ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ, ՖԻԶԻԿԱՅԻ և ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱՅԻ ՖԱԿՈՒԼՏԵՏ

ՄՐՑՈՒՅԹ, ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ, 12-րդ դասարան

Լուծումներ

Խնդիր 1: Ամբողջ թվերի (a_n) հաջորդականությունը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$a_0 = 1,\, a_1 = 2,\ a_{n+2} = a_n + (a_{n+1})^2\ \ (n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0):$$

Ապացուցել, որ a_{2018}-ը բաժանվում է 7-ի:

Լուծում: Դիցուք r_n-ը a_n-ի մնացորդն է 7-ի բաժանելիս: Այդ դեպքում՝

$$r_0 = 1, r_1 = 2, r_2 = 5, r_3 = 6, r_4 = 6, r_5 = 0, r_6 = 6, r_7 = 1, r_8 = 0, r_9 = 1, r_{10} = 1, r_{11} = 2, \ldots$$

Հետևաբար (r_n) հաջորդականությունը 10-պարբերական է: Այսպիսով $r_{2018} = r_8 = 0$:

Խնդիր 2: $f: N \to N$ ֆունկցիան բավարարում է $f(2) = 1$ և $xf(x) = (x-1)f(x+1)$ պայմաններին: Գտնել $f(2018)$-ի արժեքը:

Լուծում: Ունենք՝ $f(x+1) = \frac{x}{x-1}f(x)$: Հետևաբար՝

$$f(2018) = \frac{2017}{2016}f(2017) = \frac{2017}{2016}\cdot\frac{2016}{2015}f(2016) = \cdots =$$

$$\frac{2017}{2016}\cdot\frac{2016}{2015}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{1}\,f(2) = 2017:$$

Խնդիր 3: $1,2,3,\ldots,2n$ թվերի ինչպիսի՞ $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ տեղափոխության դեպքում հետևյալ արտահայտությունը կընդունի իր մեծագույն արժեքը՝

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_4} + \cdots + \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}:$$

Պատասխանը հիմնավորել:

Լուծում: Օգտվենք հետևյալ պնդումից. եթե $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ և $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$, իսկ $z_1, z_2, \ldots, z_n$ թվերը $y_1, y_2, \ldots, y_n$ թվերի ինչ-որ տեղափոխություն է, ապա տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n \leq x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \text{ ։}$$

Հաշվի առնելով նշված պնդումը, անհրաժեշտ է $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ թվերն ընտրել այնպես, որ

$$a_1 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_{2n-1} \quad և \quad a_2 \leq a_4 \leq \cdots \leq a_{2n} \quad (1)$$

Ընդ որում համարիչներում գրված թվերը պետք է լինեն $n+1, n+2, \dots, 2n$, իսկ հայտարարներում գրված թվերը՝ $1,2,\dots,n$: Իրոք, ենթադրենք համարիչներից մեկում գրված թիվը $n+1$-ից փոքր է: Դիտարկենք ամենաաջ գտնվող կոտորակը, որի համարիչը փոքր է $n+1$-ից: Այդ դեպքում, հաշվի առնելով (1)-ը, կստանանք, որ այդ կոտորակի համարիչը փոքր է իր հայտարարից: Հետևաբար, փոխելով այդ կոտորակի համարիչի և հայտարարի տեղերը կստանանք $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_4} + \cdots + \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$ արտահայտության ավելի մեծ արժեք:

Այսպիսով, $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ թվերի հետևյալ դասավորության դեպքում $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_4} + \cdots + \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$ արտահայտությունը կընդունի իր մեծագույն արժեքը:

$$a_1 = 2n, a_2 = 1, a_3 = 2n-1, a_4 = 2, a_5 = 2n-2, a_6 = 3, \dots, a_{2n-1} = n+1, a_{2n} = n:$$

Խնդիր 4: Հայտնի է, որ $x, y \in (0,1)$: Որոշել հետևյալ արտահայտության մեծագույն արժեքը.

$$\frac{xy(1-x-y)}{(x+y)(1-x)(1-y)} \text{ ։}$$

Լուծում: Եթե $x = y = \frac{1}{3}$, ապա նշված արտահայտության արժեքը կլինի $\frac{1}{8}$: Այժմ ապացուցենք, որ նշված արտահայտության արժեքը $\leq \frac{1}{8}$ ։ Նշանակենք՝ $z = 1-x-y$: Նշենք, որ եթե $z < 0$, ապա նշված արտահայտության արժեքը բացասական է, ուստի այն $\leq \frac{1}{8}$ ։

Այժմ դիտարկենք $z \geq 0$ դեպքը: Ունենք՝

$$\frac{xy(1-x-y)}{(x+y)(1-x)(1-y)} = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)} \text{ ։}$$

Օգտվելով Կոշու անհավասարությունից, կստանանք՝

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}, \;\; y+z \geq 2\sqrt{yz}, \quad x+z \geq 2\sqrt{xz}$$

Այսպիսով՝ $(x+y)(y+z)(x+z) \geq 8xyz$: Հետևաբար՝ $\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)} \leq \frac{1}{8}$ ։ Պատ.՝ $\frac{1}{8}$

Խնդիր 5: Հայտնի է, որ $P(x)$-ը այնպիսի բազմանդամ է, որ ցանկացած a և b իրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ պայմանը.

$$\text{եթե } a^2+b^2=1, \text{ ապա } P(a)=P(b):$$

Ապացուցել, որ գոյություն ունի $Q(x)$ բազմանդամ այնպես, որ $P(x) \equiv Q(x^2-x^4)$:

Լուծում: Տես՝ 11-րդ դասարան, Խնդիր 5: