ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ, ՖԻԶԻԿԱՅԻ և ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱՅԻ ՖԱԿՈՒԼՏԵՏ

ՄՐՑՈՒՅԹ, ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ, 11-րդ դասարան

Լուծումներ

Խնդիր 1: 20182018 … 2018 հազարնիշանոց թվից ամենաշատը քանի՞ թվանշան պետք է ջնջել, որ մնացած թվանշանների գումարը լինի 2018:

Լուծում: Տրված թվի մեջ կա 250 հատ “8”: Տրված թվի թվանշաններից ընտրելով 250 հատ “8” և 9 հատ “2” կստանանք 259-նիշանոց թիվ, որի թվանշանների գումարը 2018 է: Մյուս կողմից, եթե որևէ “8” թվանշանի փոխարեն վերցնենք ավելի փոքր թվանշաններ, ապա նրանց քանակը կմեծանա: Հետևաբար տրված 1000-նիշանոց թվից պետք է ջնջել 1000-259=741 թվանշան:

Խնդիր 2: 1,2,3, … ,20 թվերի ինչպիսի՞ $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ տեղափոխության դեպքում հետևյալ արտահայտությունը կընդունի իր մեծագույն արժեքը՝

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots+\frac{a_{19}}{a_{20}} \ :$$

Լուծում: Օգտվենք հետևյալ պնդումից. եթե $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ և $y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_n$, իսկ $z_1, z_2, \dots, z_n$ թվերը $y_1, y_2, \dots, y_n$ թվերի ինչ-որ տեղափոխություն է, ապա տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n \le x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n :$$

Հաշվի առնելով նշված պնդումը, անհրաժեշտ է $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ թվերն ընտրել այնպես, որ

$$a_1 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_{19},\ a_2 \le a_4 \le \cdots \le a_{20} \quad (1)$$

Ընդ որում համարիչներում գրված թվերը պետք է լինեն 11,12,…,20, իսկ հայտարարներում գրված թվերը՝ 1,2,…,10: Իրոք, ենթադրենք համարիչներից մեկում գրված թիվը 11-ից փոքր է: Դիտարկենք ամենաաջ գտնվող կոտորակը, որի համարիչը փոքր է 11-ից: Այդ դեպքում, հաշվի առնելով (1)-ը, կստանանք, որ այդ կոտորակի համարիչը փոքր է իր հայտարարից: Հետևաբար, փոխելով այդ կոտորակի համարիչի և հայտարարի տեղերը կստանանք $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots+\frac{a_{19}}{a_{20}}$ արտահայտության ավելի մեծ արժեք:

Այսպիսով, $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ թվերի հետևյալ դասավորության դեպքում $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots+\frac{a_{19}}{a_{20}}$ արտահայտությունը կընդունի իր մեծագույն արժեքը:

$$a_1 = 20, a_2 = 1, a_3 = 19, a_4 = 2, a_5 = 18, a_6 = 3, \dots, a_{19} = 11, a_{20} = 10:$$

Խնդիր 3: Հայտնի է, որ n բնական թվի n-ից և 1-ից տարբեր ամենամեծ բաժանարարը 45 անգամ մեծ է n-ից և 1-ից տարբեր ամենափոքր բաժանարարից: Քանի՞ այդպիսի n թիվ կա:

Լուծում: Պարզ է, որ n-ի 1-ից տարբեր ամենափոքր բաժանարարը պարզ թիվ է: Այն նշանակենք p–ով: Հետևաբար n-ի (իրենից տարբեր) ամենամեծ բաժանարարը $45p$-ն է: Պարզ է, որ $n = 45p^2$: Հետևաբար՝ n-ը բաժանվում է 3-ի, ուստի $p = 2$ կամ $p = 3$: Այսպիսով՝ $n = 180$ կամ $n = 405$:

Պատ.՝ 2:

Խնդիր 4: Տրված է ABC եռանկյան մեջ տարված են AD, BE, CF բարձրությունները: Ապացուցել, որ $DE + DF \leq BC$:

Լուծում: Ունենք, որ $\Delta CDE \sim \Delta CAB$, ապա $DE = ABcosC$: Համանմանորեն՝ $DF = ACcosB$: Մյուս կողմից՝ $BC = BD + DC = ABcosB + ACcosC$: Հետևաբար՝

$$DE + DF - BC = (AC - AB)(cosB - cosC):$$

Եթե $AC > AB$, ապա $\angle B > \angle C$, ուստի $cosB < cosC$, հետևաբար՝ $DE + DF - BC < 0$:

Եթե $AC < AB$, ապա $\angle B < \angle C$, ուստի $cosB > cosC$, հետևաբար՝ $DE + DF - BC < 0$:

Եթե $AC = AB$, ապա $DE + DF - BC = 0$:

Խնդիր 5: Հայտնի է, որ $P(x)$-ը այնպիսի բազմանդամ է, որ ցանկացած a և b իրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ պայմանը.

$$\text{եթե } a^2 + b^2 = 1, \text{ ապա } P(a) = P(b) :$$

Ապացուցել, որ գոյություն ունի $Q(x)$ բազմանդամ այնպես, որ $P(x) \equiv Q(x^2 - x^4)$:

Լուծում: Ցանկացած $a \in [0; 1]$ թվի համար ունենք՝ $P(a) = P\left(\sqrt{1 - a^2}\right) = P(-a)$: Հետևաբար P(x) բազմանդամի մեջ x-ի կենտ աստիճանների գործակիցները 0-ներ են: Այսինքն՝ $P(x) = H(x^2)$ (ինչ-որ $H(x)$ բազմանդամի համար): Ընդ որում $H(x)$ բազմանդամը բավարարում է հետևյալ պայմանին.

$$(*) \quad \text{եթե } s \in [0; 1], \text{ ապա } H(s) = H(1 - s):$$

Մնում է, ցույց տալ, որ եթե $H(x)$-ը բավարարում է (*) պայմանին, ապա գոյություն ունի $Q(x)$ բազմանդամ այնպես, որ $H(x) \equiv Q(x - x^2)$:

Այս պնդումն ապացուցենք ինդուկցիայի մեթոդով ըստ $H(x)$-ի աստիճանի:

Եթե $deg(H) = 0$, ապա պնդումն ակնհայտ է:

Ենթադրենք $H(x)$ -ի աստիճանից ավելի փոքր աստիճան ունեցող բազմանդամների համար պնդումը ճիշտ է: Այն ապացուցենք $H(x)$ –ի համար: Դիտարկենք $T(x) = H(x) - H(0)$ բազմանդամը: Օգտվելով (*)-ից, ստանում ենք, որ $T(1) = T(0) = 0$: Հետևաբար՝ $T(x)$ -ը բաժանվում է $x(1-x)$-ի վրա: Այսինքն, գոյություն ունի $L(x)$ բազմանդամ, որ

$$T(x) = x(1-x)L(x):$$

Ունենք, որ $T(1-x) = x(1-x)L(1-x)$: Քանի որ $H(x)$ -ը, հետևաբար նաև $T(x)$ -ը բավարարում են (*) պայմանին, ապա ցանկացած $s \in (0;1)$ թվի համար՝

$$s(1-s)L(1-s) = T(1-s) = T(s) = s(1-s)L(s):$$

Հետևաբար $L(1-s) = L(s)$: Այսպիսով $L(1-x)$ և $L(x)$ բազմանդամները հավասարվում են x-ի անթիվ բազմությամբ արժեքների համար: Հետևաբար, այդ բազմանդամները նույնաբար հավասար են: Ուստի նրանք կհավասարվեն նաև $[0;1]$ հատվածի վրա: Հետևաբար (*) պայմանը տեղի ունի նաև $L(x)$ բազմանդամի համար: Քանի որ $\deg(L) < \deg(H)$, ապա ինդուկցիոն ենթադրության համաձայն, $L(x)$ բազմանդամի համար գոյություն ունի $Q_1(x)$ բազմանդամ այնպես, որ $L(x) \equiv Q_1(x - x^2)$:

Հետևաբար՝ $H(x) = T(x) + H(0) =(x - x^2)L(x) + H(0) = (x - x^2)Q_1(x - x^2) + H(0)$:

Այսպիսով, նշանակելով $Q(x) = xQ_1(x) + H(0)$, կունենանք՝ $H(x) = Q(x - x^2)$: