= p'_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (12)$$

с волновым вектором \mathbf{k} и частотой ω . Подставляя (12) в (7), (10) и (11), получим

$$\mathbf{k}\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{k}\mathbf{h} = 0, \quad (13)$$

$$-\omega \mathbf{h} = (\mathbf{H}_0 \mathbf{k}) \mathbf{v}, \quad (14)$$

$$\rho \omega \mathbf{v} = \left(p'_0 + \frac{\mathbf{H}_0 \mathbf{h}}{4\pi} \right) \mathbf{k} - \frac{(\mathbf{H}_0 \mathbf{k})}{4\pi} \mathbf{h}. \quad (15)$$

Из (13) и (14) следует, что возмущение \mathbf{h} магнитного поля и скорость \mathbf{v} частиц среды перпендикулярны волновому вектору \mathbf{k} , а \mathbf{h} коллинеарно \mathbf{v} . Что касается соотношения (15), то, умножая его скалярно на \mathbf{k} и используя (13), найдем

$$p'_0 = -\frac{\mathbf{H}_0 \mathbf{h}}{4\pi}, \quad (16)$$

т. е. соотношение между возмущениями давления и магнитного поля. Затем, учитывая (16), из (14) и (15) получим систему

$$\begin{aligned}\omega \mathbf{h} + (\mathbf{H}_0 \mathbf{k}) \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{(\mathbf{H}_0 \mathbf{k})}{4\pi\rho} \mathbf{h} + \omega \mathbf{v} &= 0,\end{aligned}\quad (17)$$

с характеристическим уравнением

$$\omega^2 = \frac{(\mathbf{H}_0 \mathbf{k})^2}{4\pi\rho}.\quad (18)$$

Наконец, исключая из (14) частоту ω с помощью (18), найдем два возможных соотношения между скоростью и возмущением магнитного поля

$$\mathbf{v} = \mp \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}.\quad (19)$$

Полученное решение описывает поперечные плоские волны магнитной напряженности \mathbf{h} и скорости \mathbf{v} , а также волну p' давления с законом дисперсии, вытекающим из (18):

$$\omega = \frac{\mathbf{H}_0 \mathbf{k}}{\sqrt{4\pi\rho}}.\quad (20)$$

Этот закон определяет групповую скорость (см. (11.86))

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{H}_0}{\sqrt{4\pi\rho}},\quad (21)$$

направленную вдоль \mathbf{H}_0 , т. е. по невозмущенным силовым линиям. Рассматриваемые волны называются магнитогидродинамическими волнами (или волнами Альфвена).

Теперь определим независимые направления поляризации магнитогидродинамических волн. Для этого направим ось z вдоль заданного вектора \mathbf{k} , а плоскость xz совместим с плоскостью, определяемой векторами \mathbf{k} и \mathbf{H}_0 . Тогда условия (13) поперечности \mathbf{v} и \mathbf{h} сведутся к требованиям

$$\mathbf{v}_z = 0, \quad h_z = 0,\quad (22)$$

а

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{k} = H_{0z} \mathbf{k}$$

(здесь k — проекция волнового вектора на ось z). Таким образом, система (17) сводится к следующим двум системам уравнений

$$ch_x + H_{0z} v_x = 0, \quad \frac{H_{0z}}{4\pi\rho} h_x + cv_x = 0;\quad (23)$$

$$ch_y + H_{0z} v_y = 0, \quad \frac{H_{0z}}{4\pi\rho} h_y + cv_y = 0,\quad (24)$$

где $c = \frac{H_{0z}}{\sqrt{4\pi\rho}}$ — фазовая скорость волн Альфвена.

Из систем (23) и (24) ясно, что возмущения h_x и v_x распространяются независимо от возмущений h_y и v_y . Следовательно, существуют два независимых направления поляризации: вдоль оси x и вдоль оси y , т. е. в плоскости векторов \mathbf{H}_0 и \mathbf{k} и перпендикулярно к ней.

При указанном выборе системы координат возмущение давления определяется формулой

$$p' = -\frac{H_{0x}h_x}{4\pi}. \quad (25)$$

Отсюда видно, что возмущение p' связано только с составляющими напряженностей \mathbf{H}_0 и \mathbf{h} вдоль одного из направлений поляризации, лежащего в плоскости векторов \mathbf{H}_0 и \mathbf{k} .

Глава XII

вязкая жидкость

§ 12.1. Тензор напряжений и уравнения движения

Рассмотренная в § 11.1 модель идеальной жидкости предполагает полное пренебрежение касательными напряжениями. Однако в действительности такие напряжения имеют место при движении жидкостей и газов. Изучим свойства *среды, в которой напряжения зависят от скоростей деформаций, при этом наряду с нормальными напряжениями, вообще говоря, отличаются от нуля и касательные напряжения.* Такую среду называют вязкой жидкостью.

О наличии касательных напряжений свидетельствуют простейшие эксперименты. Например, возьмем две плоские твердые пластинки, между которыми находится жидкость, и закрепив одну из них, будем двигать вторую пластину параллельно первой с малой постоянной скоростью. Опыт покажет: чтобы поддержать скорость постоянной, к ней нужно приложить силу, пропорциональную площади пластины и отношению ее скорости к расстоянию между обеими пластинами; из опыта также следует, что коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом вязкости, будет зависеть от свойств среды (теория этого опыта подробно изложена в примере 12.1).

Чтобы учесть касательные напряжения, представим тензор напряжений в виде

$$P_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau_{ik}, \quad (12.1)$$

где второй член определяет силу, пропорциональную производным скорости по координатам, т. е. силу, зависящую от скорости движения частиц среды относительно друг друга. Это допущение, сделанное еще Ньютоном, основано на экспериментах, подобных рассмотренному.

Итак, «вязкий» тензор напряжений τ_{ik} должен быть однородной линейной формой относительно производных $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$, причем формой, симметричной относительно перестановки индексов в силу требования (10.52).

Чтобы найти выражение τ_{ik} , заметим, что из компонент тензора $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ можно образовать два симметричных тензора, связанных со скоростями деформаций различного характера, а именно, со скоростями деформаций чистого сдвига и равномерного сжатия. Такими тензорами являются

$$S_{ik} = v_{ik} - V_{ik} \quad (12.2)$$

и

$$V_{ik} = \frac{1}{3} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \delta_{ik}, \quad (12.3)$$

где v_{ik} — тензор скоростей деформации (10.23). Действительно, симметричный тензор S_{ik} связан только со сдвиговыми деформациями, поскольку $S_{ik} = 0$ при равномерном сжатии (в этом случае все члены

$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)_{i \neq k} = 0$, $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$). Компоненты симметричного тензора V_{ik} пропорциональны дивергенции скорости, т. е. связаны только со скоростью изменения объема частиц среды (см. (10.34)). В самом деле, если $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \neq 0$ при $i \neq k$, а при $i = k$ $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = 0$, т. е. если имеют место только сдвиговые деформации, то $V_{ik} = 0$. Таким образом, используя тензоры S_{ik} и V_{ik} , с которыми связаны две возможные деформации различного характера, а также учитывая требование линейности τ_{ik} относительно производных $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$, найдем

$$\tau_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}, \quad (12.4)$$

где скалярные величины η и ζ соответственно называются первым и вторым коэффициентами вязкости (эти коэффициенты, вообще говоря, зависят от плотности и температуры среды).

Среда, для которой «вязкий» тензор напряжений τ_{ik} имеет вид (12.4), называется линейной вязкой жидкостью (обычно ее кратко называют вязкой жидкостью). Такая среда является *изотропной*, поскольку ее свойства определяются скалярными величинами η и ζ .

Используя (10.73), (12.1) и (12.4), нетрудно получить уравнения изменения импульса вязкой жидкости

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\zeta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + \rho f_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (12.5)$$

Эти уравнения описывают необратимые процессы, причем необратимость связана с тензором τ_{ik} , поскольку при инверсии времени $t \rightarrow -t$ ($\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$) изменяют знак только те члены (12.5), которые связаны с τ_{ik} , а остальные члены не меняют знака. Поэтому диссипация энергии (переход части механической энергии в тепловую) будет определяться мощностью «вязких» напряжений, выделяемой при деформациях частицы, т. е. диссипативной функцией вида

$$D = \tau_{ik} v_{ik}. \quad (12.6)$$

Поскольку $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \omega_{ki} + v_{ki}$ (см. (10.22), (10.23)), диссипативную функцию можно также представить в форме

$$D = \tau_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (12.6')$$

Для преобразования (12.6') используем выражение τ_{ik} через симметричные тензоры S_{ik} и V_{ik} , а также очевидное выражение для тензора $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = S_{ik} + V_{ik} + \omega_{ik}. \quad (12.7)$$

Тогда, имея в виду, что

$$S_{ik} \omega_{ik} = 0, \quad V_{ik} \omega_{ik} = 0, \quad (12.8)$$

и учитывая, что $\delta_{ik} \delta_{ik} = 3$, а

$$\begin{aligned} S_{ik} V_{ik} &= \frac{1}{3} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta} \right) \delta_{ik} = \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta} \right) = 0, \end{aligned} \quad (12.9)$$

найдем выражение для диссипативной функции вязкой жидкости

$$D = 2\eta S_{ik} S_{ik} + 3\zeta V_{ik} V_{ik}. \quad (12.10)$$

Теперь, используя (12.1) и (12.6), получим мощность всех напряжений, связанную с деформацией

$$P_{ik} v_{ik} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + D. \quad (12.11)$$

Подставляя (12.11) в (10.74), приходим к уравнению изменения энергии вязкой жидкости

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + D - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}. \quad (12.12)$$

Наконец, используя (12.10), из (10.75) найдем уравнение изменения энтропии вязкой жидкости

$$\rho T \frac{ds}{dt} = D - \frac{\partial q_t}{\partial x_t}, \quad D > 0, \quad (12.13)$$

где D определено в (12.6) или (12.10). Таким образом, из неравенства $D > 0$ и (12.10) вытекает неравенство

$$2\eta(S_{ik}S_{ik}) + 3\zeta(V_{ik}V_{ik}) > 0,$$

из которого ввиду положительной определенности форм $S_{ik}S_{ik}$ и $V_{ik}V_{ik}$ следует, что коэффициенты вязкости всегда *положительны*:

$$\eta > 0, \quad \zeta > 0. \quad (12.14)$$

Уравнения (12.5), (12.12) и (12.13) совместно с уравнением непрерывности являются *системой уравнений движения вязкой жидкости*. Она становится замкнутой, если ее дополнить уравнениями состояния

$$p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T), \quad (12.15)$$

а также эмпирическим законом Фурье, согласно которому плотность потока тепла пропорциональна градиенту температуры:

$$\mathbf{q} = -\kappa \text{grad } T, \quad (12.16)$$

где κ — коэффициент теплопроводности, который является заданной функцией плотности и температуры ($\kappa > 0$, поскольку поток \mathbf{q} всегда направлен от частицы с большей температурой к частице с меньшей температурой). Отметим, что уравнения (12.15) в данном случае используются для описания необратимых процессов. Однако такое использование оправдано, если градиенты скорости, температуры и других величин малы и представляется возможным пренебречь степенями этих градиентов (начиная со второй и выше), а также пренебречь производными высших порядков по координатам.

§ 12.2. Уравнение Навье — Стокса

Уравнения движения вязкой жидкости несколько упрощаются, если коэффициенты вязкости можно считать постоянными для данной жидкости величинами. Действительно, в этом случае (см. (12.4))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} &= \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x_i \partial x_\alpha} \right) + \\ &+ \zeta \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x_i \partial x_\alpha} = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x_i \partial x_\alpha}, \end{aligned} \quad (12.17)$$

причем входящие сюда суммы вторых производных можно записать в форме

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_k \partial x_k} = \Delta \mathbf{v}, \quad \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x_i \partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (12.18)$$

Таким образом, уравнения (12.5) приводят к уравнению Навье — Стокса:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}. \quad (12.19)$$

Если жидкость можно считать несжимаемой, то в силу уравнения непрерывности $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и, следовательно, тензор $V_{ik} = 0$ (см. (12.3)), а тензор напряжений (12.4) и диссипативная функция (12.10) преобразуются соответственно к виду

$$\tau_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right), \quad (12.20)$$

$$D = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \quad (12.21)$$

Поэтому системой уравнений движения несжимаемой вязкой жидкости является следующая замкнутая относительно неизвестных \mathbf{v} и p система

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (12.22)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (12.23)$$

где $\nu = \eta/\rho$ — удельная вязкость (ν часто называют кинематическим коэффициентом вязкости, а первый коэффициент вязкости — динамическим коэффициентом вязкости). Если система (12.22) — (12.23) решена, т. е. поля давления и скорости найдены, то поле температуры может быть определено с помощью уравнений (12.12) и (12.13) совместно с (12.15) и (12.16).

Граничным условием к уравнениям движения вязкой жидкости является условие обращения в нуль скорости среды на неподвижной твердой поверхности σ_0 :

$$\mathbf{v}|_{\sigma_0} = 0. \quad (12.24)$$

Это условие, связанное с представлением о молекулярном взаимодействии между молекулами среды и поверхности, подтверждается на опыте в довольно большом интервале плотностей и температур. Заметим, что на движущейся твердой поверхности скорость среды должна равняться скорости \mathbf{U} соответствующего элемента поверхности:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_\sigma) = \mathbf{U}(\mathbf{r}_\sigma) \quad (12.25)$$

(здесь \mathbf{r}_σ — радиус-вектор элемента поверхности).

Часто приходится вычислять силу, действующую на неподвижную твердую поверхность со стороны жидкости. В связи с этим получим выражение для силы, действующей на элемент $d\sigma$ поверхности. Эта сила должна равняться потоку импульса через элемент $d\sigma$. Поэтому найдем тензор Π_{ik} плотности потока импульса для вязкой жидкости. Для этого рассмотрим уравнение изменения импульса вязкой жидкости

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i$$

и представим это уравнение в виде (11.41). Тогда

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \tau_{ik}. \quad (12.26)$$

Отсюда, учитывая граничное условие (12.24), найдем силу dF_i^σ , действующую со стороны вязкой жидкости на элемент $d\sigma$ неподвижной твердой поверхности:

$$dF_i^\sigma = (-pn_i + \tau_{ik}n_k) d\sigma \quad (12.27)$$

(напомним, что орт \mathbf{n} направлен по нормали, внешней к поверхности твердого тела, т. е. внутрь жидкости).

Теперь рассмотрим вопрос о подобии стационарных течений несжимаемой вязкой жидкости в отсутствие заданных сил. Определим понятие подобия, для чего рассмотрим два различных стационарных потока. Если каждой точке \mathbf{r}_1 пространства в случае одного потока можно поставить в соответствие точку \mathbf{r}_2 пространства в случае другого потока с помощью преобразования

$$\mathbf{r}_2 = k\mathbf{r}_1, \quad (12.28)$$

где постоянная k одинакова для всех точек сравниваемых пространственных областей, и при этом окажется, что любая величина Q_1 , характеризующая первый поток и взятая в любой точке \mathbf{r}_1 , связана с соответствующей величиной Q_2 , характеризующей второй поток и взятой в точке $\mathbf{r}_2 = k\mathbf{r}_1$, соотношением

$$Q_2(\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_2=k\mathbf{r}_1} = kQ_1(\mathbf{r}_1) \quad (12.29)$$

с постоянной k_Q , то такие стационарные течения называются подобными, а постоянные k , k_Q называются коэффициентами подобия.

Чтобы выяснить интересующий нас критерий подобия, представим уравнение Навье—Стокса (12.23) в безразмерной форме. Для этого зададим постоянные величины, характеризующие течение несжимаемой вязкой жидкости, а именно: удельную вязкость ν , размер l неоднородности и скорость U потока (например, в случае обтекания шара l и U будут соответственно равны радиусу шара и скорости потока на бесконечности). Тогда, вводя безразмерные функции и операторы

$$\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{l}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{U}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2}, \quad (12.30)$$

$$\tilde{\nabla} = l\nabla, \quad \tilde{\Delta} = l^2\Delta,$$

из (12.23) для стационарных течений при $\mathbf{f} = 0$ найдем

$$(\tilde{\nabla}\tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{1}{R}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}, \quad (12.31)$$

где

$$R = \frac{Ul}{\nu} \quad (12.32)$$

— число Рейнольдса (это единственная безразмерная комбинация размерных величин U , l , ν , характеризующих течение). Из уравнения (12.31) следует закон подобия Рейнольдса, согласно которому *два стационарных потока несжимаемой вязкой жидкости, обтекающие геометрически подобные тела в отсутствие заданных сил, являются подобными, если оба потока характеризуются одним и тем же числом Рейнольдса*. Действительно, если числа R и граничные условия для обоих течений одинаковы, то решениями уравнения (12.31) в этих двух случаях будут одни и те же функции вида

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{r}}, R), \quad \tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{\mathbf{r}}, R). \quad (12.33)$$

Отсюда с учетом (12.30) для скоростей и радиусов-векторов двух потоков, удовлетворяющих закону Рейнольдса, получим выражения

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}_2}{U_2} = \frac{\mathbf{v}_1}{U_1}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}_2}{l_2} = \frac{\mathbf{r}_1}{l_1}, \quad (12.34)$$

которые указывают на подобие течений.

Решение уравнения Навье—Стокса в виде (12.33) позволяет прийти и к другим практически важным заключениям. Например, подставляя (12.33) в (12.27), учитывая (12.30) и интегрируя по

поверхности тела, найдем, что сила, действующая на тело со стороны обтекающего его потока, должна иметь вид

$$F^{\sigma} = \frac{\rho U^2}{2} \sigma \Psi(R), \quad (12.35)$$

где σ — «эффективная» площадь, пропорциональная квадрату характерного размера тела ($\sigma \sim l^2$).

В заключение отметим, что решения рассмотренных уравнений вязкой жидкости лишь формально могут существовать при любых числах R . В действительности же только то решение описывает реальное течение, которое является устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям. Согласно экспериментальным данным стационарное течение тела является устойчивым при малых числах Рейнольдса, а начиная с некоторого достаточно большого числа Рейнольдса такого обтекания не существует. В первом случае траектории частиц среды имеют достаточно гладкий характер, среда движется как бы слоями, т. е. имеет место слоистое или ламинарное течение. Во втором случае частицы движутся беспорядочно, происходят хаотические пульсации скорости, т. е. имеет место турбулентное движение. Поскольку мы, изучая основы механики сплошных сред, не будем рассматривать вопросы устойчивости и теорию турбулентности, все приведенные далее решения описывают лишь ламинарные течения.

Пример 12.1. *Течение между параллельными плоскостями, движущимися относительно друг друга.*

Пусть несжимаемая вязкая жидкость в отсутствие внешних сил стационарно движется между двумя параллельными плоскостями, одна из которых покоится, а другая движется с постоянной скоростью \mathbf{U} , находясь на заданном расстоянии l от неподвижной плоскости. Найти поля давления и скорости.

Поместим начало координат на неподвижной плоскости, ось x направим вдоль скорости \mathbf{U} , а ось y перпендикулярно плоскостям. Тогда ввиду условия задачи все поля могут зависеть только от y , т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

а скорость жидкости \mathbf{v} направлена вдоль x , т. е.

$$\mathbf{v} = (v_x, 0, 0). \quad (2)$$

Таким образом, нужно определить две неизвестных функции вида $v_x(y)$, $p(y)$.

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

удовлетворяется, как видно, тождественно. Левая часть уравнения (12.23) ввиду (1) и (2) равна

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z = 0,$$

а само уравнение преобразуется к виду

$$\nabla p = \eta \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2},$$

откуда

$$\frac{dp}{dy} = 0, \quad \frac{d^2 v_x}{dy^2} = 0,$$

и, следовательно,

$$p = p_0, \quad v_x = C_1 y + C_2.$$

Используя условия «прилипания» жидкости к плоскостям (см. (12.24) и (12.25))

$$v_x|_{y=0} = 0, \quad v_x|_{y=l} = U,$$

найдем поле скорости

$$v_x = \frac{U}{l} y. \quad (3)$$

Теперь подсчитаем силу f^σ , действующую со стороны жидкости на единичную площадку неподвижной плоскости. Орт \mathbf{n} для такой площадки имеет компоненты 0, 1, 0. Следовательно, из (12.27) получим, что

$$f_x^\sigma = \tau_{xy}, \quad f_y^\sigma = -p + \tau_{yy}.$$

С другой стороны, согласно (12.20) и (3)

$$\tau_{xy} = \eta \frac{U}{l}, \quad \tau_{yy} = 0.$$

Таким образом,

$$f_x^\sigma = \eta \frac{U}{l}, \quad f_y^\sigma = -p_0.$$

Аналогично для единичной площадки на движущейся плоскости найдем

$$f_x^\sigma = -\eta \frac{U}{l}, \quad f_y^\sigma = p_0.$$

Отметим, что рассмотренное ламинарное течение является вихревым течением, поскольку

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\frac{U}{2l} \mathbf{n}_z \neq 0.$$

Пример 12.2. -Течение между параллельными неподвижными плоскостями при наличии перепада давления.

Рассмотрим стационарный поток несжимаемой, вязкой жидкости между параллельными неподвижными плоскостями при наличии постоянного перепада давления.

Выберем систему координат, как показано на рис. 12.1. В этой системе скорость потока будет иметь только одну составляющую $v_x \neq 0$. Тогда из уравнения непрерывности вытекает, что $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$, т. е. $v_x = v_x(y)$. Учитывая сказанное, а также двумерность задачи, из уравнения (12.23) получим

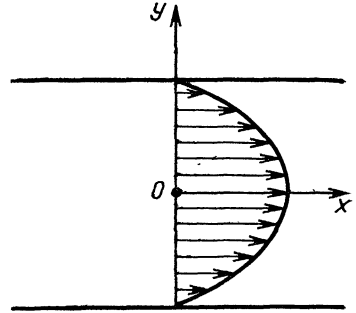


Рис. 12.1

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Последнее из этих уравнений показывает, что p может быть функцией только x . Поэтому первое из уравнений (1) сводится к двум уравнениям

$$\frac{dp}{dx} = C, \quad \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{C}{\eta},$$

интегрируя которые находим

$$p = Cx + C_1, \quad v_x = \frac{C}{2\eta} y^2 + C_2 y + C_3.$$

Полагая, что давление на плоскостях $x=0$ и $x=L$ имеет значения p_0 и p_1 , получим, что

$$p = -\frac{\Delta p}{L} x + p_0, \quad (2)$$

где $\Delta p = p_0 - p_1$ — перепад давления. Для определения C_2 и C_3 используем граничные условия (12.24) при $y = \pm \frac{l}{2}$ и, таким образом, найдем поле скорости

$$v_x = \frac{1}{2\eta} \frac{\Delta p}{L} \left[\left(\frac{l}{2} \right)^2 - y^2 \right]. \quad (3)$$

Итак, давление падает по линейному закону в сторону течения, а скорость в любом поперечном сечении потока изменяется по параболическому закону, достигая максимального значения $v_{\max} = \frac{l^2}{8\eta} \frac{\Delta p}{L}$ посредине между граничными плоскостями (на рис. 12.1 изображен профиль скоростей в сечении $x=0$).

Применяя формулу (12.27), аналогично предыдущему примеру найдем силу, с которой жидкость действует на единичную площадку плоскостей

$$f_x^{\sigma} = \frac{l}{2} \frac{\Delta p}{L}, \quad f_y^{\sigma} = p_0 - \frac{\Delta p}{L} x.$$

Наконец, определим объем Q жидкости, протекающей за единицу времени через сечение, ограниченное плоскостями $z=0$ и $z=a$. Для этого, используя (3), вычислим интеграл

$$Q = a \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} v_x dy = \frac{al^3}{12\eta} \left(\frac{\Delta p}{L} \right). \quad (4)$$

Отсюда видно, что протекающее количество жидкости пропорционально кубу расстояния между плоскими стенками, падению давления на единицу длины и обратно пропорционально коэффициенту вязкости.

Пример 12.3. Течение Пуазейля.

Пусть несжимаемая вязкая жидкость в отсутствие объемных сил течет по цилиндрической трубе кругового сечения радиуса l . Полагая, что течение стационарно, а перепад давления на единицу длины трубы задан, найдем поля давления и скорости, а также количество протекающей за единицу времени жидкости.

Выбирая начало координат на оси трубы и направляя ось z вдоль этой оси, найдем из (12.22) и (12.23), что

$$v_z = v_z(x, y), \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right). \quad (1)$$

Ввиду того, что $p=p(z)$, и в силу симметрии течения $v_z = v_z(\sqrt{x^2 + y^2})$ последнее из уравнений (1) распадается на два уравнения, которые запишем в цилиндрических координатах (используя соответствующее выражение для оператора Лапласа)

$$\frac{dp}{dz} = C, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{C}{\eta}.$$

Следовательно,

$$p = Cz + C_1, \quad v_z = \frac{C}{4\eta} r^2 + C_2 \ln r + C_3.$$

Аналогично формуле (2) примера 12.2 найдем поле давления

$$p = -\frac{\Delta p}{L} z + p_0,$$

где $\Delta p/L$ — перепад давления на единицу длины. Требуя затем ограниченности скорости во всей области $0 \leq r \leq l$ и используя граничное условие (12.24) при $r=l$, получим

$$C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{l^2}{4\eta} \left(\frac{\Delta p}{L} \right).$$

Таким образом,

$$v_z = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) (l^2 - r^2).$$

Отсюда нетрудно найти касательную силу, приложенную к единице поверхности трубы (см. формулы (10), (11) приложения к гл. XII)

$$f_z^\sigma = -(\tau_{rz})_\sigma = -\eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_{r=l} = \frac{l}{2} \frac{\Delta p}{L},$$

а также секундный расход жидкости (формула Пуазейля)

$$Q = \int_0^l v_z 2\pi r dr = \frac{\pi l^4}{8\eta} \left(\frac{\Delta p}{L} \right). \quad (2)$$

Из этой формулы следует, что при ламинарном течении количество протекающей жидкости пропорционально четвертой степени радиуса трубки и падению давления на единицу длины и обратно пропорционально коэффициенту вязкости.

Пример 12.4. Формула Стокса.

Неподвижную сферу радиуса l обтекает стационарный поток вязкой несжимаемой жидкости со скоростью U на бесконечности. Найти поле скорости и силу, с которой жидкость действует на сферу, если число Рейнольдса весьма мало.

Для стационарного течения несжимаемой вязкой жидкости уравнения движения имеют вид (см. (12.22) и (12.23))

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v}. \quad (2)$$

Выберем начало координат в центре сферы и направим ось z по вектору \mathbf{U} . Далее обратим внимание, что левая часть уравнения (2) и его последний член справа имеют порядок величины, соответственно равный $\frac{\rho U^2}{l}$ и $\frac{\eta U}{l^2}$.

Таким образом, отношение рассматриваемых членов по порядку величины равно числу Рейнольдса. Следовательно, при $R \ll 1$

$$\rho |(\nabla \nabla) \mathbf{v}| \ll \eta |\Delta \mathbf{v}|.$$

Поэтому вместо (2) в качестве исходного примем уравнение

$$\nabla^2 p = \eta \Delta \mathbf{v} \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{v}|_{r=l} = 0, \quad \mathbf{v}|_{r=\infty} = \mathbf{U}. \quad (4)$$

Применяя операцию rot к обеим частям (3) и имея в виду, что $\text{rot grad} \equiv 0$, исключим неизвестное p и тем самым найдем

$$\text{rot } \Delta \mathbf{v} = 0. \quad (5)$$

Теперь используем известное соотношение

$$\Delta = \text{grad div} - \text{rot rot} \quad (5')$$

и учтем (1). Тогда вместо (5) получим уравнение

$$\text{rot rot rot } \mathbf{v} = 0, \quad (6)$$

которое следует решать совместно с (1). Учитывая граничные условия (4) на бесконечности

$$v_r|_{\infty} = U \cos \theta, \quad v_\theta|_{\infty} = -U \sin \theta \quad (7)$$

и азимутальную симметрию течения, будем искать решение системы (6), (1) в виде

$$v_r = U f(r) \cos \theta, \quad v_\theta = U \psi(r) \sin \theta, \quad v_\varphi = 0, \quad (8)$$

где $f(r)$ и $\psi(r)$ — неизвестные функции.

Сделаем в уравнении (6) подстановку $\text{rot } \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$, т. е. подстановку

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (v_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] &= 2\omega_r, \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) \right] &= 2\omega_\theta, \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] &= 2\omega_\varphi, \end{aligned} \quad (9)$$

которая после использования (8) сводится к формулам

$$\omega_r = \omega_\theta = 0, \quad \omega_\varphi = \frac{U}{2} \frac{g(r)}{r} \sin \theta, \quad (10)$$

где

$$g(r) = f(r) + \frac{d}{dr} [r\psi(r)]. \quad (11)$$

Далее, совершим подстановку $\text{rot } \omega = \varepsilon$, используя формулы, аналогичные (9), и вычислим компоненты ε с помощью (10)

$$\varepsilon_r = U \frac{g}{r^2} \cos \theta, \quad \varepsilon_\theta = -\frac{U}{2} \frac{g'}{r} \sin \theta, \quad (12)$$

$$\varepsilon_\varphi = 0,$$

а также компоненты $\text{rot } \varepsilon$ с помощью (12)

$$\text{rot}_r \varepsilon = \text{rot}_\theta \varepsilon = 0,$$

$$\text{rot}_\varphi \varepsilon = -\frac{U}{2r} \sin \theta \left(g'' - \frac{2g}{r^2} \right). \quad (13)$$

Таким образом, (6) сводится к уравнению $\text{rot } \varepsilon = 0$, т. е. к уравнению

$$r^2 g'' - 2g = 0. \quad (14)$$

Решая это уравнение с помощью подстановки $g = r^k$, убедимся в том, что его единственным решением, обращаясь на бесконечности в нуль, является решение

$$g = \frac{C}{r}, \quad (15)$$

а имея в виду (11), представим (15) в виде уравнения относительно ψ и f

$$\frac{d}{dr} (r\psi) + f = \frac{C}{r}. \quad (16)$$

Второе уравнение относительно этих функций получим, записывая (1) в сферических координатах (см. (7) приложения к гл. XII)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (17)$$

и подставляя сюда (8):

$$\frac{d}{dr} (r^2 f) + 2r\psi = 0. \quad (18)$$

Нетрудно убедиться, что решением системы (16), (18) являются функции

$$\begin{aligned}\psi &= C_1 + \frac{C_2}{r} + \frac{C_3}{r^3}, \\ f &= -C_1 - \frac{2C_2}{r} + \frac{2C_3}{r^3},\end{aligned}\quad (19)$$

если $C_2 = -C/2$. При этом граничными условиями для функций f и ψ являются условия (см. (4) и (7))

$$f_\infty = 1, \quad \psi_\infty = -1, \quad f_{r=l} = \psi_{r=l} = 0. \quad (20)$$

Используя (20), найдем постоянные интегрирования

$$C_1 = -1, \quad C_2 = \frac{3l}{4}, \quad C_3 = \frac{l^3}{4} \quad (21)$$

и тем самым определим поле скорости (см. (8)):

$$\begin{aligned}v_r &= U \cos \theta \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{l}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{r} \right)^3 \right], \\ v_\theta &= -U \sin \theta \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{l}{r} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{l}{r} \right)^3 \right], \\ v_\varphi &= 0.\end{aligned}\quad (22)$$

Чтобы найти поле давления, представим (3) в виде

$$\text{grad} \cdot p = -2\eta \varepsilon \quad (23)$$

(здесь использованы (5'), (1) и подстановка $\text{rot rot } \mathbf{v} = 2\varepsilon$). Имея в виду, что компоненты вектора ε известны, из (23) получим уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 3U\eta \frac{\cos \theta}{r^3}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{3}{2} U\eta \frac{\sin \theta}{r^3}, \quad (24)$$

откуда

$$p = p_\infty - \frac{3}{2} U\eta \frac{\cos \theta}{r^2}. \quad (25)$$

Силу, действующую на единицу поверхности сферы, получим из (12.27), учитывая, что в сферических координатах орт \mathbf{n} , нормальный к поверхности сферы, имеет компоненты 1, 0, 0. Таким образом, плотность силы \mathbf{f} будет равна:

$$f_r^\sigma = (-p + \tau_{rr})_\sigma, \quad f_\theta^\sigma = (\tau_{\theta r})_\sigma, \quad f_\varphi^\sigma = 0.$$

Подставляя сюда (25) и компоненты вязкого тензора (см. приложение к гл. XII)

$$\tau_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \tau_{\theta r} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right),$$

с учетом (22) получим

$$f_r^\sigma = -p_\infty + \frac{3}{2} \frac{U\eta}{l} \cos \theta, \quad f_\theta^\sigma = -\frac{3}{2} \frac{U\eta}{l} \sin \theta.$$

Суммарная сила F , действующая на сферу со стороны потока, ввиду симметрии потока направлена по U . Поэтому спроектируем слагаемые силы на направление U и проинтегрируем полученное выражение по поверхности сферы:

$$F_z = \int [(dF_r^\sigma) \cos \theta - (dF_\theta^\sigma) \sin \theta].$$

В результате вычислений найдем, что

$$\int_0^\pi \left(-p_\infty + \frac{3}{2} \frac{U\eta}{l} \cos \theta \right) \cos \theta d\sigma = 2\pi U l \eta, \quad (26)$$

$$\int_0^\pi \frac{3}{2} \frac{U\eta}{l} \sin^2 \theta d\sigma = 4\pi U l \eta \quad (27)$$

(здесь $d\sigma = 2\pi l^2 \sin \theta d\theta$) и, следовательно,

$$F_z = 6\pi U l \eta. \quad (28)$$

Формула (28), которая называется формулой Стокса, определяет силу, действующую со стороны потока жидкости на неподвижную сферу при малых числах Рейнольдса (эта сила равна силе сопротивления, действующей на сферу, движущуюся в жидкости с постоянной скоростью). Заметим, что вклад (26) нормальных слагаемых сил в F_z составляет третью часть, а две трети от F_z связаны с касательными напряжениями.

§ 12.3. Малые колебания

Рассмотрим плоскую звуковую волну, распространяющуюся в вязкой жидкости в положительном направлении оси x . С целью упрощения задачи допустим, что коэффициенты вязкости постоянны, а теплопроводностью жидкости можно пренебречь. Тогда исходными уравнениями для описания звуковой волны будут уравнения непрерывности и Навье—Стокса, а также уравнение для энтропии и энергии. Вводя малые возмущения плотности, давления и других величин аналогично тому, как они были введены в § 11.5 и интересуясь только линейным приближением, из уравнения Навье—Стокса (12.19) найдем

$$\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{\partial p'}{\partial x} + \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}. \quad (12.36)$$

Далее, из уравнения (12.13) следует, что течение жидкости в звуковой волне можно считать приближенно изэнтропическим, поскольку диссипативная функция (12.21) содержит только квадратичные относительно v_x члены, а теплопроводностью жидкости мы пренебрегли (уравнение энергии (12.12) и уравнение непрерывности с учетом указанных допущений приводят к тому же выводу об изэнтропичности течения). В этом случае можно использовать соотношение (11.59) между возмущениями давления p' и плотности ρ' .

Итак, возьмем уравнение непрерывности (11.56) для одномерных течений и исключим p' из (12.36) с помощью (11.59). Тогда получим систему уравнений

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (12.37)$$

$$c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} - \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0, \quad (12.38)$$

решение которой будем искать в виде

$$\begin{aligned} \rho' &= C_1 e^{i(kx - \omega t)}, \\ v_x &= C_2 e^{i(kx - \omega t)}, \end{aligned} \quad (12.39)$$

где C_1 и C_2 — постоянные амплитуды, а волновое число, равное

$$k = \beta + i\alpha, \quad (12.40)$$

является комплексным; здесь β — вещественное волновое число, а коэффициент $\alpha > 0$, приводящий согласно (12.39) к появлению экспоненциального множителя $\exp(-\alpha x)$ в решении уравнений, называется коэффициентом затухания звука.

Найдем фазовую скорость c звука (см. (11.81)) и коэффициент затухания α , считая последний достаточно малым. С этой целью подставим (12.39) в (12.37), (12.38) и после сокращения на общий множитель найдем

$$\begin{aligned} -i\omega C_1 + ik\rho_0 C_2 &= 0, \\ ikc_0^2 C_1 + \left[-i\omega\rho_0 + k^2 \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \right] C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (12.41)$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$\begin{vmatrix} -i\omega & ik\rho_0 \\ ikc_0^2 & -i\omega\rho_0 + \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) k^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (12.42)$$

определяет закон дисперсии (см. (11.85))

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{1}{1 - i\varepsilon}, \quad (12.43)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\omega}{\rho_0 c_0^2} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right).$$

Теперь подставим (12.40) в (12.43) и отделим вещественную и мнимую части. Тогда получим два уравнения относительно β и α :

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{1}{(1 + \varepsilon^2)}, \quad (12.44)$$

$$2\alpha\beta = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon^2)}.$$

Допуская, что частота звука достаточно мала, т. е.

$$\varepsilon = \frac{\omega}{\rho_0 c_0^2} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \ll 1, \quad (12.45)$$

и пренебрегая в (12.44) членами порядка ε^3 и выше, из (12.44) найдем

$$\beta = \frac{\omega}{c_0} \left(1 - \frac{3}{8} \varepsilon^2 \right), \quad \alpha = \frac{\omega}{2c_0} \varepsilon.$$

Приведем также более подробные выражения для фазовой скорости звука

$$c = \frac{\omega}{\beta} = c_0 \left[1 + \frac{3}{8} \frac{\omega^2}{\rho_0^2 c_0^4} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right)^2 \right] \quad (12.46)$$

и для коэффициента затухания

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\rho_0 c_0^3} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right). \quad (12.47)$$

Как видно, *скорость звука зависит от частоты*, т. е. имеет место дисперсия скорости (см. (11.84)). Также заметим, что *разность $c - c_0$ и коэффициент поглощения звука пропорциональны квадрату его частоты*.

Наряду с изученными сейчас продольными волнами, в вязкой жидкости могут распространяться поперечные возмущения (поскольку сдвиговые напряжения в такой среде отличны от нуля). В этом можно убедиться, показав, что уравнения движения вязкой

жидкости имеют решение в виде плоской волны, распространяющейся вдоль некоторого направления, с полем скоростей, перпендикулярных этому направлению. Такие возмущения возникают в жидкости, соприкасающейся с плоскостью, колеблющейся параллельно самой себе. Направим ось x перпендикулярно к такой плоскости, а ось y коллинеарно прямой, вдоль которой происходят колебания плоскости. И будем искать решение для скорости в виде $v_y = v_y(x, t)$ (другие величины также пусть зависят только от x и t).

Положим для простоты, что жидкость несжимаема. Тогда уравнение (12.22) удовлетворяется тождественно ($\text{div } \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$), а (12.23) приводит к двум уравнениям: во-первых, к уравнению $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, откуда следует, что давление постоянно, и, во-вторых, к уравнению

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}. \quad (12.48)$$

Будем искать решение уравнения (12.48) в виде

$$v_y = A e^{i(kx - \omega t)}.$$

Тогда придем к закону дисперсии

$$k^2 = i \frac{\omega}{\nu}, \quad (12.49)$$

откуда, имея в виду (12.40), получим

$$\beta^2 - \alpha^2 = 0, \quad 2\alpha\beta = \frac{\omega}{\nu}.$$

Следовательно, фазовая скорость и коэффициент затухания рассматриваемой волны соответственно равны

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{2\nu\omega}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}. \quad (12.50)$$

Таким образом, в вязкой жидкости действительно могут возникать малые поперечные возмущения, которые очень быстро затухают; амплитуда волны падает в e раз на расстоянии

$x \approx \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$, а на расстоянии, равном длине волны $2\pi/\beta$, падает в $e^{2\pi}$ раз, причем отношение коэффициента затухания звука к коэффициенту затухания поперечной волны пропорционально $\omega^{3/2}$.

§ 12.4. Магнитогидродинамика вязкой жидкости

Рассмотрим уравнения движения вязкой проводящей жидкости, предполагая, что выполнены условия, сформулированные в начале § 11.7. Допустим также, что электропроводность жидкости достаточно велика, но конечна, а плотность жидкости постоянна. Тогда движение жидкости может быть описано уравнениями

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{vH}] - \frac{c^2}{4\pi\lambda} \text{rot rot } \mathbf{H}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (12.51)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}, \quad (12.52)$$

где объемная сила является силой Лоренца, равной

$$\rho \mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}], \quad (12.53)$$

(см. (11.107), (11.109), (11.110), (12.22), (12.23)).

Преобразуем первое из уравнений (12.51), используя соотношения (см. формулу (8) примера 11.9)

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H},$$

$$\text{rot} [\mathbf{vH}] = (\mathbf{H}\nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{H}$$

(здесь учтено, что $\text{div } \mathbf{H} = 0$ и $\text{div } \mathbf{v} = 0$). Тогда вместо (12.51) получим систему

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\mathbf{H}\nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{H} + \frac{c^2}{4\pi\lambda} \Delta \mathbf{H}, \quad (12.54)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (12.55)$$

Затем преобразуем силу Лоренца (12.53) с помощью соотношения (см. формулу (9) примера 11.9)

$$[\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] = (\mathbf{H}\nabla) \mathbf{H} - \nabla \left(\frac{H^2}{2} \right).$$

В результате получим гидродинамические уравнения в виде

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (12.56)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \eta \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H}\nabla) \mathbf{H}. \quad (12.57)$$

С помощью системы уравнений (12.54)–(12.57) можно описать изменение гидродинамических полей и магнитного поля в несжимаемой вязкой достаточно проводящей жидкости.

Пример 12.5. Стационарное течение несжимаемой вязкой проводящей жидкости между параллельными плоскостями в однородном постоянном магнитном поле.

Пусть напряженность \mathbf{H}_0 внешнего магнитного поля перпендикулярна неподвижным параллельным плоскостям, расстояние между которыми равно l ; пусть также вдоль некоторого направления, параллельного плоскостям, задан постоянный перепад давления на единицу длины. Учитывая, что при стационарном течении скорость жидкости направлена вдоль перепада давления, выберем систему координат с осью x , направленной вдоль скорости, и осью y — вдоль вектора \mathbf{H}_0 (начало координат поместим посередине между плоскостями).

Очевидно, что скорость потока зависит только от координаты y и посередине потока больше, чем у стенок; это приводит к растяжению силовых линий в направлении движения и появлению составляющей h_x напряженности магнитного поля. В соответствии с этими качественными соображениями будем искать решение в виде:

$$\mathbf{v} = v(y) \mathbf{n}_x, \quad p = p(x, y),$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad \mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{n}_y, \quad \mathbf{h} = h(y) \mathbf{n}_x. \quad (1)$$

Используя (1), из уравнений (12.54) — (12.57) получим

$$0 = H_0 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{c^2}{4\pi\lambda} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{H_0}{4\pi} \frac{\partial h_x}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(p + \frac{h_x^2}{8\pi} \right) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) сразу приводит к интегралу

$$p + \frac{h_x^2}{8\pi} = C(x), \quad (5)$$

который связывает давление и возмущение магнитного поля.

Теперь упростим (2) и (3), имея в виду форму решения (1) и постоянство градиента давления вдоль оси x :

$$\frac{dv}{dy} + \frac{c^2}{4\pi\lambda H_0} \frac{d^2 h}{dy^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{H_0}{4\pi\eta} \frac{dh}{dy} = -\frac{1}{\eta} \frac{\Delta p}{L},$$

где $\Delta p/L$ — перепад давления на единицу длины (вдоль течения).

Нетрудно проверить, что решением этой системы, удовлетворяющим граничным условиям

$$v|_{y=\pm \frac{l}{2}} = 0, \quad h|_{y=\pm \frac{l}{2}} = 0,$$

являются функции

$$v = \frac{cl}{2H_0 \sqrt{\lambda\eta}} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \frac{1}{\operatorname{sh} \left(\frac{\alpha l}{2} \right)} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\alpha l}{2} \right) - \operatorname{ch}(\alpha y) \right], \quad (6)$$

$$h = \frac{2\pi l}{H_0} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \frac{1}{\operatorname{sh} \left(\frac{\alpha l}{2} \right)} \left[\operatorname{sh}(\alpha y) - \frac{2}{l} y \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha l}{2} \right) \right], \quad (7)$$

где $\alpha = \frac{H_0}{c} \sqrt{\frac{\lambda}{\eta}}$.

Влияние магнитного поля на характер движения жидкости характеризуется значением параметра αl . При $\alpha l \ll 1$ (т. е. при небольших значениях напряженности H_0 магнитного поля) из формулы (6) получим предельный случай, который был рассмотрен в примере 12.2. Если же H_0 велико, т. е. $\alpha l \gg 1$, то из (6) и (7) следует

$$v = \frac{cl}{2H_0 \sqrt{\lambda\eta}} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \left[1 - e^{-\alpha \left(\frac{l}{2} - |y| \right)} \right], \quad (8)$$

$$h = \frac{2\pi l}{H_0} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \left[e^{-\alpha \left(\frac{l}{2} - |y| \right)} - \frac{2y}{l} \right]. \quad (9)$$

Сопоставляя формулы (8) настоящего примера и (3) примера 12.2 при $y=0$, убедимся в том, что отношение максимальной скорости течения при включенном магнитном поле большой напряженности к максимальной скорости в отсутствие магнитного поля равно $4c\eta^{1/2}/H_0 l \lambda^{1/2}$. Таким образом, включение магнитного поля уменьшает максимальную скорость течения (в связи с этим и средняя скорость течения становится меньше).

Приложение к главе XII

Во многих случаях, когда поля обладают некоторой симметрией, удобно использовать соответствующие криволинейные координаты q_k ($k=1, 2, 3$), которые связаны с декартовыми координатами x_i ($i=1, 2, 3$) с помощью функций

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

В каждой точке пространства можно задать локальный базис, состоящий из ортов n_k ($k=1, 2, 3$), касательных к соответствующим координатным линиям $q_i = \text{const}$. Напомним также, что элемент ds длины дуги между двумя близкими точками в координатах q определяется квадратичной дифференциальной формой

$$ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 = a_{ik} dq_i dq_k \quad (2)$$

с коэффициентами

$$a_{ik} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k}, \quad (3)$$

которые образуют тензор, называемый метрическим; при этом в случае ортогональных криволинейных координат форма (2) имеет вид

$$ds^2 = a_{11} (dq_1)^2 + a_{22} (dq_2)^2 + a_{33} (dq_3)^2. \quad (4)$$

Вместо коэффициентов этой формы часто используют более удобные коэффициенты Ламэ, равные

$$H_i = \sqrt{a_{ii}}. \quad (5)$$

Теперь приведем выражения основных операторов векторного анализа, а именно градиента, дивергенции и ротора (в правой системе ортогональных координат):

$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \mathbf{n}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \mathbf{n}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \mathbf{n}_3, \quad (6)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{H} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (v_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (v_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (v_3 H_1 H_2) \right\}, \quad (7)$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \frac{1}{H} \begin{vmatrix} H_1 \mathbf{n}_1 & H_2 \mathbf{n}_2 & H_3 \mathbf{n}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 v_1 & H_2 v_2 & H_3 v_3 \end{vmatrix}; \quad (8)$$

здесь $H = H_1 H_2 H_3$ (см. [65, гл. 6]).

Приведем также выражение для двух компонент тензора скоростей деформации (10.23) в тех же координатах:

$$v_{11} = \frac{1}{H_1} \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right\}, \quad (9)$$

$$v_{12} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} - \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{v_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right\} \quad (10)$$

(остальные компоненты v_{ik} можно получить из этих формул соответствующей заменой индексов). Наконец напомним, что в цилиндрических и сферических координатах коэффициенты Ламэ соответственно равны

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1, \quad (11)$$

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r \sin \theta. \quad (12)$$

Глава XIII

ИДЕАЛЬНО УПРУГОЕ ТЕЛО

§ 13.1. Закон Гука и уравнения изменения импульса

Важную роль в механике сплошных сред занимает раздел, посвященный изучению твердых тел, т. е. сред, у которых сопротивление сдвигу при данных (не зависящих от времени) деформациях сколь угодно долго остается конечной (отличной от нуля) величиной*. Ограничимся изучением таких твердых тел, напряжения которых в любой точке в любой момент времени зависят от деформаций в той же точке в тот же момент времени (кроме того, напряжения могут зависеть от температуры T). Такие тела называются и д е а л ь н о у п р у г и м и. Принимается также, что состояния идеально упругих тел являются локально равновесными, а процессы, происходящие в них, термодинамически обратимы.

Одной из основных величин, характеризующих идеально упругое тело, является тензор деформации, который вводится путем сравнения двух состояний среды (см. § 10.2). Выберем в качестве начального состояния тела его недеформированное состояние в отсутствии внешних сил при некоторой заданной температуре T_0 и плотности ρ_0 , а в качестве второго состояния возьмем деформированное состояние тела при температуре T и плотности ρ (переход в это состояние может происходить как в результате воздействия внешних сил, так и за счет передачи тепла из внешнего источника).

Рассмотрим случай, когда деформации тела и изменение его температуры достаточно малы, а напряжения линейно зависят от деформаций и разности температур, т. е. случай, когда тензор напряжений имеет вид

$$P_{ik} = C_{ik,lm} \varepsilon_{lm} - \alpha_{ik} (T - T_0), \quad (13.1)$$

где $C_{ik,lm}$ и α_{ik} — постоянные, называемые соответственно модулями упругости и коэффициентами термоуп-

* В отличие от данной главы термин «твердое тело» употреблялся до сих пор как краткий термин, обозначающий «абсолютно твердое тело», т. е. такое тело, которое не может быть деформировано.

ругости. Соотношение (13.1) представляет собой обобщение закона Гука, справедливое как для изотропных тел, у которых свойства упругости и термоупругости в любой точке одинаковы во всех направлениях, так и для анизотропных тел, свойства которых различны в различных направлениях. С другой стороны, учитывая только линейную зависимость напряжений от деформации и изменений температуры и пренебрегая зависимостью напряжений от скоростей деформации, мы заведомо отказываемся от рассмотрения нелинейных упругих эффектов, а также от изучения вязких свойств твердых тел.

Получим уравнения идеально упругого твердого тела, исходя из системы (10.72)—(10.75). Поскольку тензор напряжений (13.1) выражается через тензор деформации, а тензор деформации через вектор смещения $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, выберем этот вектор в качестве неизвестной функции в уравнениях движения (10.73). Смещение \mathbf{u} данной частицы всегда можно определить, как

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}_0, \quad (13.2)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор частицы в момент времени t , а \mathbf{r}_0 — радиус-вектор той же частицы в начальный момент времени. Тогда скорость рассматриваемой частицы будет равна

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t}. \quad (13.3)$$

Здесь в отличие от (10.1), где были использованы переменные \mathbf{r} , t , применяются переменные \mathbf{r}_0 , t , т. е. такие переменные, которые позволяют следить за изменением величин, характеризующих данную частицу (например, фиксируя \mathbf{r}_0 в (13.3), мы получим значение скорости в любой момент времени для той частицы, которая в момент t_0 была в точке пространства \mathbf{r}_0). Переменные \mathbf{r} , t называются эйлеровыми, а переменные \mathbf{r}_0 , t — лагранжевыми.

Теперь допустим *малость смещений на любом интервале времени*, тогда вместо (13.3) можно написать

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (13.4)$$

Отсюда, полагая *скорости малыми* и используя (10.47), найдем ускорение частицы в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (13.5)$$

Далее, допуская *малость ускорений и отклонений плотности*, из (10.73) получим уравнения изменения импульса

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho_0 f_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (13.6)$$

Уравнение непрерывности, представленное в виде (см. (10.33), (10.35'))

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (13.7)$$

дает возможность определить плотность массы по известному полю смещений.

Наконец, уравнения (10.74) и (10.75) приводят к важным термодинамическим соотношениям. В самом деле, исключая из этих уравнений тепловой поток и полагая, ввиду обратимости деформаций, $D=0$, найдем уравнение

$$\rho \frac{de}{dt} = P_{ik} v_{ik} + \rho T \frac{ds}{dt}. \quad (13.8)$$

Далее тензор скоростей деформации с помощью (13.4) можно представить в виде*

$$v_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} \right) \right] = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial t}, \quad (13.9)$$

откуда в случае малых скоростей следует, что $v_{ik} = \frac{d\varepsilon_{ik}}{dt}$. Таким образом, вместо (13.8) получим

$$\rho de = P_{ik} d\varepsilon_{ik} + \rho T ds. \quad (13.10)$$

Наконец, вводя более удобные для рассматриваемой теории энергию $\mathcal{E} = \rho_0 e$ и энтропию $\mathcal{S} = \rho_0 s$, приходящиеся на единицу недеформированного объема и учитывая малость отклонений плотности, найдем *термодинамическое уравнение*

$$d\mathcal{E} = P_{ik} d\varepsilon_{ik} + T d\mathcal{S}. \quad (13.11)$$

Система уравнений (13.6), (13.7) и (13.11) представляет собой систему уравнений движения идеально упругого тела.

Приведем ряд соотношений, вытекающих из термодинамического уравнения. Например, из него следует, что

$$P_{ik} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon_{ik}} \right)_{\mathcal{S}}, \quad T = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathcal{S}} \right)_{\varepsilon_{ik}} \quad (13.12)$$

* В силу (13.4) соотношение (13.9) является приближенным. Можно убедиться в справедливости точного соотношения, согласно которому скорость изменения тензора деформации для данной частицы равна тензору скоростей деформации [59, гл. II, § 9].

(здесь и далее символ $\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\right)_\gamma$ означает частную производную по β при постоянной γ). Эти формулы дают возможность, зная энергию, как функцию деформаций и энтропии, получить напряжения и температуру. Если же выразить (13.11) через другую термодинамическую функцию, а именно через свободную энергию

$$F = \mathcal{E} - T \mathcal{S}, \quad (13.13)$$

то (13.11) примет форму

$$dF = P_{ik} d\varepsilon_{ik} - \mathcal{S} dT, \quad (13.14)$$

откуда вытекают соотношения

$$P_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ik}}\right)_T, \quad \mathcal{S} = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\varepsilon_{ik}}, \quad (13.15)$$

определяющие напряжения и энтропию, как функции деформаций и температуры.

Из сопоставления (13.1) с первой формулой (13.15) следует, что свободная энергия упругого тела должна иметь вид

$$F = \frac{1}{2} C_{ik,lm} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm} + a_{ik} \varepsilon_{ik} (T - T_0) + F_0(T), \quad (13.16)$$

где модули упругости и термоупругости не зависят от температуры (можно показать, что неопределенная здесь функция $F_0(T)$ связана с теплоемкостью тела при постоянных деформациях). Действительно, в этом случае из (13.16) и первой формулы (13.15) получим закон Гука (13.1), который при *изотермической деформации* ($T=T_0$) принимает обычную форму

$$P_{ik} = C_{ik,lm} \varepsilon_{lm}. \quad (13.17)$$

Как видно, упругие свойства тела определяются тензором четвертого ранга $C_{ik,lm}$, который будем называть тензором упругости. В общем случае тензор четвертого ранга имеет $3^4=81$ независимую компоненту. Однако максимальное число независимых компонент тензора упругости равно 21. Действительно, поскольку тензоры P_{ik} и ε_{ik} симметричны, т. е. каждый из них имеет по 6 независимых компонент, то число независимых компонент тензора упругости снижается до 36. Это связано с симметрией $C_{ik,lm}$ относительно перестановок индексов как внутри первой, так и внутри второй пары индексов (ввиду симметричности P_{ik} и ε_{ik}):

$$C_{ik,lm} = C_{ki,lm} = C_{ik,ml}. \quad (13.18)$$

Кроме того, имеются еще 15 соотношений, связанных с симметрией модулей упругости относительно перестановки первой пары индексов со второй,

$$C_{ik,lm} = C_{lm,ik}; \quad (13.19)$$

эта симметрия вытекает из существования свободной энергии, как скалярной функции вида (13.16). Итак, благодаря наличию соотношений (13.18) и (13.19) *упругие свойства твердых тел в общем случае характеризуются 21 независимым модулем упругости.*

Можно непосредственно убедиться, что в число этих модулей входят по 3 модуля каждого из видов $C_{ii,ii}$, $C_{ii,kk}$, $C_{ik,ik}$, $C_{ij,kk}$, $C_{ij,ik}$ ($i \neq k$, $i \neq j$, $j \neq k$) и 6 модулей вида $C_{ii,ik}$ ($i \neq k$).

Если анизотропное тело обладает какой-либо присущей ему симметрией, то появляются дополнительные соотношения между модулями упругости и тем самым уменьшается число независимых модулей. Например, возьмем монокристалл кубической системы. Направляя координатные оси по ребрам элементарного куба и имея в виду симметрию кубического кристалла при отражении относительно координатных плоскостей, приходим к выводу, что все модули, у которых одинаковые значения индексов встречаются нечетное число раз, равны нулю (если, например, заменить y на $-y$, то ϵ_{xy} изменит знак; поэтому следует положить $C_{xx,xy} = 0$, в противном случае свободная энергия изменится, что будет противоречить указанной симметрии кристалла). Таким образом, остаются отличными от нуля 9 модулей: по 3 модуля каждого из видов: $C_{ii,ii}$, $C_{ii,kk}$, $C_{ik,ik}$ ($i \neq k$). Кроме того, в выбранной системе координат все координатные оси равноправны (например, замена оси x на ось y не должна изменять свободную энергию). Поэтому кубический кристалл характеризуется лишь тремя независимыми модулями упругости $C_{xx,xx}$, $C_{xx,yy}$, $C_{xy,xy}$.

У изотропного тела симметрия еще выше: тензор упругости вообще не зависит от выбора направления осей координат, что приводит еще к одному соотношению, а именно

$$C_{xx,xx} = C_{xx,yy} + C_{xy,xy}. \quad (13.20)$$

В самом деле, учитывая, что модули изотропного тела должны быть скалярными величинами, а из компонент ϵ_{ij} можно составить единственный линейный скаляр $\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ (см. (10.32)), заключаем, что закон Гука (13.17) для изотропного тела должен иметь вид

$$P_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad (13.21)$$

где λ и μ — постоянные, которые называются модулями Ламэ (здесь и в дальнейшем ϵ_{kk} означает сумму $\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$). Сопоставляя (13.21) с (13.17), видим, что

$$C_{xx,xx} = \lambda + 2\mu, \quad C_{xx,yy} = \lambda, \quad C_{xy,xy} = 2\mu,$$

откуда следует (13.20). Итак, *упругие свойства изотропного тела характеризуются двумя постоянными.*

Тензор напряжений (13.21) можно представить в виде, аналогичном тензору (12.4) напряжений вязкой жидкости, т. е. в виде

$$P_{ij} = 2\mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) + K \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad (13.22)$$

где $K = \lambda + \frac{2}{3} \mu$; здесь первый член (с коэффициентом μ) связан с деформацией сдвига, а второй член, пропорциональный ε_{kk} , связан с изменением объема. Поэтому модуль μ называется модулем сдвига, а $K = \lambda + \frac{2}{3} \mu$ — модулем объемного сжатия.

Заметим, что тензору (13.22) соответствует свободная энергия

$$F = \mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right)^2 + \frac{K}{2} \varepsilon_{kk}^2, \quad (13.23)$$

которая в состоянии термодинамического равновесия должна обладать минимумом. В отсутствие внешних сил минимум свободной энергии будет иметь место при $\varepsilon_{ij} = 0$, в связи с чем F должна быть положительно определенной формой деформаций. Это доказывает, что модули сдвига и объемного сжатия являются положительными величинами:

$$\mu > 0, \quad K > 0. \quad (13.24)$$

Получим практически полезное соотношение, обратное соотношению (13.22). Для этого «свернем» тензор (13.22) с δ_{ij} , т. е. найдем сумму

$$P_{ij} \delta_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} \delta_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \delta_{ij}.$$

Заметим, что

$$P_{ij} \delta_{ij} = P_{ii}, \quad \delta_{ij} \delta_{ij} = 3.$$

Тогда получим (здесь и в дальнейшем P_{ii} означает сумму $P_{11} + P_{22} + P_{33}$)

$$P_{ii} = 3K \varepsilon_{ii}, \quad (13.25)$$

а используя (13.25), из (13.22) придем к искомому соотношению

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{9K} P_{kk} \delta_{ij} \quad (13.26)$$

(обратим внимание на формулу (13.25), согласно которой *сумма диагональных компонент тензора напряжений пропорциональна относительному изменению объема ε_{ii}*).

Тензор термоупругости α_{ij} является симметричным тензором, что следует из (13.1) ввиду симметрии тензора напряжений. Число независимых компонент α_{ij} уменьшается, если тело обладает симметрией. Например, для кубических кристаллов и изотропных сред тензор α_{ij} сводится к одной величине α . Таким образом, закон Гука для изотропных упругих тел с учетом изменения температуры можно представить в форме

$$P_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - K\alpha(T - T_0) \delta_{ij}, \quad (13.27)$$

где α — коэффициент теплового расширения. В этом легко убедиться, сворачивая (13.27) с δ_{ij} при $P_{ij}=0$ (поскольку при тепловом расширении в отсутствие внешних сил напряжения должны отсутствовать). Тогда, используя (10.33), получим соотношение

$$\frac{d\Delta V}{\Delta V} = \alpha(T - T_0), \quad (13.28)$$

из которого становится понятным смысл постоянной α , как коэффициента теплового расширения.

Свободная энергия, соответствующая тензору напряжений (13.27), должна иметь вид

$$F = \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{ik} \delta_{ik})^2 + \mu \varepsilon_{ik} \varepsilon_{ik} - K\alpha(T - T_0) \varepsilon_{ik} \delta_{ik} - \frac{c_\varepsilon}{2} \frac{(T - T_0)^2}{T_0} - \mathcal{S}_0 T, \quad (13.29)$$

где λ , μ , K , α , c_ε , \mathcal{S}_0 — постоянные величины. Действительно, такая функция деформаций и температуры согласно первой формуле (13.15) приводит к правильному выражению (13.27) для тензора напряжений, а согласно второй формуле (13.15) определяет энтропию

$$\mathcal{S} = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ik}} = K\alpha \varepsilon_{kk} + c_\varepsilon \frac{T - T_0}{T_0} + \mathcal{S}_0 \quad (13.30)$$

и тем самым отличную от нуля теплоемкость c_ε тела при постоянных деформациях. Такая теплоемкость по определению и согласно первому и второму законам термодинамики равна

$$c_\varepsilon = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{\varepsilon_{ij}} = T \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}}.$$

В заключение параграфа получим уравнение изменения импульса для изотропного упругого тела, аналогичное уравнению Навье—Стокса. Предполагая, что модули упругости λ и μ постоянны, и пренебрегая изменением температуры (что справедливо

при достаточно малых значениях α), подставим (13.27) в (13.6) и совершим преобразования типа (12.17) и (12.18). Тогда найдем уравнение изменения импульса изотропного упругого тела

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f}, \quad (13.31)$$

которое называется уравнением Ламэ. Если же пренебречь изменением температуры нельзя, то правую часть уравнения Ламэ следует дополнить членом $-K\alpha \nabla T$ и рассматривать полученное уравнение совместно с уравнением теплопроводности, вытекающим из (10.75).

§ 13.2. Равновесие изотропных тел

Рассмотрим деформированное изотропное тело, находящееся в стационарном состоянии. Деформации такого тела подчинены уравнению (см. (13.6))

$$\frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho_0 f_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (13.32)$$

где f_i — заданная стационарная объемная сила, приходящаяся на единицу массы, а тензор напряжений P_{ik} определен в (13.27); при этом уравнение (13.32) должно быть дополнено уравнением теплопроводности в стационарном случае. Если же модуль упругости и температура тела постоянны, то уравнение (13.32) приобретает вид (см. (13.31)):

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f} = 0 \quad (13.33)$$

(внешней объемной силой, обычно рассматриваемой в теории упругости, является однородная сила тяжести).

Весьма важным для приложений оказывается случай равновесия тел, деформации которых вызываются силами, приложенными к поверхности этих тел. Тогда уравнением равновесия является уравнение

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = 0, \quad (13.34)$$

а внешние поверхностные силы будут учитываться в граничных условиях. Если f^σ — заданная внешняя сила, приходящаяся на единицу поверхности тела, то к площадке $d\sigma = \mathbf{n} d\sigma$ (\mathbf{n} направлен по внешней нормали к поверхности тела) будет приложена сила $f_i^\sigma d\sigma$, которая должна уравновешиваться силой $P_{ik} d\sigma_k$, вызванной напряжениями тела. Таким образом, при равновесии должно выполняться условие

$$P_{ik}n_k = f_i^\sigma \quad (13.35)$$

для всех элементов поверхности тела.

Наиболее простым случаем деформированного равновесного состояния изотропного тела является однородная деформация, при которой компоненты тензора деформации можно считать постоянными вдоль всего тела. Рассмотрим ряд простых примеров. Пусть тело подвергается всестороннему равномерному сжатию. Это значит, что сила $d\mathbf{F}^\sigma$, приложенная к любой площадке $d\sigma$ поверхности тела, равна $-pd\sigma$, где p — давление постоянной величины. Следовательно, на поверхности тела согласно (13.35) должно выполняться условие $P_{ik}n_k = -pn_i$, которое удовлетворяется, если тензор напряжений равен

$$P_{ik} = -p\delta_{ik}. \quad (13.36)$$

Отсюда, а также из (13.26) следует, что

$$P_{ii} = -3p, \quad \varepsilon_{ik} = -\frac{p}{3K}\delta_{ik}. \quad (13.37)$$

Таким образом, всестороннее равномерное сжатие приводит только к изменению объема $\varepsilon_{ii} = -p/K$, которое определяется давлением p и модулем объемного сжатия K ; при этом все деформации сдвига отсутствуют: $\varepsilon_{ik} = 0$ ($i \neq k$):

Далее изучим деформацию чистого сдвига кубика с гранями единичной площади (см. рис. 13.1, на котором изображен кубик до деформации). Пусть к граням кубика 1—4 приложены равные по величине касательные силы f^σ , так как это показано на рисунке. Нормаль к грани 1 имеет составляющие 1, 0, 0 и, следовательно, условие (13.35) для этой грани сводится к условию $P_{ix} = f_i^\sigma$, откуда $P_{xx} = P_{yx} = 0$, $P_{zx} = f^\sigma$. Для грани 2 с нормалью $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ найдем $P_{xz} = f^\sigma$, $P_{yz} = P_{zz} = 0$. Для граней 3 и 4 получим те же результаты, а условия на гранях 5 и 6 дадут, что

$P_{xy} = P_{yy} = P_{zy} = 0$. Таким образом, единственной отличной от нуля компонентой тензора напряжений будет P_{xz} , которая согласно (13.26) определяет деформацию сдвига и угол скашивания (см. с. 466):

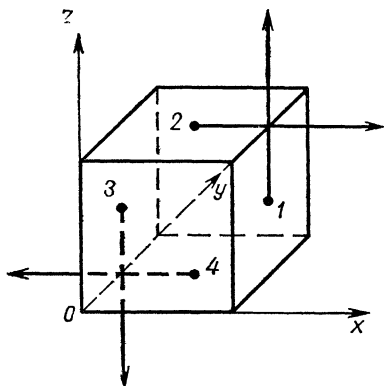


Рис. 13.1

$$\varepsilon_{xz} = \frac{f^\sigma}{2\mu}, \quad \theta = -\frac{f^\sigma}{\mu}. \quad (13.38)$$

Как видно, эти величины зависят только от внешней силы и модуля сдвига. Объем же тела при чистом сдвиге остается неизменным, поскольку $P_{ii}=0$, и, следовательно, $\varepsilon_{ii}=0$.

Теперь рассмотрим растяжение (сжатие) стержня — прямоугольного параллелепипеда, к торцам которого приложены противоположно направленные, равные по величине, постоянные силы с равномерным распределением по площади каждого торца. Направляя ось z вдоль стержня и используя условия (13.35) на боковых гранях и торцах стержня, найдем единственную отличную от нуля компоненту тензора напряжения P_{zz} , равную f^σ — плотности растягивающей силы. Подставляя $P_{zz}=f^\sigma$ в (13.26), получим значения компонент тензора деформации

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K} \right) f^\sigma, \quad (13.39)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{3K} \right) f^\sigma. \quad (13.40)$$

Как видно, растяжение стержня вдоль направления внешней силы происходит одновременно с его поперечным сжатием, при этом отношение поперечного сжатия к продольному растяжению равно

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}} = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + 2\mu} \quad (13.41)$$

и называется коэффициентом Пуассона. Поскольку $K > 0$ и $\mu > 0$ (см. (13.24)), значения ν заключены в пределах

$$-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2} \quad (13.42)$$

(хотя в действительности неизвестны тела, для которых $\nu < 0$).

Заметим, что относительное удлинение стержня удобно представить в форме

$$\varepsilon_{zz} = \frac{f^\sigma}{E}, \quad (13.43)$$

где

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \quad (13.44)$$

— постоянная, которая называется модулем Юнга. Так как постоянные E и ν употребляются очень часто, приведем формулы, обратные формулам (13.41) и (13.44):

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (13.45)$$

Пример 13.1. Чистый изгиб стержня.

Пусть к обоим торцам цилиндрического стержня произвольно-го поперечного сечения приложены поверхностные силы с плотностью

$$\mathbf{f}^\sigma = -\alpha x \mathbf{n}_z \quad (1)$$

и моментом сил, равным по абсолютной величине L^σ ; при этом начало координат находится в центре масс торца 1, а ось z проходит через центры масс торцов недеформированного стержня (здесь под центром масс торца следует понимать центр масс однородного плоского диска, по форме совпадающего с торцом). Предполагая, что деформация происходит изотермически в отсутствие объемных сил, а центр масс торца 1 не смещается в процессе деформации, найти поля деформаций и смещений стержня (рис. 13.2).

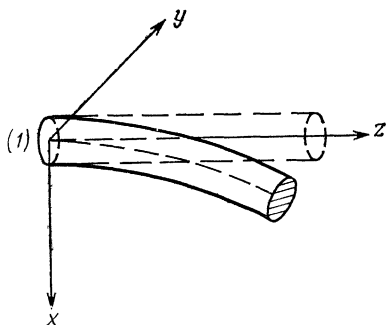


Рис. 13.2

Момент \mathbf{L}^σ сил, действующих на торец 2, равен

$$\int_{\sigma_2} [\mathbf{r} \mathbf{f}^\sigma] d\sigma = \alpha n_y \int_{\sigma_2} x^2 d\sigma - \alpha n_x \int_{\sigma_2} xy d\sigma.$$

Появившиеся справа интегралы можно определить как моменты инерции торца (в отличие от обычных моментов инерции здесь вместо элемента массы стоит элемент площади). Центробежный момент инерции

Согласно (1) суммарная сила \mathbf{F}^σ , действующая на торец 2, равна

$$\int_{\sigma_2} \mathbf{f}^\sigma d\sigma = -\alpha n_z \int_{\sigma_2} x d\sigma,$$

где интеграл справа пропорционален координате x_m центра масс этого торца. Таким образом, в силу выбора начала координат получим

$$\mathbf{F}^\sigma = 0.$$

$$\int_{\sigma_2} xy d\sigma = 0,$$

так как оси x и y совпадают с главными осями инерции торца 2. Поэтому для момента сил, приложенных к 2, получим выражение

$$\mathbf{L}^\sigma = \alpha J \mathbf{n}_y,$$

где $J = \int_{\sigma_2} x^2 d\sigma$ — момент инерции относительно оси y . Отсюда следует, что

$$\alpha = \frac{L^\sigma}{J}. \quad (2)$$

На торце 1 аналогично получим

$$\int_{\sigma_1} \mathbf{f}^\sigma d\sigma = 0, \quad \int_{\sigma_1} [\mathbf{r} \mathbf{f}^\sigma] d\sigma = -\mathbf{L}^\sigma.$$

Итак, суммарные силы и моменты сил, приложенные ко всему стержню, равны нулю, причем ввиду (1), (2) и условия (13.35) напряжения на торце 2 равны

$$P_{zz} = -\frac{L^\sigma}{J} x, \quad P_{xx} = P_{yy} = P_{xy} = P_{xz} = P_{yz} = 0. \quad (3)$$

Более того, эти напряжения удовлетворяют уравнению равновесия (13.32) и условию (13.35) на боковых поверхностях стержня (поскольку на них $f_i^\sigma = 0$).

Подставляя (3) в закон Гука (13.26), найдем тензор деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} &= \frac{\nu L^\sigma}{EJ} x, \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{L^\sigma}{EJ} x, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда видно, что частицы стержня, лежащие в плоскости $x=0$, не испытывают деформаций. Все «отрезки» стержня, параллельные оси z , при $x>0$ сжимаются вдоль z , а при $x<0$ растягиваются; «отрезки» же, параллельные оси x , при $x>0$ удлиняются, а при $x<0$ сокращаются вдоль оси x (аналогичные деформации испытывают «отрезки», параллельные оси y).

Запишем (4) в виде системы уравнений относительно смещения

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \nu \alpha x, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\alpha x,$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0,$$

где $a = L^\sigma/EJ$. Эта система имеет решение

$$u_x = \frac{a}{2} [z^2 + \nu(x^2 - y^2)],$$

$$u_y = \nu axy, \quad u_z = -axz$$

(здесь постоянные интегрирования опущены, поскольку перемещение центра масс торца I равно нулю). Таким образом, точка \mathbf{g}_0 недеформированного стержня после деформации переходит в точку $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{u}$, причем компоненты ее радиуса-вектора равны:

$$x = x_0 + \frac{a}{2} [z_0^2 + \nu(x_0^2 - y_0^2)],$$

$$y = y_0 + \nu ax_0 y_0,$$

$$z = z_0 - ax_0 z_0.$$

Отсюда, например, видно, что точки оси стержня $x_0 = y_0 = 0$ после деформации лежат на параболе

$$x = \frac{L^\sigma}{2EJ} z_0^2 \approx \frac{L^\sigma}{2EJ} z^2,$$

а точки, лежащие до деформации в плоском сечении $z = z_0$, после деформации образуют плоское поперечное сечение

$$z \approx z_0 \left(1 - \frac{L^\sigma}{EJ} x \right)$$

деформированного стержня (форма сечения при этом изменится, что связано с различием знаков ϵ_{xx} и ϵ_{yy} при $x > 0$ и $x < 0$). Из решения также видно, что жесткость стержня EJ зависит не только от материала стержня, т. е. от модуля E , но и от момента J , а следовательно, от формы поперечного сечения.

Пример 13.2. Кручение цилиндрического стержня.

Найти деформации и напряжения цилиндрического стержня радиуса R и высоты h в случае чистого кручения, а также найти поверхностные силы, приложенные к торцам стержня (торцы перпендикулярны оси цилиндра, объемные силы отсутствуют, а температура при деформации не изменяется).

Направим ось z через центры инерции торцов, помещая начало координат на закрепленном торце I . Чистое кручение представляет собой такую деформацию, при которой смещение каждой частицы представляет собой поворот в плоскости, перпендикулярной к оси z на угол

$$\delta\varphi = \frac{\Delta\varphi}{h} z$$

без изменения расстояния r от оси z (здесь $\Delta\varphi$ — угол поворота второго торца). В этом случае координаты смещенной частицы будут равны

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi + \delta\varphi) = r \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \delta\varphi, \\ y &= r \sin(\varphi + \delta\varphi) = r \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \delta\varphi, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Отсюда, используя (13.2), определение ε_{ij} и (13.22), найдем поле смещений

$$\begin{aligned} u_x &= x - r \cos \varphi = -\frac{\Delta\varphi}{h} yz, \\ u_y &= y - r \sin \varphi = \frac{\Delta\varphi}{h} xz, \\ u_z &= 0, \end{aligned}$$

тензор деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = 0, \\ \varepsilon_{xz} &= -\frac{\Delta\varphi}{2h} y, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\Delta\varphi}{2h} x \end{aligned}$$

и тензор напряжений

$$\begin{aligned} P_{xx} &= P_{yy} = P_{zz} = P_{xy} = 0, \\ P_{xz} &= -\mu \frac{\Delta\varphi}{h} y, \quad P_{yz} = \mu \frac{\Delta\varphi}{h} x. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия (13.32), очевидно, удовлетворяются, а граничное условие на торце 2 сводится к требованию $P_{iz} = f_i^\sigma$, откуда

$$f_x^\sigma = -\mu \frac{\Delta\varphi}{h} y, \quad f_y^\sigma = \mu \frac{\Delta\varphi}{h} x, \quad f_z^\sigma = 0.$$

Суммарная поверхностная сила, приложенная к торцу 2, равна интегралу по поверхности σ_2 этого торца, причем

$$\int_{\sigma_2} \mathbf{f}^\sigma d\sigma = 0,$$

поскольку

$$\int_{\sigma_2} x d\sigma = \int_{\sigma_2} y d\sigma = 0.$$

Момент сил, приложенных к торцу 2, будет отличен от нуля

$$\mathbf{L}^\sigma = \mathbf{n}_z \int_{\sigma_2} (x f_y^\sigma - y f_x^\sigma) d\sigma = \mu \frac{J \Delta \varphi}{h} \mathbf{n}_z, \quad (1)$$

здесь $J = \int_{\sigma_2} (x^2 + y^2) d\sigma$ — момент инерции торца 2 относительно оси z . Поскольку $J = \pi R^4/2$, выражение (1) приводит к основному результату этого примера — к зависимости угла кручения от материала и размеров цилиндра, а также от момента внешних сил:

$$\Delta \varphi = \frac{2h}{\pi \mu R^4} L^\sigma. \quad (2)$$

Нетрудно убедиться в том, что на торце 1 суммарная сила равна нулю, момент этих сил равен — \mathbf{L}^σ , а на боковой поверхности цилиндра $\mathbf{f}^\sigma = 0$.

Пример 13.3. *Гравитационное сжатие шара.*

Найти поле смещений и деформаций сплошного шара радиуса R под действием собственного гравитационного поля.

Сила тяготения, приходящаяся на единицу массы, в указанном случае равна

$$\mathbf{f} = -\frac{g}{R} \mathbf{r}, \quad (1)$$

где g — напряженность поля тяжести на поверхности шара. Учтывая (1) и преобразуя уравнение равновесия (13.33) с помощью соотношения

$$\text{grad div } \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \text{rot rot } \mathbf{u},$$

получим

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} - \mu \text{rot rot } \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f} = 0. \quad (2)$$

По соображениям симметрии смещение должно иметь вид

$$\mathbf{u} = u(r) \mathbf{n}_r, \quad (3)$$

и, следовательно (см. формулы (8) и (7) приложения к гл. XII):

$$\text{rot } \mathbf{u} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u). \quad (4)$$

Поэтому (2) сводится к уравнению

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u) \right] = \frac{\rho_0 g}{(\lambda + 2\mu) R} r, \quad (5)$$

которое легко интегрируется:

$$u = \frac{\rho_0 g}{10R(\lambda + 2\mu)} r^3 + \frac{C_1}{3} r + \frac{C_2}{r^2}. \quad (6)$$

Это решение будет конечным в области $0 \leq r \leq R$, если положить $C_2 = 0$. Постоянную C_1 можно определить из условия $P_{rr} = 0$ при $r = R$. С этой целью найдем зависимость P_{rr} от координат. Используем связь P_{rr} с компонентами тензора деформации (см. (13.21))

$$P_{rr} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \varepsilon_{rr},$$

а также выражения компонент ε_{ki} в сферических координатах (см. формулу (9) в приложении к гл. XII). Тогда с помощью (6) получим

$$P_{rr} = \frac{\rho_0 g}{10R} \left(\frac{5\lambda + 6\mu}{\lambda + 2\mu} \right) r^2 + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) C_1,$$

откуда определяется C_1 . Таким образом, найдем смещения и деформации

$$u = a \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{3-\nu}{1+\nu} \right) r,$$

$$\varepsilon_{rr} = a \left(3 \frac{r^2}{R^2} - \frac{3-\nu}{1+\nu} \right),$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = a \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{3-\nu}{1+\nu} \right),$$

где $a = \frac{\rho_0 g R}{10(\lambda + 2\mu)}$, ν — коэффициент Пуассона. Компонента ε_{rr} обращается в нуль при $r_1 = R \left(\frac{3-\nu}{3(1+\nu)} \right)^{1/2}$. Следовательно, внутри этой сферы вещество в радиальном направлении сжато, а вне сферы растянуто. Аналогичное заключение можно сделать и о «поперечном» сжатии, поскольку $\varepsilon_{\theta\theta}$ и $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ обращаются в нуль на сфере

$$r_2 = R \left(\frac{3-\nu}{1+\nu} \right)^{1/2} > r_1.$$

§ 13.3. Упругие волны

Изменение положения частицы упругого тела со временем связано, вообще говоря, с изменением ее температуры. Однако распространение колебаний частиц вдоль тела (т. е. упругие волны) происходит достаточно быстро по сравнению с передачей тепла от

частицы к частице. Поэтому эти волны можно считать изэнтропическим процессом. Тогда изменение температуры данной частицы тела будет определенным образом связано с изменением деформации этой частицы, что в свою очередь скажется на напряжениях.

Вычислим тензор напряжений, учитывая изэнтропичность упругой волны. С этой целью используем (13.30), т. е. выражение для энтропии, как функции деформаций и температуры, и положим в нем $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$. Тогда найдем изменение температуры

$$T - T_0 = - \frac{\alpha K T_0}{c_e} \varepsilon_{ll} \quad (13.46)$$

и тензор напряжений с учетом этого изменения (см. (13.27)):

$$P_{ik} = \left(\lambda + \frac{\alpha^2 K^2}{c_e} T_0 \right) \varepsilon_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}. \quad (13.47)$$

Полученный тензор отличается от тензора напряжений (13.21) тем, что вместо изотермического модуля упругости λ здесь появился адиабатический модуль

$$\lambda_{ad} = \lambda + \frac{\alpha^2}{c_e} \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right)^2 T_0 \quad (13.48)$$

(при этом модуль сдвига не изменился).

Уравнение для смещений в упругой волне в отсутствие объемных сил получим аналогично уравнению (13.31), используя (13.6) и (13.47). В результате найдем, что

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda_{ad} + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (13.49)$$

или

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (c_1^2 - c_2^2) \text{grad div } \mathbf{u} + c_2^2 \Delta \mathbf{u}, \quad (13.50)$$

где

$$c_1^2 = \frac{\lambda_{ad} + 2\mu}{\rho_0}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho_0}. \quad (13.51)$$

Теперь покажем, что уравнение движения (13.49) (или (13.50)) может быть сведено к системе двух уравнений, из которых одно описывает распространение продольной упругой волны со скоростью c_1 , а другое — распространение поперечной упругой волны со скоростью c_2 . Согласно теореме Гельмгольца о представлении векторного поля в виде суммы потенциального и соленоидального полей (см. (11.65)—(11.67)), положим

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad (13.52)$$

где

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}_1 = 0, \quad (13.53)$$

а

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0. \quad (13.54)$$

Подставляя (13.52) в (13.50) и учитывая (13.53), (13.54), а также то, что

$$\Delta \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}_2,$$

найдем исходное уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} = c_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}_2. \quad (13.55)$$

Исключим отсюда \mathbf{u}_2 . С этой целью применим к членам уравнения (13.55) операцию div , имея в виду (13.54) и то, что $\operatorname{div} \operatorname{grad} \equiv \Delta$, а $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$. Тогда получим, что

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta \mathbf{u}_1 \right) = 0;$$

при этом

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta \mathbf{u}_1 \right) = 0,$$

так как \mathbf{u}_1 — потенциальный вектор. Если же во всем пространстве div и rot вектора равны нулю, то и сам вектор должен равняться нулю. Следовательно, потенциальная часть смещения — вектор \mathbf{u}_1 — подчинен волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta \mathbf{u}_1 = 0, \quad (13.56)$$

которое описывает волны, распространяющиеся со скоростью $c_1 = [(\lambda_{\text{ад}} + 2\mu)/\rho_0]^{1/2}$; эти волны являются *волнами сжатия и растяжения*, поскольку $\operatorname{div} \mathbf{u}_1 \neq 0$.

Применяя к обеим частям (13.55) операцию rot , учитывая (13.53) и то, что $\operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0$, исключим из уравнения вектор \mathbf{u}_1 и найдем, что

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} + c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}_2 \right) = 0. \quad (13.57)$$

Но для соленоидального вектора

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}_2 = -\Delta \mathbf{u}_2.$$

Поэтому из (13.57) получим

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} - c_2^2 \Delta \mathbf{u}_2 \right) = 0,$$

причем согласно (13.54)

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} - c_2^2 \Delta \mathbf{u}_2 \right) = 0.$$

Следовательно, вектор \mathbf{u}_2 подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} - c_2^2 \Delta \mathbf{u}_2 = 0, \quad (13.58)$$

которое описывает волны, распространяющиеся со скоростью $c_2 = (\mu/\rho_0)^{1/2}$. Эти волны являются *волнами сдвига*, поскольку смещения частиц в такой волне представляют собой повороты ($\operatorname{rot} \mathbf{u}_2 \neq 0$), не сопровождающиеся изменением объема частиц ($\operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0$).

Наконец, рассматривая плоские монохроматические волны смещений

$$\mathbf{u}_{1,2} = \mathbf{a}_{1,2} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)},$$

подставляя эти смещения в соответствующие волновые уравнения и условия (13.53), (13.54), получим для первой волны

$$\frac{\omega}{k} = c_1, \quad [\mathbf{k}\mathbf{a}_1] = 0 \quad (13.59)$$

и для второй волны

$$\frac{\omega}{k} = c_2, \quad \mathbf{k}\mathbf{a}_2 = 0. \quad (13.60)$$

Отсюда ясно, что *волны сжатия и расширения являются продольными*, поскольку $\mathbf{k} \parallel \mathbf{a}_1$, а *волны сдвига — поперечными*, так как $\mathbf{k} \perp \mathbf{a}_2$.

ЛИТЕРАТУРА

Часть I

1. Галилей Г. Диалог о двух главнейших системах мира. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. Галилей Г. Беседы и математические доказательства, касающиеся двух отраслей науки, относящихся к механике и местному движению. М.—Л., Гостехиздат, 1934.
3. Ньютон И. Математические начала натуральной философии (русский перевод). — Собр. соч. акад. А. Н. Крылова. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1936.
4. Эйлер Л. Основы динамики точки. М.—Л., ОНТИ, 1938.
5. Даламбер Ж. Динамика. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
6. Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т. 1—2. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
7. Якоби К. Лекции по динамике. М.—Л., ГОНТИ, 1936.
8. Аппель П. Теоретическая механика. Т. I, II. М., Физматгиз, 1960.
9. Суслев Г. К. Теоретическая механика. М.—Л., Гостехиздат, 1946.
10. Планк М. Введение в общую механику. М.—Л., Госиздат, 1927.
11. Жуковский Н. Е. Теоретическая механика. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
12. Картан Э. Интегральные инварианты. М.—Л., Гостехиздат, 1940.
13. Зоммерфельд А. Механика. М., ИЛ, 1947.
14. Богуславский С. А. Избранные труды по физике. М., Физматгиз, 1961.
15. Френкель Я. И. Аналитическая механика. Изд. Ленинградского индустриального института, 1935.
16. Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т. I, II. М., 1955—1957.
17. Стрелков С. П. Механика. М., «Наука», 1975.
18. Хайкин С. Э. Физические основы механики. М., «Наука», 1971.
19. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1974.
20. Голдстейн Г. Классическая механика. М., Гостехиздат, 1975.
21. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика. М., «Наука», 1973.
22. Невзгядов В. Г. Теоретическая механика. Ч. I. М., Физматгиз, 1959.
23. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М., «Наука», 1966.
24. Лич Дж. У. Классическая механика. М., ИЛ, 1961.
25. Синг Дж. Л. Классическая динамика. М., Физматгиз, 1963.
26. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике, вып. 1, 2. М., «Мир», 1976.
27. Greenwood D. Principles of Dynamics. Prentice-Hall, England, Clifford, New Jersey, 1965.
28. Добронравов В. В., Никитин Н. Н., Дворников А. Л. Курс теоретической механики. М., «Высшая школа», 1974.
29. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. Ч. I, II. М., «Наука», 1972.
30. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работа по аналитической механике. М., «Наука», 1965.
31. Нетер Э. Инвариантные вариационные задачи. — В кн.: «Вариационные принципы механики». М., Физматгиз, 1959.
32. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
33. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика (Берклевский курс физики, т. I). М., «Наука», 1971.
34. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом. УФН, 44, вып. 1, 1951.

35. Ольховский И. И., Павленко Ю. Г., Кузьменков Л. С. Задачи по теоретической механике для физиков. М., Изд-во Моск. ун-та, 1977.
36. Коткин Г. Л., Сербо В. Г. Сборник задач по классической механике. М., «Наука», 1977.
37. Гречко Л. Г. и др. Сборник задач по теоретической физике. М., «Высшая школа», 1972.
38. Гиббс Дж. В. Основные принципы статистической механики. М.—Л., Гостехиздат, 1946.
39. Власов А. А. Макроскопическая электродинамика. М., Гостехиздат, 1955.
40. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., «Наука», 1976.
41. Куликов К. А. Курс сферической астрономии. М., «Наука», 1974.
42. Давыдов А. С. Квантовая механика. М., «Наука», 1973.
43. Соколов А. А., Лоскутов Ю. М., Тернов И. М. Квантовая механика. М., «Просвещение», 1965.
44. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. I. М., «Наука», 1971.
45. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1959.
46. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1969.
47. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М., «Наука», 1975.
48. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М., «Наука», 1971.
49. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., «Наука», 1975.
50. Гапонов А. В., Миллер М. А. О потенциальных ямах для заряженных частиц в высокочастотном электромагнитном поле, ЖЭТФ 34, вып. 1, 1958.

Часть II

51. Жуковский Н. Е. Теоретическая механика. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
52. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика. Ч. I, II. М., Физматгиз, 1963.
53. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
54. Широков М. Ф. Физические основы газодинамики. М., Физматгиз, 1958.
55. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. М., ИЛ, 1959.
56. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
57. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике, вып. 7. М., «Мир», 1967.
58. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М., «Наука», 1970.
59. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М., Изд-во Моск. ун-та, 1971.
60. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
61. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
62. Ильюшин А. А., Ломакин В. А., Шмаков А. П. Задачи и упражнения по механике сплошной среды. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973.
63. Леонтович М. А. Введение в термодинамику. М.—Л., ГИТТЛ, 1952.
64. Базаров И. П. Термодинамика. М., «Высшая школа», 1976.
65. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. II. М., «Наука», 1973.
66. Амензаде Ю. А. Теория упругости. М., «Высшая школа», 1976.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютно гладкая поверхность 203, 204
— твердое тело 9
— — — в однородном поле тяжести 341, 342
— — — с одной неподвижной точкой 367 и далее
— шероховатая поверхность 205, 381
Автоколебания 318
Адиабата Гюгонио 514
Адиабатическая инвариантность 443
Адиабатические инварианты математического маятника 446
Амплитуда волны 508
— — комплексная 508
— вынужденных колебаний 302
— комплексная 301
— собственных гармонических колебаний 45, 272
Амплитудная характеристика 301
Аналогия между силой Лоренца и силами инерции 249
Ансамбль Гиббса 390
Апериодическое движение 257
Апогей 93
Апсида 79
- Барометрическая формула 485
Бесконечно малый поворот 157—160
Бинормаль к траектории 19
- Вариация координат 206
— радиуса-вектора 202
Вектор деформации 464
— Умова 496
Вертикаль 175
Вес 175, 176
Вириал силы 74
Виртуальная работа 203, 450
Виртуальное перемещение 202
Возможное перемещение 202
Возмущение эллиптической орбиты 195
- Волна бегущая плоская 508
— — — монохроматическая 508
Волновое уравнение 505
Волновой вектор 508
Время 8, 13
Вынужденное колебание линейное 301
— — —, его полная энергия 303
— — нелинейное 320 и далее
Вырожденное движение 443
Вязкая жидкость 522
- Гамильтониан (см. функция Гамильтона) 385
Гамильтонова система 425
Гармоническое колебание 45
— —, его полная энергия 258
Гашение колебаний 307
Гироскопическая сила 70
— —, антисимметрия коэффициентов 70
Главная нормаль к траектории 18
Главные компоненты тензора деформации 467
Главные (нормальные) колебания 275
— (нормальные) координаты 275
Главные моменты инерции 351
— оси инерции 351
— центральные оси инерции 354
Голономная (интегрируемая) связь 199
Гравитационная тяжелая масса 34
— постоянная 33, 35
Гравитационное сжатие шара 560
Групповая скорость 509
- Движение тела переменной массы 101
— центра масс в неоднородном поле 99
— — — в однородном поле 98
Действительное перемещение 201
Декартовы координаты 10, 15
Деформация однородная 554
— частицы 464

* Указатель содержит термины, употребляемые как в первой, так и во второй частях книги. Во избежание недоразумений термины, употребляемые в механике сплошных сред, в ряде случаев дополнены сокращением «м. с. с.».

- Диаграмма импульсов 126
 — скоростей 126
 Динамика 38
 Динамические уравнения Эйлера 368
 Дисперсия звука 509
 Диссипативная функция в м. с. с. 480
 Диссипативная функция Рэлея 235
 — — — вблизи положения устойчи-
 вого равновесия 255, 289
 — — —, симметрия коэффициентов
 235
 Дифференциальное сечение рассеяния
 140
 — — — абсолютно упругих шариков
 147
 — — — частиц с электростатическим
 взаимодействием 143
 Дифференциальное уравнение траек-
 тории 456
 Дозвуковой поток 511
 Дрейф заряда 56
- Евклидово пространство 12
 Естественное задание движения 17
 Естественный трехгранник 18
- Задача двух тел** 114 и далее
 — — — в неинерциальной системе
 193
 — — — в случае гравитационного и
 электростатического взаимодей-
 ствия 118
 — — —, общее решение 117
 — — —, функция Гамильтона 388
 — — —, — Лагранжа 388
Задача Циолковского 102
Закон Архимеда 485
 — всемирного тяготения Ньютона 33
 — Гаука 29, 546, 547
Закон движения материальной точки
 14
 — — — твердого тела 338
Закон дисперсии 509
Закон изменения импульса 61, 96, 111
 — — — в м. с. с. 472—474
 — — —, кинетического момента и
 энергии в неинерциальной системе
 189—192
 — — — кинетического момента 103
 — — — — в м. с. с. 474, 475
 — — — кинетической энергии 65, 107
 — — — — в м. с. с. 475
 — — — момента импульса точки 62
 — — — обобщенной энергии 239
 — — — полной энергии 72, 109
 — — — функции Гамильтона 388
Закон инерции Галилея—Ньютона 36
Закон Кулона 30
 — Паскаля 484
 — подобия Рейнольдса 528
- Закон сохранения импульса** 62, 97,
 111
 — — —, кинетического момента и
 энергии в неинерциальной системе
 192—193
 — — — и превращения энергии всех
 форм движения материи 110
 — — — кинетического момента 103, 104,
 111
Закон сохранения массы в м. с. с. 470
Закон сохранения момента импульса
 точки 62—64
 — — — —, распространенные слу-
 чай 62, 64
 — — — обобщенного импульса 237, 388
 — — — обобщенной энергии 240
 — — — полной энергии 73, 109, 111
Закон Фурье 525
**Законы изменения импульса, кинети-
 ческого момента и энергии при на-
 личии связей** 209, 211
 — Кеплера 22, 87
 — Ньютона 36—39
Замкнутая (изолированная) система
 97
**Заряд в неоднородном магнитном по-
 ле** 76, 246
 — в однородных электрическом и
 магнитном полях 51—59
Заряд в переменном поле 42
 — в поле электрического диполя 410
 — в высокочастотном поле 335
**Заряженная молекула в электриче-
 ском поле** 343, 345
Затухающие колебания 257, 292
Захват частиц 121
Звуковые волны 507
- Идеальная жидкость** 482
 — связь 203
Идеальный газ 482
Изменение ориентации (вращение)
 155
Измерение масс 33, 176
 — сил 29
Изолированная материальная точка
 35
Изотропия пространства 111, 457
Изохронность колебаний 257
Изэнтропическое течение 487
**Импульс (количество движения) ма-
 териальной точки** 61
 — механической системы 94
 — — — в разных системах отсчета
 187, 194
 — твердого тела 339
Инвариант Пуанкаре 425
 — Пуанкаре—Картана 422
Инерциальная система отсчета 35
 — — —, ее преимущественность 172

- Инертность тела 38
 Интеграл Бернулли 489
 — — для несжимаемой жидкости 489
 Интеграл движения первый 60, 61
 — — второй 61
 Интеграл Коши 492
 — — для стационарных течений 492
 Интеграл площадей 65, 104
 — энергии 73
 Интегральный вариационный принцип 449, 450
 Инфинитное движение 83
- Канонические переменные** 384
 — преобразования 427
 — — инверсии 433
 — —, производящая функция 429
 — — тождественные 433
 — —, якобиан преобразования 432
 — уравнения Гамильтона 384, 386
 Касательная к траектории 18
 Качение тел 205, 365, 381
 Квазистатистический процесс в м. с. с. 479
 Килограмм 38
 Кинематические задачи 20
 — формулы Эйлера 161
 Кинетическая энергия 65, 107
 — — вблизи положения устойчивого равновесия 255, 271
 — — в декартовых, цилиндрических и сферических координатах 227—228
 — — в разных системах отсчета 182, 187
 — — вращения твердого тела 343
 — —, симметрия коэффициентов 230
 — — твердого тела 342
 Кинетический момент 103
 — — в разных системах отсчета 181, 187
 — — вращения твердого тела 342
 — — твердого тела 342
 Классическая механика 7
 Ковариантность уравнений Лагранжа 248
 Колебания атомов кристалла 280, 283
 Колебания вынужденные 301
 — —, их энергия 303—304
 — гармонические 45
 — —, их энергия 258
 — главные (нормальные) 275
 — двухатомной молекулы 280
 — — — вращающейся 298
 — затухающие 257, 292
 — линейные 255
 — малые 253
 — нелинейные 311
 — симметричной трехатомной молекулы 283
- слабо нелинейные 313
 — собственные (свободные) 255
 Комбинационные частоты 321
 Консервативная система 110
 Координаты главные (нормальные) 275
 — декартовы 10, 15
 Координаты независимые 217
 — обобщенные 217
 — сферические 17
 — циклические 223
 — цилиндрические 16
 Кориолисово (поворотное) ускорение 169
 Космическая скорость первая 90
 — — вторая 90
 Коэффициент затухания 257
 — — звука 538
 — Пуассона 555
 — теплового расширения 552
 — теплопроводности 525
 Коэффициенты вязкости (кинематический и динамический) 526
 — — (первый и второй) 523
 — Ламэ 544
 — подобия 528
 — термоупругости 546
 Критическая точка 493
- Лагранжиан** (см. *функция Лагранжа*) 234
 Ламинарное течение 529
 Либрация 438
 Линейная скорость 15
 Линейные колебания 255
 — — маятников 279, 292
 — — системы двух точек 277
 — — твердых тел 360—367 и далее
 — — точки 257, 267—270, 276
 Линия действия силы 63
 Линия тока 489
 — узлов 151
 Лобовой удар 129
 Локально равновесное состояние 477
 L-Система (лабораторная система отсчета) 121
- Магнитогидродинамические волны** (волны Альфвена) 520
 Малые колебания 253
 Масса гравитационная (тяжелая) 34
 — инертная 33
 Математический маятник 215
 Материальная точка 8
 — — в однородном поле тяжести 47 и далее
 — — в центрально-симметричном поле 77 и далее
 — — — —, условие замкнутости траектории 82

- —, движение по баллистической траектории 92
- — под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра силы 82 и далее
- Маятник математический 215
 - с вибрирующим подвесом 334
 - сферический 197, 241
 - физический 359
 - циклоидальный 224
- Мгновенная ось вращения 158
- Мера инертности 38
- Метод Крылова—Боголюбова 313 и далее
 - неопределенных множителей Лагранжа 206 и далее
 - разделения переменных 407 и далее
 - усреднения 331 и далее
- Метр 9
- Модули Ламэ 550
- Модуль объемного сжатия 551
 - сдвига 551
 - упругости 546
 - Юнга 555
- Момент импульса 62
 - — — в разных системах отсчета 181, 195
- Моменты инерции 350
 - — — главные 351
 - — — осевые 350
 - — — центробежные 350
- Мощность силы 65
 - — в разных системах отсчета 182, 195
 - — гироскопической 71
 - — диссипативной 71
- Напряженность поля 66
- Начала термодинамики (первое и второе) 477—481
- Начальные условия 26, 42
- Невесомость 178—180
- Неголономная связь 199
- Независимые координаты 217
- Неинерциальная система отсчета 36
- Нелинейные колебания 311
 - — математического маятника 317
 - — материальной точки, подвешенной на пружине 326
- Неравновесный (нестатический) процесс 480
- Несжимаемая жидкость 496
- Нестационарная связь 201
- Нормальные (главные) колебания 275
 - — координаты 275
- Нутация 376
- Ньютон (сила) 38
- Обобщенная сила 221
 - скорость 220
 - энергия 239
- Обобщенное ускорение 231
- Обобщенно-консервативная система 388
- Обобщенно-потенциальная сила 232
 - —, антисимметрия коэффициентов 234
 - — вблизи положения устойчивого равновесия 290
- Обобщенные координаты 217
- Обобщенный импульс 237
 - потенциал 232, 233, 249
 - — заряда в электромагнитном поле 232
- Обратимость квазистатических процессов 479
- Общее уравнение механики 216
- Однородное поле 47, 51 и далее
- Однородность времени 111, 458
 - пространства 111, 457
- Оптико-механическая аналогия 415
- Орбита точки 83
- Ортогональное преобразование 12
 - — обратное 154
 - — простейшее 152
- Осциллятор заряженный (в магнитном поле) 296
 - неизотропный 436
 - пространственный 44
- Падение точки на центр силового поля 81
 - частиц друг на друга 127
- Парадокс Д'Аламбера 499
- Параметр орбиты 84
- Пара сил 340
- Переменные «действие — угол» 439, 440
 - — — в задаче двух тел 447
 - Лагранжа в м. с. с. 547
 - Эйлера в м. с. с. 547
- Переносная сила инерции 171
 - скорость 167
- Переносное ускорение 169
- Период 89
- Периодический процесс 13
- Плоскопараллельное движение 357
- Плотность потока среды в м. с. с. 72
 - энергии в м. с. с. (см. вектор Умова) 496
- Поверхность разрыва 512
- Подобие стационарных течений 527
- Подъемная сила Жуковского 504
- Поле 7, 8
 - бесконечно малых перемещений 461
 - напряжений 473
 - плотности массы 460

- силовое 66
- — потенциальное 66
- скоростей 461
- соленоидальное 506
- стационарное 489
- центрально-симметричное 68, 77
- Полная вариация действия 419
- Полное сечение захвата 143
- — рассеяния 141
- Положение равновесия 223
- точки в разных системах отсчета 165
- — — — —, преобразование координат 165
- — — — —, устойчивого равновесия 255, 263
- Поперечная волна 520, 539, 564
- Поступательно-движущаяся система центра масс (см. *ц-система*) 115, 121, 180
- — — — —, законы изменения кинетического момента и кинетической энергии 183
- Поступательное движение 155
- Потенциал скорости 492
- Потенциальная энергия 67, 108—109
- — вблизи положения устойчивого равновесия, симметрия коэффициентов 271
- — внутренняя 108
- — в однородном поле 73 и далее
- — в поле переносной силы инерции 191
- Потенциальное (безвихревое) течение 491
- Потенциальный барьер 75
- Поток тепла, его плотность 478
- Преобразование Галилея 40
- тензора инерции при параллельном переносе системы координат 354
- — — при повороте системы координат 355
- Прецессия псевдoreгулярная 376
- регулярная 371
- «Приведенная» масса 116
- Принцип виртуальных перемещений 223
- наименьшего действия Гамильтона—Остроградского 452
- — — Мопертюи 454
- — — Якоби 455
- относительности Галилея 39
- Принцип суперпозиции 257
- Присоединенная масса 500
- Прицельное расстояние 121
- Продольная волна 509, 539, 564
- Производные вектора по времени в разных системах отсчета 168
- Производящая функция канонических преобразований 429
- Пространство 8, 11—13
- евклидово 12
- конфигураций 390
- фазовое 389
- — «расширенное» 421
- Простые среды 477
- Прямой скачок уплотнения 513
- Работа силы (см. *элементарная работа силы*) 65
- Равновесие 223
- твердого тела 342, 347
- , условие равновесия 223
- Равновесное состояние в м. с. с. 477
- Радиус-вектор 10
- Радиус кривизны траектории 19
- Разложение движения твердого тела на поступательное и вращательное 163
- Рассеяние абсолютно упругих шариков 136
- двух частиц, одна из которых до рассеяния покоится 128
- — —, скорости которых до рассеяния противоположны 132
- Рассеяние частиц 121
- — с электростатическим взаимодействием 135
- Растяжение стержня 555
- Реакция идеальной голономной связи 207
- связи 198
- Регулярная прецессия 162, 370
- Резонанс линейных колебаний 302
- — нелинейных колебаний 321
- — — главный 322
- Ротатор 352
- Сверхзвуковой поток 511
- Свободная материальная точка 26
- система 60
- Связь 198
- голономная 199
- идеальная 203
- неголономная 199
- нестационарная 201
- неудерживающая 200
- стационарная 201
- удерживающая 200
- Секторная скорость 15
- Секторное ускорение 15
- Секунда 13
- Сжатие всестороннее равномерное 554
- Сила 28
- активная 209
- внешняя 96
- внутренняя 96
- гироскопическая 70
- гравитационного притяжения 33
- диссипативная 71
- заданная 197
- инерции 171
- — кориолисова 171

- — переносная 171
- — центробежная 171
- Лоренца 30
- нестационарная 69
- обобщенная 221
- объемная (массовая) 472
- пассивная 209
- поверхностная 472
- потенциальная 66
- сопротивления среды 31
- стационарная 69
- упругая 29
- центральная 63
- электростатического воздействия 30
- Символ Кронкера 349
- Симметричный волчок 368
- заряженный волчок в магнитном поле 376
- свободный волчок 369
- тяжелый быстрый волчок 372
- Симметрия материальная 351
- связи 211, 223
- силового поля 211, 223
- траектории 79
- Система взаимодействующих точек в однородном поле тяжести 184
- материальных точек 9
- Система отсчета 9
- — инерциальная 35
- — Коперника 11
- — лабораторная 121
- — локально-инерциальная 180
- — неинерциальная 36
- — неускоренно движущаяся 39
- — ускоренно движущаяся 172
- центра масс 115, 121, 180
- Скобки Пуассона 395
- — для проекций радиуса-вектора, импульса и момента импульса точки 398
- — фундаментальные 396
- Скорость деформации 465
- звука 507
- материальной точки 14
- — в декартовых, цилиндрических и сферических координатах 15—17
- — — в разных системах отсчета 167
- — —, разложение по «естественным» ортам 19
- прецессии 162
- фазовая 509
- Слабо нелинейные колебания 313
- Собственные (свободные) колебания 255
- частоты системы 273
- Соотношение Майера 488
- Срыв амплитуды нелинейных колебаний 331
- Статика 223
- Стационарная связь 201
- Сферические координаты 17
- Сферический маятник 197
- Тангенциальный разрыв 512
- Твердое тело 546
- — идеально упругое 546
- — анизотропное 547
- — изотропное 547
- Температура 477
- Тензор деформации 464
- — инерции 350
- — центральный 354
- метрический 544
- напряжений 473
- плотности потока импульса 495
- поворота в м. с. с. 464
- скоростей деформации 465
- упругости 549
- Теорема Гельмгольца о разложении векторного поля 506
- Клаузиуса о вихрях сил 74
- Лармора 235
- Лиувилля о сохранении фазового объема 392
- Нетер 456
- о единственности инварианта Пуанкаре 425
- Пуассона 395
- Томсона о циркуляции скорости 490
- Штейнера 354
- Эйлера о повороте твердого тела 156
- Якоби 403
- Течение проводящей вязкой жидкости 542
- Пуазейля 532
- Тождество Пуассона 395
- Точечное преобразование 248
- Точка поворота 79
- Траектория точки 14
- Турбулентное течение 529
- Угловая скорость системы отсчета (абсолютно твердого тела) 159
- — частицы в м. с. с. 465
- Углы Эйлера 151
- Угол рассеяния 125
- Ударная адиабата (см. адиабата Гюгонио) 514
- волна 511
- Удельный объем 487
- «Укороченное» действие 407
- Упругие волны 561 и далее
- Упругое рассеяние 123
- Уравнение Гамильтона—Якоби 399, 403
- — —, его полный интеграл 403
- Д'Аламбера—Лагранжа 216

- гидростатики 484
- движения точки 41 и далее
- — — в декартовых, цилиндрических и сферических координатах 44, 46, 227, 228
- — — в неинерциальной системе 171
- — — относительно Земли 172—175
- — центра масс 94
- изменения внутренней энергии в м. с. с. 479
- — кинетической энергии в м. с. с. 475
- — энтропии 480
- Ламэ 553
- Лапласа 496
- Мещерского 102
- Навье — Стокса 526
- непрерывности 471
- связи 198
- состояния 483
- — калорическое 483
- — термическое 483
- Эйлера в м. с. с. 483
- Уравнения движения вязкой жидкости 523—525
- — идеальной жидкости 483
- — идеально упругого тела 548
- — механической системы 38
- — несжимаемой вязкой жидкости 526
- Лагранжа вблизи положения устойчивого равновесия 255, 271, 291
- — в главных координатах 275
- — в независимых координатах (уравнения второго рода) 214, 229
- — в неинерциальной системе 249
- — в обобщенных координатах (для неголономных систем) 381
- —, их ковариантность 248
- — с реакциями связей (уравнения первого ряда) 209
- — — — для голономных систем 209
- — — — для неголономных систем 381
- Уравнения магнитогидродинамики вязкой жидкости 541
- — идеальной жидкости 517
- Ускорение материальной точки 15
- — — в декартовых, цилиндрических и сферических координатах 20, 21, 228
- — — в разных системах отсчета 169
- Условия ортогональности 12
- Условно-периодическое движение 442
- Устойчивое равновесие 263
- —, достаточный признак 263
- Устойчивость маятника с вибрирующим подвесом 334
- Фаза волны 508
- колебаний 46
- Фазовая скорость 509
- точка 389
- траектория 389
- характеристика 301
- Фазовое пространство 389
- — «расширенное» 421
- Физически бесконечно малая частица 459
- — малый интервал времени 459
- — — объем 459
- Физический маятник 359
- Финитное движение 83
- Фокусировка зарядов 54, 56
- Формула Бине 23
- Резерфорда 143—145
- Стокса 537
- Торричелли 490
- Функция Гамильтона 385
- — в задаче двух тел 388
- — в неинерциальной системе 386
- — свободного заряда 385
- — — — в поле электрического диполя 410
- — свободной точки в декартовых, цилиндрических и сферических координатах 385
- Функция действия 399
- — заряда в поле электрического диполя 411
- — свободной точки 406
- — точки в однородном поле тягести 418
- Функция Лагранжа 234
- — в главных координатах 275
- — в задаче двух тел 388
- — заряда в центрально-симметричном магнитном поле 246
- — — в поле ядра и магнитном поле 236
- — осциллятора 238
- — свободного заряда 385
- — свободной точки в неинерциальной системе 385
- — симметричного тяжелого волчка 373
- — сферического маятника 241
- — — — твердого тела 342—343
- Функция состояния в м. с. с. 477
- Характеристическое уравнение 255, 278
- Центрально-симметричное поле 68, 77
- Центр масс (центр инерции) 94
- силы 63

Центробежная сила инерции 171
 Циклические координаты 223
 Циклотронная частота 52
 Цилиндрические координаты 16
 Циркуляция скорости 490
 Ц-система (см. *система центра масс*)
 121

Частота волны 508
 — Лармора 235
 — колебаний линейных 45, 257
 — — нелинейных 312
 Число Маха 511
 — Рейнольдса 528
 — степеней свободы 217
 — — свободного твердого тела
 338

Чистое кручение 558

Чистый изгиб 556

— сдвиг 554

Широта географическая 175

— геоцентрическая 175

Эквипотенциальная поверхность 68

Эксцентриситет орбиты 84

Элементарная работа силы 65

— — — на виртуальном перемещении (см. *виртуальная работа*) 203, 450

— — — на действительном перемещении 65

— — — потенциальной нестационарной 69—70

— — — — стационарной 67—69

Энергия внутренняя в м. с. с. 477

— кинетическая 65, 107

— — в м. с. с. 475

— полная 72, 109

— потенциальная 67, 108—109

— — внутренняя 108

— — во внешних полях 108

— — в поле переносных сил инерции 191

— свободная 549

Энтальпия (тепловая функция) 488

Энтропия 479

Эффект Допплера 510

«Эффективная» потенциальная энергия 78, 334

Игорь Иванович Ольховский

**КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКИ ДЛЯ ФИЗИКОВ,
ИЗД. 3**

Зав. редакцией

А. А. Локшин

Редактор Р. А. Бунатян

Переплет художника

Н. А. Князькова

Технический редактор

Г. Д. Дегтярева

Корректоры

И. А. Большакова,

С. С. Мазурская

Тематический план 1978 г. № 84

ИБ № 491

Сдано в набор 24.11.77.

Подписано к печати 14.09.78.

Л-78450 Формат 60×90/16

Бумага тип. № 3.

Гарнитура литературная.

Высокая печать.

Усл. печ. л. 36,0

Уч.-изд. л. 32,26 Изд. № 310

Зак. 284 Тираж 16830 экз.

Цена 1 р. 30 к.

Издательство

Московского университета.

Москва, К-9, ул. Герцена 5/7.

Типография Изд-ва МГУ.

Москва, Ленинские горы